the load point Точки приложение нагрузки

Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 6

О ДОПУСТИМЫХ ФОРМАХ СООТНОШЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

УДК 539.374

А. И. Чанышев

Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск

В настоящее время существует значительное число различных по форме и содержанию математических моделей упругопластических сред [1, 2]. При построении определяющих соотношений подразумевается, что вся область догружения разбивается на несколько непересекающихся областей, в каждой из которых соотношения между напряжениями и деформациями имеют дифференциально-линейный характер. При этом возможны случаи, когда происходит разрыв приращений деформаций (или напряжений) при переходе из одной области догружения в другую и когда в областях догружения нет локального потенциала.

Вместе с тем существуют вытекающие, например, из постулата макродетерминизма Клюшникова [3] ограничения на допустимые формы соотношений пластичности: 1) локальный потенциал в каждой из областей догружения, 2) непрерывность перехода из одной области догружения в другую. Эти ограничения таковы, что им «не удовлетворяют эндохронная теория пластичности, многие варианты определяющих соотношений в теории упругопластических процессов и теориях типа скольжения» [3, 4]. По существу, из известных теорий этим ограничениям удовлетворяет лишь теория пластического течения Рейсса — Ланинга.

correctness?

Несмотря на наличие указанных ограничений, их как бы не замечают, ссылаясь на то, что пластичность должна учитывать порядок приложения нагрузок, т. е. существование локального потенциала необязательно, что заставляет посмотреть на вывод предложенных ограничений снова, чтобы исключить сомнения в их получении. В связи с этим предлагается обратиться к теореме единственности решения упругопластической задачи в малом — рассмотреть определяющие соотношения в каком-то достаточно общем виде, краевую упругопластическую задачу и из единственности решения данной задачи в малом установить те ограничения на допустимые формы определяющих соотношений пластичности, которые указаны выше.

Для реализации намеченного плана необходимо выбрать математическую модель пластичности. Пусть эта модель такова, что имеются только две области догружения, разделенные некоторой плоскостью с уравнением

$$f_n = f(\Delta\sigma_{kl}(t), \sigma_{pq}(t_n)) = 0 \tag{1}$$

(введение только двух областей догружения не ограничивает общности рассуждения). Предполагаем, что функция f_n линейная относительно $\Delta\sigma_{kl}(t)$ и не убывающая относительно $\sigma_{pq}(t_n)$. Здесь t — параметр нагружения, изменяющийся в пределах от 0 до T; $t_0 = 0 < t_1 < t_2 \ldots < t_N = T$ — точки разбиения интервала $[0, T]$; $\Delta\sigma_{kl}(t) = \sigma_{kl}(t) - \sigma_{kl}(t_n)$ $(t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1})$. Определяющие соотношения пластичности в областях догружения имеют вид

$$\Delta\varepsilon_{ij}(t) = A_{ijkl}(\sigma_{pq}(t_n))\Delta\sigma_{kl}(t) \quad \text{при} \quad f_n = f(\Delta\sigma_{kl}(t), \sigma_{pq}(t_n)) > 0; \tag{2}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}(t) = B_{ijkl}(\sigma_{pq}(t_n))\Delta\sigma_{kl}(t) \quad \text{при} \quad f_n = f(\Delta\sigma_{kl}(t), \sigma_{pq}(t_n)) \leqslant 0, \tag{3}$$

где A_{ijkl} и B_{ijkl} — компоненты тензоров податливостей, постоянные при $t_n \leqslant t < t_{n+1}$ и изменяющиеся вместе с f_n в момент $t = t_{n+1}$; $\Delta\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \varepsilon_{ij}(t_n)$. В общем случае

$A_{ijkl} \neq A_{klij}$, $B_{ijkl} \neq B_{klij}$. Области, в которых выполняются соотношения (2) и (3), назовем условно областями P и Y.

Обратимся теперь к решению упругопластической задачи. Рассмотрим статическую задачу для упрочняющегося материала. Постановка задачи следующая: пусть на момент $t = t_n$ известно основное напряженно-деформированное состояние тела, соответствующее заданным на части границы S нагрузкам $\mathbf{p}(t_n)$ и заданным на другой части S векторам смещения $\mathbf{u}(t_n)$. Далее, в моменты t $(t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1})$, происходят изменения усилий и векторов смещения, которые в момент $t = t_{n+1}$ достигают значений $\mathbf{p}(t_{n+1})$, $\mathbf{u}(t_{n+1})$. Требуется определить приращение напряженно-деформированного состояния, отвечающее приращениям нагрузок $\Delta\mathbf{p}(t_{n+1}) = \mathbf{p}(t_{n+1}) - \mathbf{p}(t_n)$ и векторов смещения $\Delta\mathbf{u}(t_{n+1}) = \mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)$.

