

Функция  $H(u, v)$  табулирована М. С. Хантушем [5]. Поэтому решение задачи для малых значений времени  $t$  имеет вид

$$h_1 = h_2 = h_0, \quad h_4(r, t) = h_0 - \frac{Q}{4\pi T_4} H(u, v) \quad (3.5)$$

Полученное решение указывает на важность учета упругого режима фильтрации как в основных водоносных горизонтах, так и в слабопроницаемой прослойке. Подпитывание через слабопроницаемый слой при учете упругого режима фильтрации в нем значительно уменьшает понижение уровня в пласте, из которого производится откачка, так как передача напоров от одного горизонта к другому происходит с запаздыванием во времени. Отсюда следует, что если откачка из скважины производится с целью выявления взаимодействия пластов и определения гидрогеологических параметров, то время откачки должно быть не меньше того, которое получается по оценке (3.1).

Например, положив  $k_1 = 0.1$  м/сутки,  $k_3 = 10^{-4}$  м/сутки,  $\langle m_1 \rangle = 100$  м,  $m_3 = 10$  м,  $\mu_1 = 0.1$ ,  $\mu_3 = 10^{-4}$ , по оценкам (3.1) получаем, что снижения напоров можно ожидать не раньше, чем через сутки непрерывной работы скважины.

Поступила 12 IX 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. Ч а р н ы й И. А. Фильтрация в пласте с непроницаемой кровлей и подошвой, разделенном слабопроницаемой перемычкой. Тр. Моск. нефт. ин-та, 1966, т. 33.
3. Б е г м а т о в В., Р ы б а к о в а С. Т. К взаимодействию водоносных пластов, разделенных слабопроницаемыми пластами. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
4. Б о ч е в е р Ф. М., Г а р м о н о в И. В., Л е б е д е в А. В., Ш е с т а к о в В. М. Основы гидрогеологических расчетов. Изд. «Недра», 1965.
5. Х а н т у ш М. С. Новое в теории перетекания. Сб. «Вопросы гидрогеологических расчетов». Изд. «Мир», 1964.
6. Ш е с т а к о в В. М. О влиянии упругого режима фильтрации в отдельных слоях на взаимодействие водоносных горизонтов. Изв. высш. учебн. завед. Геология и разведка, 1963, № 10.

#### РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

В. А. Исякаев (Башкирская АССР, г. Октябрьский)

Основные задачи фильтрации жидкости при достаточно сложных граничных условиях часто решаются разностными методами [1]. В этом случае при малом шаге сетки приходится иметь дело с системой большого числа алгебраических уравнений, количество которых может доходить до  $10^{10}$ . При обычных методах решения систем (итераций, исключения неизвестных и т. д.) приходится находить все решения, что при большом количестве неизвестных и, как правило, медленной сходимости методов решения представляет большие трудности.

В задаче притока жидкости к опробователю пластов на кабеле достаточно знать значение давления в точках, расположенных в непосредственной близости к поверхности стока. Поэтому для решения данной задачи применен метод статистических испытаний (Монте-Карло), широко используемый для решения плоских задач фильтрации [2].

#### Обозначения

$p$ — давление;	$m$ — коэффициент пористости;
$t$ — время;	$k$ — проницаемость пористой среды;
$\kappa$ — коэффициент пьезопроводности;	$W$ — число шагов блуждающей частицы;
$H$ — мощность пласта;	$\mu$ — абсолютная вязкость жидкости;
$D$ — диаметр скважины;	$D(\xi)$ — статистическая оценка дисперсии;
$d$ — диаметр стока опробователя;	$m_k$ — число попаданий в сток на 100 испытаний;
$F$ — площадь стока;	$m_0$ — число попаданий в сток на 1000 испытаний;
$\beta$ — коэффициент сжимаемости жидкости;	$\varepsilon$ — абсолютная ошибка;
$\beta^\circ$ — коэффициент сжимаемости пористой среды;	$\delta$ — относительная ошибка.
$\beta^*$ — приведенный коэффициент сжимаемости;	

Обозначим через  $N$  — число испытаний; через  $N_i$  — число попаданий блуждающей частицы в сток;  $n_v$  — среднее число попаданий блуждающей частицы в сток из исходных точек, расположенных на элементарных площадях стока  $F_v$  ( $v = 1, 2, 3, 4$ ); через  $\omega$  — случайное число.

