УДК 533.69

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ АЭРОДИНАМИКИ КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Н. Ф. Воробьев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках линейной теории решается обратная задача аэродинамики крыла — определение вида несущей поверхности по заданной нагрузке. Используется решение Вольтерра волнового уравнения. При выполнении некоторых условий, накладываемых на определяющие параметры задачи, находятся решения в классе ограниченных функций. Приведены решения обратных задач в сверхзвуковом потоке для крыльев бесконечного размаха, треугольной с полностью дозвуковыми кромками и прямоугольной форм в плане.

Задачи обтекания невязким сверхзвуковым потоком тонкого слабоизогнутого крыла конечного размаха в линейной постановке сводятся к решению волнового уравнения для потенциала скорости с данными на базовой плоскости временно ориентированного типа. Представление решения волнового уравнения в форме Вольтерра позволяет выбрать в качестве определяющего параметра на базовой плоскости либо выводящую производную — геометрию крыла (прямая задача аэродинамики), либо нагрузку на крыле (обратная задача аэродинамики) [1].

Решение обратной задачи представляется в виде потенциала

$$\Phi(x,y,z) = \frac{y}{\pi} \iint\limits_{s} \frac{\Phi'_\xi(\xi,\zeta)(x-\xi)}{[(z-\zeta)^2+y^2]\sqrt{(x-\xi)^2-[(z-\zeta)^2+y^2]}}\, ds, \tag{1}$$

где s — область зависимости точки $M(x,y,z)$ на базовой плоскости $\eta = 0$; $\Phi'_\xi(\xi,\zeta)$ — перепад давления на плоскости $\eta = 0$.

Потенциал скорости в прямой и обратной задачах записывается в виде двойных интегралов, подынтегральные выражения (ядра интегральных операторов) которых содержат особенности. При нахождении газодинамических параметров потока (производных потенциала скорости) степень подынтегральных особенностей возрастает, при этом иногда бывает невозможно проведение в рамках ограниченных функций формальных операций дифференцирования, а иногда дифференцирование приводит к появлению таких особенностей, при которых интегралы становятся расходящимися. Часто используется прием признания существования интегралов в смысле Адамара [2]. Введение такой символики вносит не только осложнение в реализацию алгоритмов решения, но и требует иногда оправдания физически абсурдных результатов. Соблюдение правил дифференцирования интегралов с переменными пределами и требование необходимой гладкости поверхности крыла позволяют получать значения газодинамических параметров потока в классе ограниченных функций [3, 4].

Исходя из представления решения обратной задачи аэродинамики крыла в виде потенциала (1), зависимость нормальной производной Φ'_y (геометрии крыла) от производной

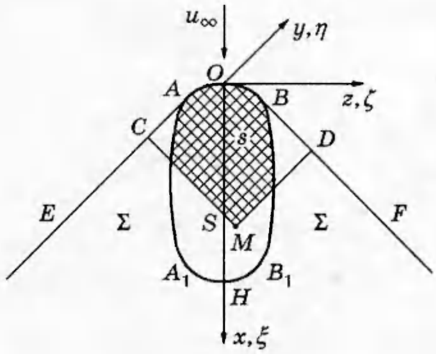


Рис. 1

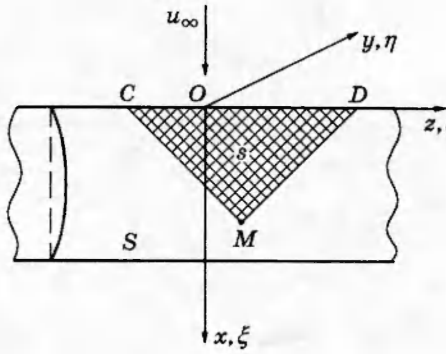


Рис. 2

Φ'_x (нагрузки на крыле) определим из формулы [1, 4]

$$\Phi'_y\Big|_{y=0} = -\Phi'_x\Big|_{y=0} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{COD}\left[\Phi'_\xi\,\frac{\sqrt{(x-\xi)^2-(z-\zeta)^2}}{(x-\xi)(z-\zeta)}\right]_{\zeta=f(\xi)} d\xi\, +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{s}\Phi''_{\xi\zeta}\,\frac{\sqrt{(x-\xi)^2-(z-\zeta)^2}}{(x-\xi)(z-\zeta)}\,d\zeta\,d\xi. \qquad (2)$$

Здесь $s(MCAOBDM)$ — область зависимости точки $M(x,0,z)$ на базовой плоскости $\eta = 0$; $\zeta = f(\xi)$ — уравнение линии COD, являющейся границей области s со стороны набегающего потока (рис. 1); $\Phi''_{\xi\zeta}$ — производная нагрузки в направлении оси ζ.