После решения этой задачи основное напряженно-деформированное состояние суммируется с полученным приращением, имеем новое основное состояние, ситуация, таким образом, повторяется. Следует заметить, что переход из состояния $\mathbf{p}(t_n)$, $\mathbf{u}(t_n)$ в состояние $\mathbf{p}(t_{n+1})$, $\mathbf{u}(t_{n+1})$ происходит в каждой точке поверхности тела в какой-то Δ-трубке, т. е. может, вообще говоря, иметь некоторые колебания, что связано с техническими возможностями нагружающих систем. Интуитивно ясно, что на шаге $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ эти колебания не должны вносить существенных поправок в приращение напряженно-деформированного состояния тела, так как в противном случае становится проблематичным решать какие-то задачи. Данный факт должен быть отражен в решении исходной задачи через определяющие соотношения среды.

Рассмотрим формальное доказательство теоремы единственности в случае применения соотношений (2), (3). Отметим, что оно в основных чертах совпадает с доказательством [5–7], где исследовалась единственность решения упругопластической задачи в случае применения теории пластического течения.

Итак, пусть получены два решения упругопластической задачи: $\Delta\sigma^1_{ij}$, Δu^1_i и $\Delta\sigma^2_{ij}$, Δu^2_i, удовлетворяющие одним и тем же краевым условиям. Проверим, возможно ли такое положение, чтобы $\Delta\sigma^1_{ij} \neq \Delta\sigma^2_{ij}$, $\Delta u^1_i \neq u^2_i$ в рамках (2), (3). Представим область деформирования V суммой четырех областей: $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$. Исходное напряженно-деформированное состояние в обоих случаях одинаковое. Пусть в области V_1 по обоим ? решениям имеет место активная догрузка, в области V_2 по первому решению происходит приращение пластической деформации, а по второму — приращение только упругой деформации, в области V_3 по первому решению происходит упругая разгрузка, а по второму — активное догружение, в области V_4 приращения деформаций по обоим решениям упругие. Составим разность — решение, которое обозначим $\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma^1_{ij} - \Delta\sigma^2_{ij}$, $\Delta u_i = \Delta u^1_i - \Delta u^2_i$. Для него имеем

$$0 = \int\limits_S \Delta\sigma_{ij} n_j \Delta u_i \, dS = \int\limits_V \Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}\, dV \quad (\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon^1_{ij} - \Delta\varepsilon^2_{ij}). \tag{4}$$

Представляя объемный интеграл в виде суммы четырех интегралов по областям V_1, V_2, V_3, V_4, получим

$$\int\limits_V \Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}\, dV = \int\limits_{V_1} (\Delta\sigma^{1P}_{ij} - \Delta\sigma^{2P}_{ij})(\Delta\varepsilon^{1P}_{ij} - \Delta\varepsilon^{2P}_{ij})\, dV + \int\limits_{V_2} (\Delta\sigma^{1P}_{ij} - \Delta\sigma^{2Y}_{ij})(\Delta\varepsilon^{1P}_{ij} - \Delta\varepsilon^{2Y}_{ij})\, dV +$$
$$+ \int\limits_{V_3} (\Delta\sigma^{1Y}_{ij} - \Delta\sigma^{2P}_{ij})(\Delta\varepsilon^{1Y}_{ij} - \Delta\varepsilon^{2P}_{ij})\, dV + \int\limits_{V_4} (\Delta\sigma^{1Y}_{ij} - \Delta\sigma^{2Y}_{ij})(\Delta\varepsilon^{1Y}_{ij} - \Delta\varepsilon^{2Y}_{ij})\, dV. \tag{5}$$

Индексы P и Y в выражениях $\Delta\sigma^1_{ij}$, $\Delta\sigma^2_{ij}$ и $\Delta\varepsilon^1_{ij}$, $\Delta\varepsilon^2_{ij}$ означают, в какую область направлена догрузка. Так как $\Delta\varepsilon^{1P}_{ij} = A_{ijkl}\Delta\sigma^{1P}_{kl}$, $\Delta\varepsilon^{2P}_{ij} = A_{ijkl}\Delta\sigma^{2P}_{kl}$, то $\Delta\varepsilon^{1P}_{ij} - \Delta\varepsilon^{2P}_{ij} = A_{ijkl}(\Delta\sigma^{1P}_{kl} - \Delta\sigma^{2P}_{kl})$. Точно так же $\Delta\varepsilon^{1Y}_{ij} - \Delta\varepsilon^{2Y}_{ij} = B_{ijkl}(\Delta\sigma^{1Y}_{kl} - \Delta\sigma^{2Y}_{kl})$.