1. Рассмотрим реальную геометрию нестационарного притока жидкости к опробователю пластов на каротажном кабеле и в пласте ограниченной мощности и бесконечном по простиранию (фиг. 1):

распределение давления в однородном изотропном упругом пласте при фильтрации однородной жидкости [3]

$$\nabla^2 p = \frac{\partial p}{\kappa \partial t}, \quad \kappa = \frac{k}{\mu (m\beta + \beta^0)}, \quad \tau = \kappa t, \quad \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial \tau} \tag{1.1}$$

условие непроницаемости кровли и подошвы пласта на границе  $ab$  и  $ef$

$$\partial p / \partial z = 0 \quad \text{при } z = \pm 1/2 H, \quad 1/4 D^2 \leq x^2 + y^2 < \infty$$

условие непроницаемости глинистой корки стенки скважины диаметром  $D$  и герметизирующего элемента прибора

$$\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 = 1/4 D^2, \quad z^2 + y^2 \geq 1/4 d^2$$

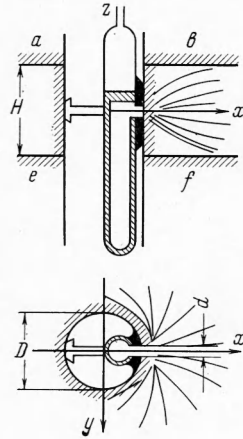
начальное условие

$$p(x, y, z, t)|_{t=0} = p^0 \quad \text{при } x^2 + y^2 \geq 1/4 D^2$$

давление в баллоне после начала действия стока

$$p = p_0(t) \quad \text{при } t > 0,$$

$$x^2 + y^2 = 1/4 D^2, \quad z^2 + y^2 < 1/4 d^2, \quad x > 0$$



Фиг. 1

расход жидкости через поверхность стока опробователя пластов [4]

$$q(t) = \int_F \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dn}(t) dF, \quad \frac{k}{\mu} = \kappa (m\beta + \beta^0) = \kappa \beta^* \tag{1.2}$$

Заменим дифференциальное уравнение разностным для прямоугольной сетки

$$\begin{aligned} \nabla^2 p \frac{\partial p}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \\ \frac{p(x, y, z, \tau + h_\tau)}{h_\tau} = \frac{p(x + h_x, y, z, \tau) - 2p(x, y, z, \tau) + p(x - h_x, y, z, \tau)}{h_x^2} + \\ + \frac{p(x, y + h_y, z, \tau) - 2p(x, y, z, \tau) + p(x, y - h_y, z, \tau)}{h_y^2} + \\ + \frac{p(x, y, z + h_z, \tau) - 2p(x, y, z, \tau) + p(x, y, z - h_z, \tau)}{h_z^2} \end{aligned}$$

Обозначим  $p(x, y, z, \tau) = p$  и выберем равномерную сетку  $h_x = h_y = h_z = h$

$$\begin{aligned} p(\tau + h_\tau) = \left(1 - \frac{6h_\tau}{h^2}\right) p + p(x+h) \frac{h_\tau}{h^2} + p(x-h) \frac{h_\tau}{h^2} + p(y+h) \frac{h_\tau}{h^2} + \\ + p(y-h) \frac{h_\tau}{h^2} + p(z+h) \frac{h_\tau}{h^2} + p(z-h) \frac{h_\tau}{h^2} \end{aligned}$$

Обозначим  $h_\tau / h^2 = \alpha$ , тогда

$$\begin{aligned} p(\tau + h_\tau) = (1 - 6\alpha) p + \alpha [p(x+h) + p(x-h) + p(y+h) + \\ + p(y-h) + p(z+h) + p(z-h)] \end{aligned}$$

Выбирается соотношение между масштабом времени и шагом решетки так, чтобы  $1 - 6\alpha = 0$ , отсюда  $\alpha = h_\tau / h^2 = 1/6$ ,  $h_\tau = 1/6 h^2$

$$\begin{aligned} p(\tau + h_\tau) = 1/6 [p(x+h) + p(x-h) + p(y+h) + \\ + p(y-h) + p(z+h) + p(z-h)] \end{aligned}$$

Таким образом, решение можно реализовать как случайный процесс с вероятностью  $1/6$ .

