а T_0 равной температуре плавления сапфира 2326 К. Ввиду отсутствия для сапфира данных о величине коэффициента поглощения при столь высоких температурах расчеты были выполнены при $k = 0{,}02$; $0{,}1$; $0{,}5$. Результаты расчетов представлены на фиг. 3.

Автор выражает благодарность Э. А. Троппу за полезные обсуждения в процессе выполнения данной работы.

Поступила 13 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сергеев О. А., Мень А. А.** Теплофизические свойства полупрозрачных материалов. М., Изд-во стандартов, 1977.
2. **Оцисик М. И.** Сложный теплообмен. М., «Мир», 1976.
3. **Саттаров Д. К.** Волоконная оптика. Л., «Машиностроение», 1973.

УДК 536.24

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

Л. К. Мартинсон

(*Москва*)

Рассмотрим нелинейный процесс теплопереноса в среде с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры по степенному закону. При наличии в среде объемного поглощения тепла, мощность которого зависит от температуры, такой процесс описывается [1] квазилинейным параболическим уравнением

$$\partial u/\partial t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) - \psi(u), \quad \sigma > 0. \tag{1}$$

Характерной особенностью такого нелинейного процесса переноса является конечная скорость распространения тепловых возмущений [2, 3]. Это означает, что возмущение от источника распространяется в среде в виде тепловой волны, фронт которой перемещается по невозмущенному фону с конечной скоростью. При наличии в среде объемного поглощения тепла, зависящего от температуры ($\psi \neq 0$), в таком процессе может наблюдаться нелинейный эффект пространственной локализации теплового возмущения, когда даже за бесконечный промежуток времени возмущение проникает в среду лишь на конечное расстояние [4, 5].

В данной работе исследуется особый режим локализации теплового возмущения, когда в процессе движения скорость фронта тепловой волны изменяет свое направление.

Рассмотрим задачу о влиянии мгновенного точечного источника тепла мощности Q, помещенного в нелинейную среду при наличии объемного поглощения тепла, зависящего от температуры степенным образом ($\psi(u) = \gamma u^\nu$, $\gamma = \mathrm{const}$, $\nu = 1 - \sigma$, $\sigma < 1$). В этом случае задача о распределении температуры в среде сводится к решению квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{x^{s-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{s-1}u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\gamma u^{1-\sigma}, \tag{2}$$

где $s = 1$, 2 и 3 соответственно для случаев плоской, осевой и центральной симметрий задачи. При этом начальное распределение $u(0, x) = u_0(x)$ в рассматриваемой задаче Коши в области $R_+^2=\{(t,x): t\in[0,+\infty), x\geqslant 0\}$ для уравнения (2) представляет собой некоторую функцию типа δ-функции, удовлетворяющую условию

$$\int_0^{\infty} u_0(x)\,L(s)\,x^{s-1}\,dx=Q, \tag{3}$$

где

$$L(s)=\begin{cases}2 & \text{при } s=1,\\ 2\pi & \text{при } s=2,\\ 4\pi & \text{при } s=3.\end{cases}$$

Используя результаты работы [6], решение задачи (2), (3) будем искать в виде

$$u(t,x)=\begin{cases}a(t)\left[x_+^2(t)-x^2\right]^{\alpha} & \text{при } x<x_+(t),\\ 0 & \text{при } x\geqslant x_+(t).\end{cases} \tag{4}$$

Подставляя $u(t, x)$ в форме (4) в уравнение (2), получим

$$\dot a\left[x_+^2-x^2\right]^{\alpha}+2\alpha a x_+\dot x_+\left[x_+^2-x^2\right]^{\alpha-1}=2\alpha s a^{\sigma+1}\left[x_+^2-x^2\right]^{\alpha-1}+ \tag{5}$$
$$+4\alpha(\alpha-1)a^{\sigma+1}x^2\left[x_+^2-x^2\right]^{\alpha-2}-\gamma a^{1-\sigma}\left[x_+^2-x^2\right]^{\alpha(1-\sigma)}.$$

Точкой в (5) обозначается дифференцирование по временной переменной. Соотношение (5) удовлетворяется тождественно, если положить $\alpha = \sigma^{-1}$, а зависимости $a(t)$ и $x_+(t)$ выбрать в виде

$$a(t)=\left[\frac{\sigma}{2(2+s\sigma)t}\right]^{\frac{1}{\sigma}}; \tag{6}$$

$$x_+^2(t)=Ct^{\frac{2}{2+s\sigma}}-\gamma\frac{(2+s\sigma)^2}{1+s\sigma}t^2. \tag{7}$$

В соотношении (7) C — некоторая константа, значение которой можно определить, используя интегральное условие (3), которое может быть записано в виде

$$\int_0^{x_+(t)} u(t,x)\,L(s)\,x^{s-1}\,dx=Q \quad \text{при } t\to 0.$$

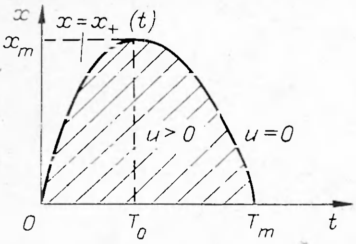
Отсюда с учетом (4), (6) и (7) после вычисления квадратуры [7] получим

$$C=\left[\frac{Q}{R(s,\sigma)}\right]^{\frac{2\sigma}{2+s\sigma}},\qquad R(s,\sigma)=\frac{1}{2}L(s)\left[\frac{\sigma}{2(2+s\sigma)}\right]^{\frac{1}{\sigma}}B\left(\frac{s}{2},\frac{\sigma+1}{2}\right).$$

Таким образом, окончательно точное решение задачи (2), (3) имеет вид

$$u(t,x)=\begin{cases}\left\{\dfrac{\sigma}{2(2+s\sigma)t}\left[x_+^2(t)-x^2\right]\right\}^{\frac{1}{\sigma}} & \text{при } x<x_+(t),\\ 0 & \text{при } x\geqslant x_+(t),\end{cases}\tag{9}$$

где зависимость $x_+(t)$ определяется соотношением (7) с константой C, найденной из (8). Заметим, что при $\gamma\to 0$ это решение переходит в решение задачи о точечном источнике в нелинейной среде без поглощения [2].



