УДК 532.5

# ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ ЦИЛИНДРА, ПЕРЕСЕКАЮЩЕГО ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Представлены результаты численного решения линейной задачи о высокочастотных колебаниях горизонтального цилиндра, плавающего на границе раздела двухслойной жидкости, методом граничных элементов. Выполнены расчеты присоединенных масс для кругового и эллиптического цилиндров.

Ключевые слова: присоединенные массы, двухслойная жидкость, функция Грина, метод гибридных конечных элементов.

**Введение.** При движении тела в невязкой жидкости ее инерционные свойства определяются присоединенными массами. Для тел различной формы, движущихся в однородной жидкости, эти характеристики хорошо изучены и представлены в работе [1]. Наличие плотностной стратификации влияет на величины присоединенных масс, и наиболее полно это влияние изучено для жидкости, состоящей из двух слоев разной плотности. При этом предполагалось, что плавающее или погруженное тело полностью расположено в одном из слоев. Проведенное недавно исследование плоской задачи о гидродинамической качке тела, пересекающего границу раздела [2], выявило существенные трудности использования при ее численном решении метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), который наиболее часто применяется при определении гидродинамических нагрузок на тело.

В данной работе численное решение получено с помощью альтернативного метода гибридных конечных элементов (МГКЭ), являющегося достаточно эффективным и универсальным при решении как плоских, так и пространственных задач гидродинамической теории качки.

**Постановка задачи.** Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость, состоящая из двух слоев разной плотности. Обе жидкости в горизонтальном направлении считаются неограниченными, а в вертикальном верхний слой ограничен свободной поверхностью, нижний — ровным горизонтальным дном.

Исследуется радиационная задача о движениях в первоначально покоящейся жидкости, вызванных малыми колебаниями тела с высокой частотой. Это равносильно предположению о "невесомости" жидкости, когда ускорения, сообщаемые частицам жидкости при колебаниях тела, значительно превышают ускорение свободного падения. Данное предположение широко используется в теории удара [1].

Колеблющееся тело представляет собой горизонтальный цилиндр бесконечной протяженности, поэтому рассматриваемая задача является плоской.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы "Ведущие научные школы" Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-15-96162).

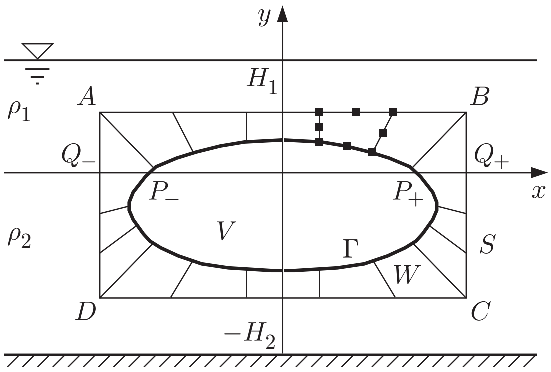


Рис. 1. Схема течения и конечные элементы

В отсутствие тела верхний слой жидкости плотности $\rho_1$ и толщины $H_1$ занимает область $L^{(1)}$ ($|x| < \infty$, $0 < y < H_1$), а нижний слой плотности $\rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon)$ и толщины $H_2$ — область $L^{(2)}$ ($|x| < \infty$, $-H_2 < y < 0$), где $x$ — горизонтальная, $y$ — вертикальная координаты. Индексы 1, 2 соответствуют верхнему и нижнему слоям. Погруженное тело, пересекающее границу раздела, занимает область $V = V^{(1)} \cup V^{(2)}$. Замкнутый контур тела $\Gamma = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$ имеет с границей раздела две общие точки $P_\pm$ (рис. 1).

Для определения радиационных потенциалов $\varphi_j^{(s)}(x, y)$, соответствующих горизонтальным ($j = 1$), вертикальным ($j = 2$) и крутильным ($j = 3$) колебаниям, необходимо решить следующую краевую задачу (подробнее см., например, [2]):

$$\Delta\varphi_j^{(s)} = 0, \qquad (x, y) \in L^{(s)} \setminus V^{(s)} \quad (s = 1, 2)$$

с граничными условиями

$$\varphi_j^{(1)} = 0 \qquad (y = H_1); \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_j^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_j^{(2)}}{\partial y}, \qquad \rho_1\varphi_j^{(1)} = \rho_2\varphi_j^{(2)} \qquad (y = 0); \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi_j^{(2)}}{\partial y} = 0 \qquad (y = -H_2); \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi_j^{(s)}}{\partial n} = n_j, \qquad (x, y) \in \Gamma^{(s)}. \tag{4}$$

В (4) $n_1$ — горизонтальная компонента внутренней нормали к контуру $\Gamma$; $n_2$ — вертикальная компонента;

$$n_3 = (y - y_0)n_1 - (x - x_0)n_2 \tag{5}$$

($x_0$, $y_0$ — координаты точки, относительно которой совершаются крутильные колебания тела). Вдали от тела следует потребовать затухания движения.