Плоскость  $z = \pm 1/2 H, \quad 1/4 D^2 \leq x^2 + y^2 < \infty$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{p(z) - p(z-h)}{h} = 0$$

Цилиндрическая поверхность скважины  $x^2 + y^2 = 1/4 D^2$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{p(x) - p(x-h)}{h} = 0, \quad \frac{p(y) - p(y-h)}{h} = 0$$

исключая часть поверхности  $y^2 + z^2 = 1/4 d^2, x = 0$ , где  $p(x, y, z, \tau) = p_0(\tau)$ .

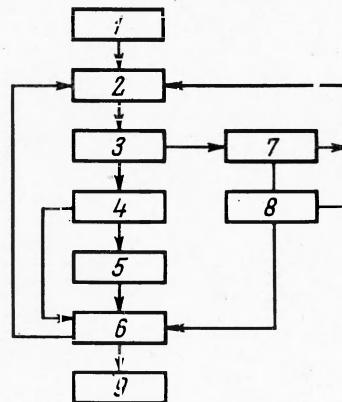
Начальная точка

$$p(\tau = 0) = p^0 \text{ при } x^2 + y^2 = 1/4 D^2.$$

Здесь  $p(z) = p(z-h)$  — отражение от границ пласта,  $p(x) = p(x-h), p(y) = p(y-h)$  — отражение от поверхности скважины.

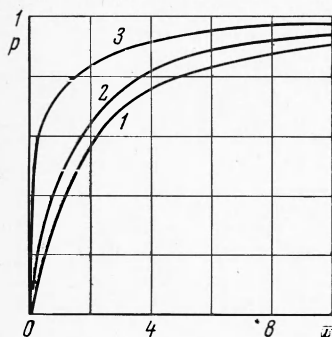
2. Для отыскания значения давления в какой-либо точке по указанному методу необходимо произвести из этой точки достаточно много блужданий и найти значение математического ожидания «штрафа», которое и будет приближенным значением решения системы в данной точке [5]. Блуждания и сбор «штрафа» выполняются по следующим правилам. В каждом узле производится розыгрыш, в результате которого в соответствии с заданной вероятностью определяется узел, в который должна перейти блуждающая частица. Если же в результате розыгрыша в особом узле, расположенном на поверхности стока, с заданным значением давления произошло событие — остановка в нем, то фиксируется «штраф», и блуждание начинается снова из исходного узла. Если в процессе блуждания частица проходит через особые узлы, расположенные на границе пласта и на поверхности скважины, происходит отражение блуждающей точки. Если блуждающая частица, совершив  $N$  шагов, не попала в сток, то также начисляется «штраф». Величина «штрафа» в первом случае равна давлению в опробователе, а во втором — пластовому давлению. Проведя этот процесс достаточно много раз и разделив суммарный «штраф» на общее количество блужданий, получим приближенное значение решения в том узле, из которого начинались все блуждания

$$P_i(\tau) = \frac{N_1}{N} p_0(\tau) + \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) p^0 \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Блок-схема реализации решения по описанному алгоритму представлена на фиг. 2, где оператор 1 вводит программу, исходные данные; оператор 2 выдает случайное число  $\omega$ , определяет одно из шести возможных направлений и совершает также блуждание частицы по соответствующей пространственной координате; оператор 3 проверяет попадание частицы на граничную область и совершает отражение; оператор 4 проверяет попадание точки в сток; оператор 5 начисляет штраф — давление в баллоне опробователя; оператор 6 контролирует число испытаний; оператор 7 прибавляет шаги по времени и контролирует параметр  $\tau$ ; оператор 8 фиксирует непопадание частицы в сток и начисляет штраф — пластовое давление; оператор 9 вычисляет математическое ожидание «штрафа» по формуле (2.1).



Фиг. 3

По описанным алгоритмам составлена стандартная программа для ЭВМ М-20 и проведены следующие расчеты.