Исследуем (5). Для единственности решения достаточно показать положительность подынтегральных функций в каждом из представленных интегралов. Для положительности подынтегральных функций в первом и последнем интегралах необходимо и достаточно, чтобы тензоры $A_{(ijkl)}$, $B_{(ijkl)}$ были положительно определенными. Здесь $A_{ijkl} = A_{(ijkl)} + A_{[ijkl]}$; $B_{ijkl} = B_{(ijkl)} + B_{[ijkl]}$; $A_{(ijkl)}$, $B_{(ijkl)}$ и $A_{[ijkl]}$, $B_{[ijkl]}$ — симметрические и кососимметрические части тензоров A_{ijkl}, B_{ijkl}.

Используя представление $\Delta\varepsilon_{ij}^P = (A_{ijkl}-B_{ijkl})\Delta\sigma_{kl}^P+B_{ijkl}\Delta\sigma_{kl}^P$, преобразуем (5) к виду

$$\int\limits_V \Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}dV = \int\limits_V \Delta\tau_{ij}B_{ijkl}\Delta\tau_{kl}dV + \int\limits_{V_1} \Delta\tau_{ij}(A_{ijkl} - B_{ijkl})\Delta\tau_{kl}dV +$$

$$+ \int\limits_{V_2}(\Delta\sigma_{ij}^{1P} - \Delta\sigma_{ij}^{2Y})(A_{ijkl} - B_{ijkl})\Delta\sigma_{kl}^{1P}dV + \int\limits_{V_3}(\Delta\sigma_{ij}^{2P} - \Delta\sigma_{ij}^{1Y})(A_{ijkl} - B_{ijkl})\Delta\sigma_{ij}^{2P}dV, \tag{6}$$

где $\Delta\tau_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{1P}-\Delta\sigma_{ij}^{2P}$ в объеме V_1; $\Delta\tau_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{1P}-\Delta\sigma_{ij}^{2Y}$ в объеме V_2; $\Delta\tau_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{1Y}-\Delta\sigma_{ij}^{2P}$ в объеме V_3; $\Delta\tau_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{1Y} - \Delta\sigma_{ij}^{2Y}$ в объеме V_4.

Рассмотрим (6). Для положительности подынтегральной функции во втором интеграле (6) справа необходимо, чтобы тензор $A_{(ijkl)} - B_{(ijkl)}$ был положительно определен. Чтобы исследовать подынтегральные функции в третьем и четвертом интегралах (6), введем векторное представление тензоров. В связи с этим дадим некоторые пояснения. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_6$ — ортонормированный тензорный базис [8, 9]. Чтобы ввести понятие такого базиса, необходимо определить скалярное произведение двух тензоров. Для двух тензоров, например тензоров напряжений и деформаций, скалярное произведение находится по формуле $(T_\sigma, T_\varepsilon) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, введенной в [8]. Отсюда становится ясным, как определить понятия ортогональности и ортонормированности. Для двух тензоров, например T_σ и T_ε, можно ввести понятия их длин и угла между ними. При этом справедлива формула

$$\cos\alpha = \frac{(T_\sigma, T_\varepsilon)}{|T_\sigma|\,|T_\varepsilon|}, \tag{7}$$

где α — угол между T_σ и T_ε. Используя представление (7), обратимся к исследованию знака подынтегральных функций в третьем и четвертом интегралах. Изобразим в данном евклидовом тензорном пространстве плоскость $f_n = 0$, тензоры $T_{\Delta\sigma}^Y$, $T_{\Delta\sigma}^P$ и тензор приращений пластических деформаций (рис. 1): $T_{\Delta\varepsilon_P} = (A_{ijkl} - B_{ijkl}) \cdot\cdot T_{\Delta\sigma}^P$.

Введем единичные тензоры $\tilde{n}$ и $\tilde{t}$, направленные по нормали и по касательной к плоскости $f_n = 0$. Пусть тензор $T_{\Delta\varepsilon_P}$ имеет в направлении $\tilde{t}$ ненулевую проекцию. Нас ин-

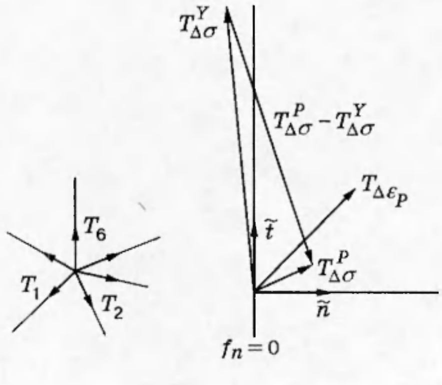

Рис. 1

тересует, возможна ли ситуация, когда угол между тензорами $T_{\Delta\varepsilon_P}$ и $T^P_{\Delta\sigma} - T^Y_{\Delta\sigma}$ будет тупым, или, что то же самое, подынтегральные функции в указанных интегральных будут отрицательными (рис. 1). Из рис. 1 видно, что скалярное произведение тензоров $T_{\Delta\varepsilon_P}$ и $T^P_{\Delta\sigma} - T^Y_{\Delta\sigma}$ будет положительным тогда и только тогда, когда тензор $T_{\Delta\varepsilon_P}$ направлен по нормали к поверхности $f_n = 0$, т. е. должно иметь место равенство $(T_{\Delta\varepsilon_P}, \tilde{t}) = 0$, следовательно, получаем теорию пластического течения. Здесь для приращений пластических деформаций выделяется ортогональный собственный базис, совпадающий с базисом $\tilde{n}$, $\tilde{t}$, поэтому