Коэффициенты присоединенных масс $\mu_{kj}$, характеризующие инерционные свойства жидкости, определяются следующим образом:

$$\mu_{kj} = \sum_{l=1}^{2} \rho_l \int\limits_{\Gamma^{(l)}} \varphi_j^{(l)} n_k \, ds. \tag{6}$$

**Численный метод.** При решении сформулированной выше задачи для произвольного контура Г используется МГКЭ, который ранее применялся при решении радиационной задачи для цилиндра, полностью погруженного в нижний слой двухслойной жидкости [3]. В этом методе потенциалы скоростей представляются с помощью конечных элементов в узкой области $W = W^{(1)} \cup W^{(2)}$, окружающей тело, и с помощью ГИУ во внешней области. Область $W$ ограничена извне прямоугольным контуром $ABCD$, внутри которого расположено данное тело (рис. 1). Прямоугольный контур обозначим $S = S^{(1)} \cup S^{(2)}$. Он пересекает границу раздела в двух точках $Q_{\pm}$.

При построении ГИУ необходимо определить функцию Грина $G^{(s,l)}(x, y; \xi, \eta)$ рассматриваемой задачи, где $s$ — номер слоя, содержащего точку наблюдения $(x, y)$; источник $(\xi, \eta)$ помещен в слое с номером $l$.

Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{x,y} G^{(s,l)} = 2\pi\delta(x - \xi, y - \eta)$$

с граничными условиями, аналогичными (1)–(3), и условием затухания в дальнем поле; $\delta$ — дельта-функция Дирака.

Функцию Грина можно определить разными способами. В данной работе предлагаются следующие представления:

$$G^{(1,1)} = \ln\frac{r}{r_1} + \int\limits_0^\infty \frac{1 + \varepsilon - t_2}{1 + \mathrm{e}^{-2kH_1}}\,[\mathrm{e}^{k(\eta - 2H_1)} - \mathrm{e}^{-k\eta}][\mathrm{e}^{-ky} - \mathrm{e}^{k(y - 2H_1)}]\,D(k, x, \xi)\,dk,$$

$$G^{(2,1)} = 2\int\limits_0^\infty \frac{[\mathrm{e}^{k(\eta - 2H_1)} - \mathrm{e}^{-k\eta}][\mathrm{e}^{ky} + \mathrm{e}^{-k(y + 2H_2)}]}{(1 + \mathrm{e}^{-2kH_1})(1 + \mathrm{e}^{-2kH_2})}\,D(k, x, \xi)\,dk,$$

$$G^{(1,2)} = 2(1 + \varepsilon)\int\limits_0^\infty \frac{[\mathrm{e}^{-k(\eta + 2H_2)} + \mathrm{e}^{k\eta}][\mathrm{e}^{k(y - 2H_1)} - \mathrm{e}^{-ky}]}{(1 + \mathrm{e}^{-2kH_1})(1 + \mathrm{e}^{-2kH_2})}\,D(k, x, \xi)\,dk,$$

$$G^{(2,2)} = \ln\frac{r}{r_2} + \int\limits_0^\infty \frac{D(k, x, \xi)\,dk}{1 + \mathrm{e}^{-2kH_2}}\,\{\mathrm{e}^{-k(\eta + H_2)}(\mathrm{e}^{2k\eta} - 1)\, \times$$

$$\times\,[(1 + \varepsilon + t_1)\mathrm{e}^{-k(y + H_2)} - (1 + \varepsilon - t_1)\mathrm{e}^{k(y - H_2)}] - 2t_1\mathrm{e}^{k\eta}[\mathrm{e}^{ky} + \mathrm{e}^{-k(y + 2H_2)}]\},$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \qquad r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta - 2H_1)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}, \qquad t_1 = \operatorname{th} kH_1, \qquad t_2 = \operatorname{th} kH_2,$$

$$D(k, x, \xi) = \cos k(x - \xi)/[k(1 + \varepsilon + t_1 t_2)].$$

Для безграничной двухслойной жидкости ($H_1, H_2 \to \infty$) функция Грина имеет простой вид [2]

$$G^{(1,1)} = \ln r + e_1 \ln r_2, \qquad G^{(2,1)} = (1 - e_1)\ln r,$$

$$G^{(1,2)} = (1 + e_1)\ln r, \qquad G^{(2,2)} = \ln r - e_1 \ln r_2, \qquad e_1 = \varepsilon/(2 + \varepsilon).$$