1) Распределение давления по оси  $x$ , по образующей скважины и по периметру в плоскости  $xy$  (фиг. 3). Расчеты проводились при  $H = 200$  см,

$$D = 20 \text{ см}, \tau = 200 \text{ см}^2, h = 0.5 \text{ см}, N = 1000, p_0(\tau) = 0, p^0 = 1.$$

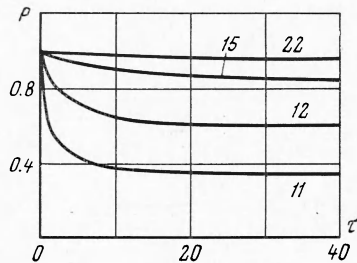
Результаты показывают сравнительно пологое распределение давления по оси  $x$  (1), более крутое — по образующей скважины 2 и наиболее крутое — по периметру скважины 3.

2) Для точек, расположенных на оси  $x$ , приводим давление  $p$  в зависимости от времени

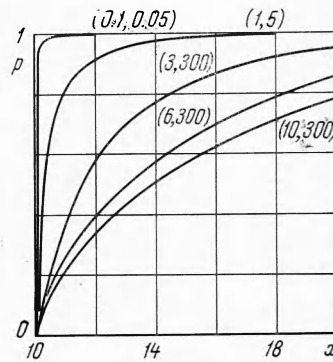
$\tau=3$	6	9	12	15	18	21	$(x=11)$
$p=0.44$	0.39	0.38	0.37	0.36	0.35	0.35	
$\tau=5$	10	15	20	25	30	35	$(x=12)$
$p=0.67$	0.63	0.61	0.60	0.59	0.59	0.59	
$\tau=20$	40	60	80	100	120	140	$(x=15)$
$p=0.86$	0.84	0.83	0.82	0.81	0.81	0.80	
$\tau=50$	100	150	200	250	300	350	$(x=22)$
$p=0.97$	0.96	0.95	0.94	0.94	0.94	0.94	

По этим данным построена фиг. 4. Расчеты показали, что для близлежащих точек  $x = 11$ ,  $x = 12$  давления вышли на свои асимптотики при  $\tau = 30 \text{ см}^2$ .

3) Распределение давления по оси  $x$  было сосчитано для различных пар значений  $(d, \tau)$ , указанных на кривых при тех же остальных параметрах (фиг. 5). Расчеты показывают, что увеличение диаметра стока опробователя приводит к увеличению глубины депрессионной воронки.



Фиг. 4



Фиг. 5

3. В выражение расхода жидкости через поверхность стока опробователя (1.2) входит градиент давления по нормали к поверхности стока. Эта величина при вычислении расхода жидкости определялась приближенно как отношение давления в какой-либо точке на расстоянии от точки до поверхности стока. Давление в точке вычислялось согласно описанным алгоритмам по формуле (2.1). Поскольку предполагалось влияние геометрии фильтрации на расход жидкости, было выбрано 13 точек на расстоянии 0.3 см от поверхности стока, расположение которых представлено на фиг. 6, по которым вычислялись средние значения градиента для всех четырех элементарных площадей стока. Затем рассчитывался расход жидкости через поверхность стока как сумма расходов через элементарные площади.

Процесс расчета расхода жидкости был автоматизирован и вычисления велись следующим образом. Градиент давления вычислялся приближенно

$$\frac{dp}{dn}(\tau) \approx 3.33 [p_i(\tau) - p_0(\tau)] \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 13) \quad (3.1)$$

Расход жидкости через поверхность стока для каждого промежутка времени

$$q_j(\tau) = 3.33\alpha\beta^* \left\{ [p_1(\tau) - p_0(\tau)] F_1 + \left[ \frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 p_i(\tau) - p_0(\tau) \right] F_2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{4} \sum_{i=6}^9 p_i(\tau) - p_0(\tau) \right] F_3 + \left[ \frac{1}{4} \sum_{i=10}^{13} p_i(\tau) - p_0(\tau) \right] F_4 \right\} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, 11) \quad (3.2)$$

$$F = 2.25 \pi, \quad F_1 = 0.0625 \pi, \quad F_2 = 0.1875 \pi, \quad F_3 = 0.75 \pi, \quad F_4 = 1.25 \pi$$