$$A_{[ijkl]} - B_{[ijkl]} = 0. \tag{8}$$

Далее, тензор B_{ijkl} симметричен ($B_{[ijkl]} = 0$), что связано с энергетическими соображениями в упругости, отсюда с использованием (8) получим $A_{[ijkl]} = 0$.

Таким образом, рассматривая единственность решения упругопластической задачи в малом, приходим к тем же самым ограничениям на допустимые формы соотношений пластичности, которые были предложены Клюшниковым [3]. При указанных ограничениях все подынтегральные функции в (6) положительны. Для того чтобы выражение справа было нулевым, необходимо и достаточно, чтобы все $\Delta\tau_{ij}$ были равны нулю. Это означает, что объемы V_2 и V_3 должны быть нулевые.Таким образом, теорема единственности в малом для упрочняющегося тела рассмотрена.

Замечание 1. Применение деформационной теории пластичности, записанной в приращениях, приведет к неединственным решениям упругопластической задачи, так как в направлении тензора $\tilde{t}$ имеется разрыв тензора приращения деформации. Деформационную теорию пластичности можно использовать для решения упругопластических задач, если она записана в полных напряжениях и деформациях.

Замечание 2. Соотношения (2), (3) справедливы, если пути догружения, соединяющие две близкие точки в пространстве напряжений или деформаций, не пересекают плоскость $f_n = 0$, т. е. они имеют вид, представленный на рис. 2.

Если пути догружения в интервале изменения параметра нагружения от $t = t_n$ до $t = t_{n+1}$ пересекают плоскость $f_n = 0$, как на рис. 3 (пересечений может быть несколько), то для определения приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}(t_{n+1})$ получим выражения

$$\Delta\varepsilon_{ij}(t_{n+1}) = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} d\Delta\varepsilon_{ij}(t) = \Delta\varepsilon_{ij}(t)\Big|_{t_n}^{t_*} + \Delta\varepsilon_{ij}(t)\Big|_{t_*}^{t_{n+1}}, \quad t_n < t_* < t_{n+1}.$$

Очевидно, что в этом случае вместо (2), (3) имеем соотношения между приращениями деформаций и напряжений, в которые войдут величины разрывов приращений деформаций или приращений напряжений при переходе через границу, разделяющую области P и Y.

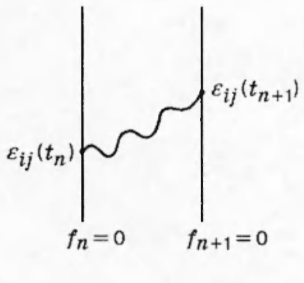

Рис. 2

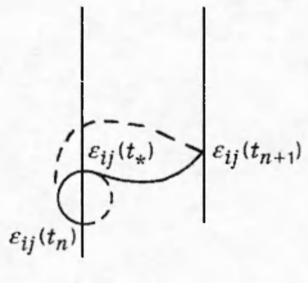

Рис. 3

Число разрывов определяется колебаниями нагрузок $\mathbf{p}(t)$ или смещений $\mathbf{u}(t)$ вокруг заданных программ нагружения. Это обстоятельство также является источником неединственности решения краевых задач. Чтобы соотношения между приращениями напряжений и деформаций не зависели от пути догружения, соединяющего две бесконечно близкие точки в пространстве напряжений или деформаций, необходимо и достаточно, чтобы они непрерывным образом переходили из соотношений в одной области догружения в соотношения другой области догружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кнетс И. В.** Основные современные направления в математической теории пластичности. Рига: Зинатне, 1971.
2. **Вакуленко А. А.** Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1991. Т. 22. С. 3–54.
3. **Клюшников В. Д.** Теория пластичности: современное состояние и перспективы // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 103–116.
4. **Васин Р. А.** Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1990. Т. 21. С. 3–75.
5. **Koiter W. T.** General theorems for elastic-plastic solids // Progress in Solid Mechanics. Amsterdam, 1960. V. 1. P. 165–221.
6. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
7. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
8. **Новожилов В. В.** О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // ПММ. 1963. Т. 27, вып. 5. С. 794–799.
9. **Рыхлевский Я.** О законе Гука // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 420–435.

Поступила в редакцию 22/II 1996 г.,
в окончательном варианте — 5/V 1996 г.