Вывод системы ГИУ аналогичен приведенному в работе [4]. Для рассматриваемой задачи эта система принимает вид

$$\rho_m \varphi_j^{(m)}(\zeta) = \frac{1}{\alpha} \sum_{l=1}^{2} \rho_l \int\limits_{S^{(l)}} \left[ \varphi_j^{(l)}(z) \, \frac{\partial G^{(l,m)}(z,\zeta)}{\partial n_z} - G^{(l,m)}(z,\zeta) \, \frac{\partial \varphi_j^{(l)}}{\partial n} \right] ds \quad (m = 1,2),$$
$$z = x + iy, \qquad \zeta = \xi + i\eta. \tag{7}$$

При обходе контура $W$ против часовой стрелки $\alpha = 3\pi/2$ для угловых точек $A, B, C, D$ и $\alpha = \pi$ для всех остальных точек.

При использовании МГКЭ область $W$ покрывается четырехугольными элементами (рис. 1). При этом отрезки $Q_+B$ и $Q_-A$ разбиваются на NY1 равных частей, отрезки $CQ_+$ и $DQ_-$ — на NY2 частей, а отрезки $AB$ и $DC$ — на NX частей; отрезки $P_+Q_+$ и $Q_-P_-$ являются границами элементов.

Используя теорему Грина, получим

$$\sum_{l=1}^{2} \left[ \iint\limits_{W^{(l)}} \nabla \varphi_j^{(l)} \, \nabla \psi \, dx \, dy - \int\limits_{S^{(l)}} \frac{\partial \varphi_j^{(l)}}{\partial n} \, \psi \, ds \right] = \sum_{l=1}^{2} \int\limits_{\Gamma^{(l)}} \frac{\partial \varphi_j^{(l)}}{\partial n} \, \psi \, ds, \tag{8}$$

где $\psi(x,y)$ — произвольно выбранная весовая функция. Для каждого элемента вводятся восьмиточечные квадратичные изопараметрические функции формы $N_k$ $(k = 1, \ldots, 8)$. Производные $\partial \varphi_j^{(l)}/\partial n$ в правой части уравнения (8) известны из граничного условия (4), в левой части определяются из системы ГИУ (7) на $S$. С использованием аналога функций формы $N_k$ для одномерного случая из (7) находится в матричной форме связь между векторами $\mathbf{\Phi}_j$ с компонентами $\varphi_j^{(l)}$ и $\mathbf{\Psi}_j$ с компонентами $\partial \varphi_j^{(l)}/\partial n$ в узлах контура $S$

$$A\mathbf{\Phi}_j = B\mathbf{\Psi}_j,$$

где $A$, $B$ — квадратные матрицы размерности $2M$; $M = 2(\mathrm{NY1}+\mathrm{NY2}+\mathrm{NX})$ — количество элементов в области $W$. Из этого соотношения можно найти

$$\mathbf{\Psi}_j = C\mathbf{\Phi}_j, \qquad C = B^{-1}A$$

и использовать эту зависимость в соответствующей дискретной форме (8), взяв в качестве $\psi$ функции $N_k$.

В итоге для каждого значения $j = 1, 2, 3$ следует решить систему линейных уравнений порядка $5M$ для определения значений $\varphi_j^{(l)}$ во всех узловых точках. Преимуществом МГКЭ является то, что интегрирование по контуру тела, форма которого может быть достаточно сложной, заменяется в (7) интегрированием по границе прямоугольника, которое можно выполнить аналитически. Гидродинамическая нагрузка определяется после вычисления интегралов в (6).

**Результаты расчетов.** Численные расчеты проведены для эллиптического контура

$$x^2/a^2 + (y+h)^2/b^2 = 1,$$

где $a$, $b$ — большая и малая полуоси эллипса соответственно; $h$ — глубина погружения его центра, отсчитываемая от поверхности раздела. Во всех приведенных расчетах ширина прямоугольного контура $S$ равна $2a + 0{,}4b$, высота $2{,}4b$.