Среднее значение градиента давления на каждый из площадей, согласно выражениям (2.1) и (3.1), при  $p_0(\tau) = 0$

$$p_1(\tau) = \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) p^0, \quad \frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 p_i(\tau) = \left(1 - \frac{1}{4N} \sum_{i=2}^5 N_i\right) p^0$$

$$\frac{1}{4} \sum_{i=6}^9 p_i(\tau) = \left(1 - \frac{1}{4N} \sum_{i=6}^9 N_i\right) p^0, \quad \frac{1}{4} \sum_{i=10}^{13} p_i(\tau) = \left(1 - \frac{1}{4N} \sum_{i=10}^{13} N_i\right) p^0$$

где для упрощения обозначим

$$n_1 = N_1, \quad n_2 = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 N_i, \quad n_3 = \frac{1}{4} \sum_{i=6}^9 N_i, \quad n_4 = \frac{1}{4} \sum_{i=10}^{13} N_i \quad (3.3)$$

Удобнее оперировать не математическим ожиданием «штрафа» (2.1), а числом попаданий в сток (3.3), тогда уравнение (3.2) с учетом площадей  $F_v$  ( $v = 1, 2, 3, 4$ ) после некоторых преобразований переписется так:

$$q_j(\tau) = 0.05083 \pi \kappa \beta^* \{36 p^0 - p^0/N [n_1 + 3n_2 + 12n_3 + 20n_4]\} \quad (3.4)$$

Ниже приводятся результаты вычислений по формуле (3.4).

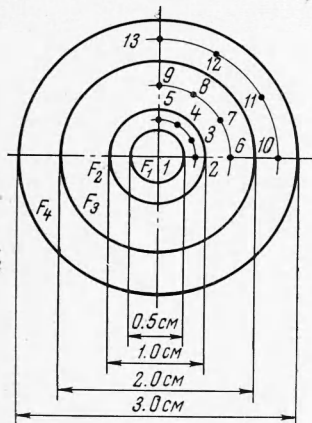
1) Влияние диаметра скважины. Расчет расхода жидкости проводился для диаметра скважины 20 и 60 см при  $\kappa = 10^5 \text{ см}^2/\text{сек}$ ,  $H = 200 \text{ см}$ ,  $d = 3 \text{ см}$ ,  $\beta^* = 3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\kappa\Gamma$ ,  $p^0 = 1 \kappa\Gamma/\text{см}^2$ ,  $p_0(\tau) = 0$ ,  $N = 1000$ ,  $h = 0.1 \text{ см}$  (таблица).

Результаты вычислений показывают, что расход жидкости практически не зависит от диаметра скважины (разница находится в пределах погрешности вычислений), что по-видимому, обусловлено отсутствием связи между кривизной скважины и градиентом давления.

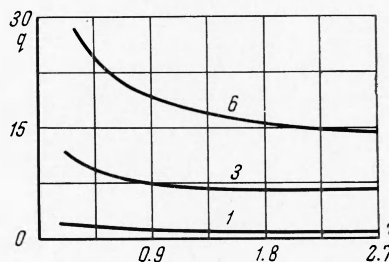
2) Влияние мощности пласта  $H$ . Расход жидкости был рассчитан для значений мощности пласта 10, 20, 40, 80, 200 см при тех же значениях других параметров. Оказалось, что мощность пласта практически не влияет на приток к опробователю пластов. Расход жидкости  $q = 6.612 \text{ см}^3/\text{сек}$  при  $\tau = 2 \text{ см}^2$ , т. е. постоянен (разница за пределом точности метода). Отсутствие зависимости от мощности пласта прежде всего объясняется слабым распространением депрессионной воронки по мощности пласта вдоль образующей скважины (фиг. 3), поэтому мощность будет влиять на расход жидкости только в тех случаях, когда она соразмерна с диаметром стока.

3) Зависимость расхода жидкости от диаметра стока. Приведем значения расхода жидкости, вычисленные для трех значений диаметра стока 1, 3, 6 см при тех же значениях других параметров (фиг. 7).