Дадим физическую интерпретацию решения (9). Это решение описывает тепловую волну, фронт которой перемещается в среде с конечной скоростью. Положение фронта тепловой волны, отделяющего область возмущения, где $u>0$, от невозмущенной области, где $u=0$, в любой момент времени определяется зависимостью $x=x_+(t)$. Качественный характер этой зависимости изображен на фигуре. Заметим, что на фронте тепловой волны выполняются физические условия непрерывности температуры и теплового потока даже в случае $\sigma<1$, когда фронт волны является крутым ($|u_x|\to+\infty$ при $x\to x_+(t)$). В этом случае тепловой поток на фронте волны обращается в нуль за счет обращения в нуль коэффициента теплопроводности.

Особенностью рассматриваемой задачи является тот факт, что в процессе эволюции теплового возмущения фронт тепловой волны изменяет направление своего движения. При $t<T_0$, где

$$T_0=\left[C\frac{1+s\sigma}{\gamma(2+s\sigma)^3}\right]^{\frac{2+s\sigma}{2(1+s\sigma)}},$$

$\dot{x}_+(t)>0$ и размер области возмущения увеличивается со временем. Скорость движения фронта при этом уменьшается, и при $t=T_0$ фронт тепловой волны останавливается. В этот момент времени размер области возмущения достигает своего максимального значения $x_m=x_+(T_0)$. Затем скорость движения фронта изменяет направление, и при $t>T_0$ в среде распространяется волна охлаждения ($\dot{x}_+(t)<0$). При $t=T_m$, где

$$T_m=T_0(2+s\sigma)^{\frac{2+s\sigma}{2(1+s\sigma)^2}}$$

область возмущения стягивается в точку и $u=0$ всюду в $R_+^2\cap\{t>T_m\}$. Другими словами, в рассматриваемой задаче тепловое возмущение от мгновенного точечного источника имеет конечное время существования, равное T_m. Этот необычный с точки зрения линейной теории теплопроводности результат согласуется с выводами работы [8], где было показано, что при $\nu<1$ в задаче Коши для уравнения (1) всегда существует такое $T_m<+\infty$, что $u(t,x)=0$ при всех $t\geqslant T_m$.

В заключение отметим, что уравнение (1) описывает широкий класс явлений переноса (теплопроводность, диффузия, фильтрация и др.). Поэтому полученные результаты могут интерпретироваться и в рамках других физических моделей.

Поступила 29 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
2. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.
3. **Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь.** Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации.— «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, № 5.
4. **Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.** К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности.— ЖВММФ, 1972, т. 12, № 4.
5. **Голайдо С. П., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.** Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла.— ЖВММФ, 1973, т. 13, № 5.
6. **Кершнер Р.** О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Автореф. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук, М., МГУ, 1976.
7. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
8. **Калашников А. С.** О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 4.

УДК 532.72

О КОНВЕКТИВНОМ МАССООБМЕНЕ В СИСТЕМЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ СФЕР

Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев, Ю. А. Сергеев

(*Москва*)

В задачах о конвективной диффузии в системе реагирующих частиц при больших числах Пекле существенную роль играет структура особых линий тока, начинающихся и оканчивающихся на поверхностях частиц [1—3]. При этом оказывается, что в потоке существуют цепочки частиц, внутренний массообмен в которых сильно заторможен взаимодействием диффузионных следов и пограничных слоев частиц, принадлежащих цепочке. Для разреженной системы сфер равного радиуса, расположенных в узлах кубической решетки, учет взаимодействия диффузионных следов и пограничных слоев частиц проведен в [4], где считалось, что отношение периода решетки b к радиусу сфер a удовлетворяет неравенству $b/a \gg \mathrm{Pe}^{1/3}$ (Pe—число Пекле одиночной сферы). Это предположение позволяло свести исходную задачу к автомодельной задаче о диффузии вещества с постоянной концентрацией, натекающей на отдельную сферу [5]. В данной работе рассматривается массообмен концентрированной упорядоченной системы реагирующих твердых сфер при условии $b/a \ll \mathrm{Pe}^{1/3}$.

Рассмотрим стационарную конвективную диффузию в ламинарном потоке вязкой несжимаемой жидкости, фильтрующимся сквозь систему реагирующих сфер равного радиуса, расположенных в узлах кубической решетки. Считаем, что средняя скорость фильтрационного потока в промежутках между сферами параллельна одной из осей решетки и равна U, а число Рейнольдса $\mathrm{Re} = aU/\nu$ (ν — кинематическая вязкость жидкости) мало. Тогда поле скоростей жидкости в решетке может быть определено в рамках ячеечной модели [6, 7] или при $b/a \gg 1$ по модели точечных сил [4, 8]. В дальнейшем считаем, что положение фиксированной среды в решетке задается набором трех целых чисел и расстояние вдоль оси потока определяется значением параметра $k = 1, 2, \ldots$