Известно, что для контура, симметричного относительно вертикальной оси $y$, отличными от нуля являются только коэффициенты присоединенной массы $\mu_{jj}$ $(j = 1, 2, 3)$ и $\mu_{13}$. Безразмерные значения этих коэффициентов нормированы следующим образом:

$$(M_{11}, M_{22}) = (\mu_{11}, \mu_{22})/(\pi\rho_2 b^2), \qquad M_{33} = \mu_{33}/(\pi\rho_2 b^4), \qquad M_{13} = \mu_{13}/(\pi\rho_2 b^3).$$

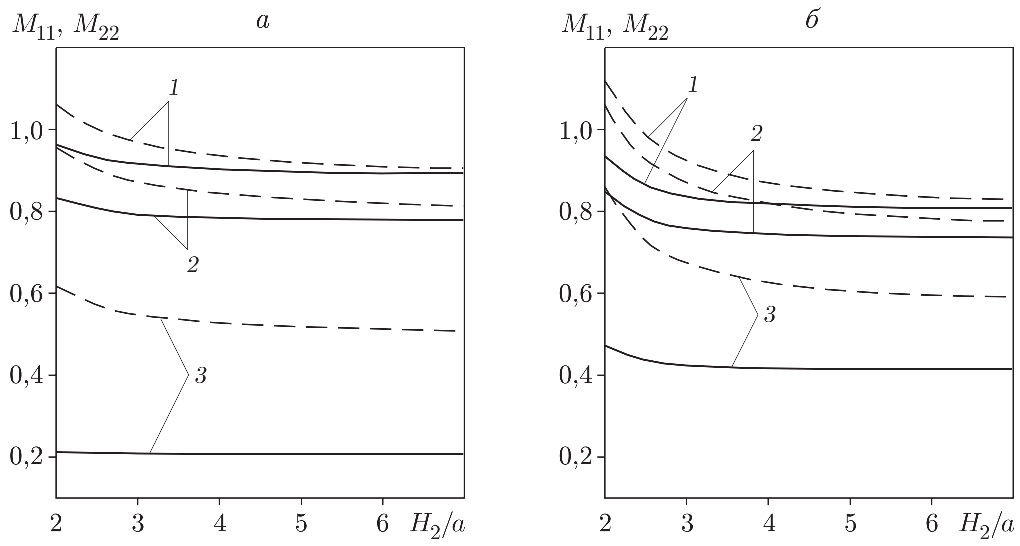


Рис. 2. Зависимость присоединенных масс $M_{11}$ (сплошные кривые) и $M_{22}$ (штриховые) от глубины нижнего слоя для кругового цилиндра:
*а* — $h = 0$, $H_1/a = 2$; *б* — $h/a = 0{,}5$, $H_1/a = 1$; *1* — $\varepsilon = 0$, *2* — $\varepsilon = 0{,}3$, *3* — $\varepsilon = \infty$

| $\varepsilon$ | $h/b = 0{,}5$ | | | | $h = 0$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $M_{11}$ | $M_{22}$ | $M_{33}$ | $M_{13}$ | $M_{11}$ | $M_{22}$ | $M_{33}$ | $M_{13}$ |
| $\infty$ | 0,386 | 2,236 | 0,631 | 0,373 | 0,203 | 2,001 | 0,562 | 0,318 |
| 0,3 | 0,898 | 3,617 | 1,021 | 0,072 | 0,875 | 3,537 | 0,994 | 0,073 |
| 0 | 1,000 | 3,999 | 1,123 | 0 | 1,000 | 3,999 | 1,123 | 0 |

На рис. 2 показаны зависимости коэффициентов $M_{11}$ и $M_{22}$ для кругового цилиндра ($a = b$) от глубины нижнего слоя $H_2$. При $h = 0$ в численном решении использованы значения NX = 6, NY1 = 3, NY2 = 3 (число элементов $M = 24$), при $h = 0{,}5b$ — значения NX = 7, NY1 = 2, NY2 = 5 ($M = 28$). В отсутствие стратификации ($\varepsilon = 0$) задача сводится к определению присоединенных масс полностью погруженного цилиндра. Эта задача достаточно подробно изучена (см., например, [1]). Известно, что при $H_2 \to \infty$ $M_{11} = M_{22}$. При $\varepsilon \to \infty$ исходная задача соответствует определению присоединенных масс тела, плавающего на свободной поверхности однородной жидкости. Случай вертикальных колебаний полукруга, плавающего на поверхности жидкости конечной глубины, рассмотрен в [5]. Сопоставление табличных значений для $M_{22}$, приведенных в [5], с результатами предлагаемого метода показало их соответствие с точностью до 0,5 %.