$\tau, \text{ см}^2$	$q_j(\tau), \text{ см}^3/\text{сек}$	
	$D=20$	$D=60$
0.01	26.75	26.75
0.2	11.59	11.59
0.4	9.33	9.33
0.6	8.33	8.33
0.8	7.79	7.79
1.0	7.43	7.43
1.2	7.17	7.17
1.4	6.96	6.96
1.6	6.82	6.82
1.8	6.69	6.69
2.0	6.61	6.61



Фиг. 6



Фиг. 7

$\tau=0.2$	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	( $d=1$ )
$q=1.82$	1.67	1.60	1.56	1.54	1.51	1.50	1.50	1.48	1.47	
$\tau=0.2$	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	( $d=3$ )
$q=11.59$	9.33	8.33	7.79	7.43	7.17	6.96	6.82	6.69	6.64	
$\tau=0.3$	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0	( $d=6$ )
$q=28.17$	21.73	19.11	17.50	16.54	15.75	15.11	14.55	14.34	14.18	

Результаты показывают, что зависимость расхода жидкости от диаметра стока близка к линейной и расход выходит на свою асимптотику тем быстрее, чем меньше диаметр стока.

4. Ошибки данного метода при вычислении градиента давления вытекают из двух основных источников — аппроксимации дифференциального уравнения разностным и метода статистических испытаний.

1) Погрешность аппроксимации дифференциального уравнения (1.1) разностным по оценке [6], аналогичной принципу Рунге-Кутты, равна

$$|R| \leq h^2 ({}^{1/12} M_2 - {}^{1/4} M_1) \quad (4.1)$$

В оценку погрешности входят производные четвертого и второго порядков. Ввиду того что неизвестно аналитическое выражение функции, а известны лишь значения в точках, рассчитанные методом статистических испытаний, эти производные можно получить только приближенно по найденным значениям решения в узлах заменой производных разностными отношениями. Замена производных четвертого порядка разностными отношениями приведет к большой ошибке и не отразит истинной погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным, поэтому применен следующий прием. В одной и той же точке рассчитано давление с шагом  $h$  и  $2h$  (0.706, 0.743). Таким образом, известно значение функции в точке с оценкой погрешности

$$|R_1| \leq h^2 ({}^{1/12} M_2 - {}^{1/4} M_1), \quad |R_2| \leq (2h)^2 ({}^{1/12} M_2 - {}^{1/4} M_1)$$

Рассматривая максимальную погрешность при шаге  $h = 0.5$  см, получаем

$${}^{1/12} M_2 - {}^{1/4} M_1 = 0.037$$

Подставляя данное значение в уравнение (4.1), получаем погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным  $|R| \leq 0.0093$ . Относительная ошибка определения градиента давления на поверхности составит  $\delta \leq 1.3\%$ .

2) Оценка точности метода статистических испытаний с вероятностью  $\sim 0.9$  дается выражением

$$\varepsilon = 1.64 \sqrt{0.1D(\xi)}, \quad D(\xi) = \frac{(\xi_1 - \xi^0)^2 + (\xi_2 - \xi^0)^2 + \dots + (\xi_{10} - \xi^0)^2}{10 - 1} \quad (4.2)$$

$$\xi^0 = 0.001m_0, \quad \xi_k = 0.01m_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 10)$$

В процессе счета давления суммировать число попаданий на поверхность стока блуждающей частицы на каждые 100 и 1000 испытаний, затем оценена погрешность по формуле (4.2):  $\varepsilon = 0.045$ ,  $\delta = 6.4\%$ .

Таким образом, относительная погрешность вычислений не превышает 7.7%.

Поступила 8 II 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вахитов Г. Г. Решение задач подземной гидравлики методом конечных разностей. Тр. ВНИИ, Гостоптехиздат, 1957, вып. 10.
2. Швидлер М. И. Решение плоских фильтрационных задач методом Монте-Карло. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 1.
3. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 2.
4. Лейбензон Л. С. Собр. тр., т. II, Изд-во АН СССР, 1953.
5. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. Физматгиз, 1961.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. II. Физматгиз, 1960.