Предельные значения $M_{11}$ и $M_{22}$ при $H_1, H_2 \to \infty$ для рассматриваемых глубин погружения кругового цилиндра и значений скачка плотности $\varepsilon$ приведены в [2].

Расчеты для эллиптического контура ($a/b = 2$) представлены на рис. 3 при $h = 0$, $H_1 = 2b$ и на рис. 4 при $h = 0{,}5b$, $H_1 = b$. Крутильные колебания совершаются относительно геометрического центра эллипса, т. е. в (5) $x_0 = 0$, $y_0 = -h$.

В численных расчетах при $h = 0$ полагалось NX = 12, NY1 = 3, NY2 = 3 ($M = 36$), при $h = 0{,}5b$ — NX = 14, NY1 = 2, NY2 = 5 ($M = 42$). Предельные значения коэффициентов присоединенных масс при $H_1, H_2 \to \infty$ для данного эллиптического контура приведены в таблице.

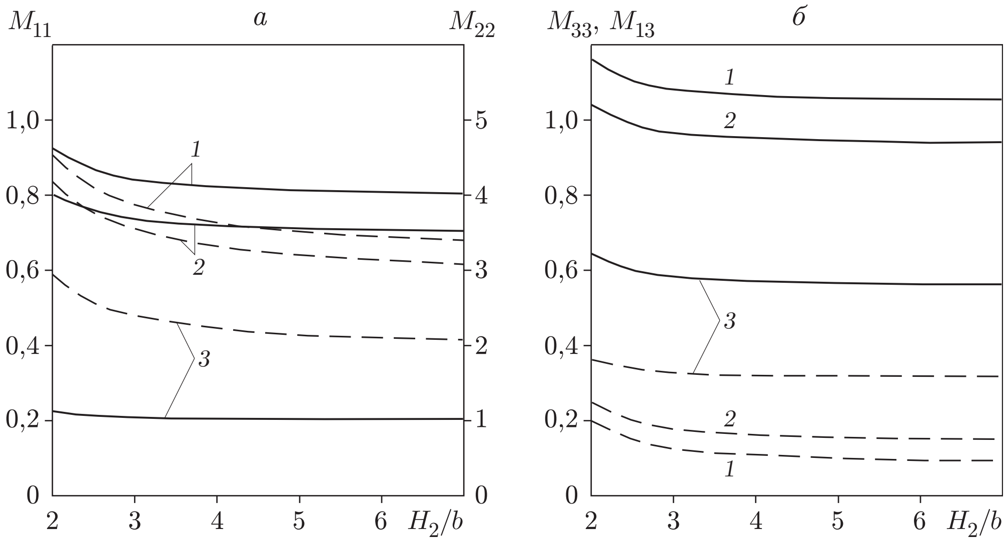


Рис. 3. Зависимость присоединенных масс от глубины нижнего слоя для эллиптического цилиндра при $a/b = 2$, $h = 0$, $H_1/b = 2$:
сплошные кривые — $M_{11}$, $M_{33}$; штриховые — $M_{22}$, $M_{13}$; *1* — $\varepsilon = 0$, *2* — $\varepsilon = 0{,}3$, *3* — $\varepsilon = \infty$

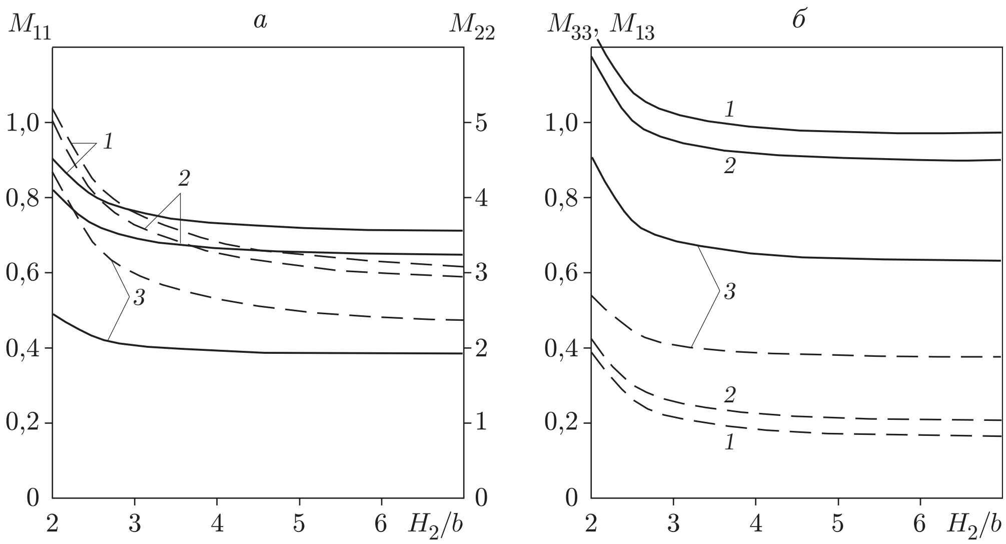


Рис. 4. Зависимость присоединенных масс от глубины нижнего слоя для эллиптического цилиндра при $a/b = 2$, $h/b = 0{,}5$, $H_1/b = 1$ (обозначения те же, что на рис. 3)

Известно, что для полуэллипса, плавающего на свободной поверхности однородной жидкости бесконечной глубины [6],

$$\mu_{11} = 2\rho_2 b^2/\pi, \quad \mu_{22} = \pi\rho_2 a^2/2, \quad \mu_{33} = \pi\rho_2(a^2 - b^2)^2/16, \quad \mu_{13} = \rho_2 b(a^2 - b^2)/3.$$

Тогда при заданном удлинении эллипса ($a/b = 2$) получаем следующие значения для присоединенных масс:

$$M_{11} \approx 0{,}203, \qquad M_{22} = 2, \qquad M_{33} \approx 0{,}563, \qquad M_{13} \approx 0{,}318,$$

которые не более чем на 0,2 % отличаются от значений соответствующих коэффициентов, приведенных в таблице при $h = 0$ и $\varepsilon = \infty$. Такая же погрешность имеет место при $\varepsilon = 0$, что соответствует колебаниям эллипса в безграничной однородной жидкости. В этом случае отличными от нуля являются только диагональные коэффициенты

$$\mu_{11} = \pi\rho_1 b^2, \qquad \mu_{22} = \pi\rho_1 a^2, \qquad \mu_{33} = \pi\rho_1(a^2 - b^2)^2/8,$$

следовательно, для данного эллипса $M_{11} = 1$, $M_{22} = 4$, $M_{33} = 1{,}125$.

Представленные результаты показывают, что влияние конечных толщин слоев является существенным. В [1] отмечено, что при колебаниях тела, плавающего на свободной поверхности однородной жидкости конечной глубины $H$, влияние дна практически отсутствует при $H \geqslant 4T$ ($T$ — осадка тела). В рассматриваемой двухслойной жидкости влияние конечных размеров слоев несущественно, если аналогичное условие выполняется как в верхнем, так и в нижнем слое. Уменьшение плотности верхнего слоя, т. е. увеличение $\varepsilon$, приводит к уменьшению диагональных коэффициентов присоединенных масс $M_{jj}$ ($j = 1, 2, 3$) и увеличению коэффициента $M_{13}$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Короткин А. И.** Присоединенные массы судна: Справ. Л.: Судостроение, 1986.
2. **Мотыгин О. В., Стурова И. В.** Волновые движения в двухслойной жидкости, вызванные малыми колебаниями цилиндра, пересекающего границу раздела // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 4. С. 105–119.
3. **Стурова И. В.** Плоская задача о гидродинамической качке погруженного тела без хода в двухслойной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 3. С. 144–155.
4. **Klimenko A. V.** The two-dimensional Neumann — Kelvin problem for an interface-intersecting body in a two-layer fluid // Day on diffraction: Proc. of the Intern. seminar, St. Petersburg, June 1–3, 1999. St. Petersburg: S. n., 1999. P. 103–112.
5. **Bai K. J.** The added mass of two-dimensional cylinders heaving in water of finite depth // J. Fluid Mech. 1977. V. 81, pt 1. P. 85–105.
6. **Хаскинд М. Д.** Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 10/XII 2002 г.*