Формула (2) дает решение обратной задачи в квадратурах, если заданы определяющие параметры Φ'_ξ, $\Phi''_{\xi\zeta}$ во всей возмущенной области на плоскости $\eta = 0$. В области проекции крыла S и на ее границе L (в том числе и на участке L_0, на сверхзвуковой передней кромке AOB), согласно постановке обратной задачи, должны быть заданы $\Phi'_\xi = p(\xi,\zeta)$, $\Phi''_{\xi\zeta} = p'_\zeta(\xi,\zeta)$. В области Σ (части возмущенной области на плоскости $\eta = 0$ вне S) и на ее границе со стороны набегающего потока (на головных характеристиках AE, BF) $\Phi'_\xi = \Phi''_{\xi\zeta} = 0$. В формуле (2) интегрирование ведется только по части $s \in S$ (заштрихованная область на рис. 1), а в контурном интеграле — только по участку L_0.

Ядра интегральных операторов в (2) имеют особенности типа $\lim\limits_{\xi\to x}(1/(x-\xi))$. Для получения решения обратной задачи в классе ограниченных функций необходимо наложить следующие условия на задаваемые в области $S + L$ определяющие параметры $p(\xi,\zeta)$, $p'_\zeta(\xi,\zeta)$ [1, 4]:

1) непрерывность нагрузки $p(\xi,\zeta)$ во всей возмущенной области $S + L$; и так как в области Σ $p(\xi,\zeta) = 0$, то на дозвуковом участке передней кромки крыла L_1 (на линиях AA_1, BB_1) должно выполняться условие $p(\xi,\zeta) = 0$;

2) на задней кромке крыла (A_1HB_1) $p(\xi,\zeta) = 0$, если она дозвуковая, условия на $p(\xi,\zeta)$ не накладываются, если она сверхзвуковая;

3) непрерывность производной $p'_\zeta(\xi,\zeta)$ в области S и ее ограниченность на L.

После выполнения этих необходимых условий существования интегралов в классе ограниченных функций проблемой становится возможность представления их в элементарных функциях (интегралы должны быть приводимы к табличным), что заставляет задавать определяющий параметр задачи $p = p(\xi,\zeta)$ в наиболее простом виде.

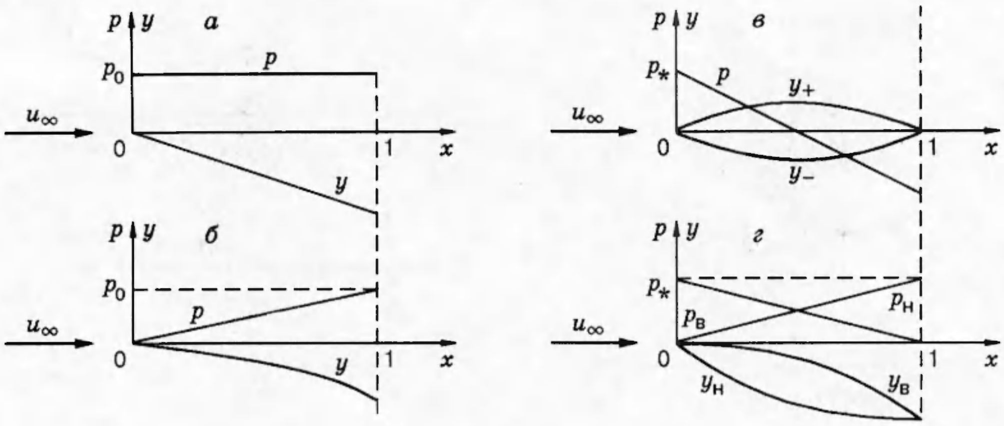


Рис. 3

Целью обратной задачи для крыла заданной формы в плане является нахождение формы поверхности крыла. Для точки $M(x, 0, z) \in S$, согласно линеаризованному условию непротекания $\Phi'_y = u_\infty \sin\alpha \approx u_\infty \operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha = \alpha(x, z)$ — угол наклона касательной к оси x в сечении $z = \mathrm{const}$), $dy/dx = \operatorname{tg}\alpha$. Производная Φ'_y определена соотношением $\Phi'_y = F(x, z)$, где $F(x, z)$ — правая часть формулы (2). Таким образом, уравнение поверхности S представляется формулой

$$y(x, z) = \frac{1}{u_\infty} \int\limits_{x_0}^{x} F(\xi, z)\, d\xi. \qquad (3)$$

Здесь $x_0 = f^-(z)$ — координата передней кромки крыла в сечении $z = \mathrm{const}$.

Приведем несколько примеров решения обратной задачи в виде (2) для крыльев простой формы в плане.

1. В качестве тестового рассмотрим решение для крыла бесконечного в направлении оси z размаха (рис. 2). В этом случае область зависимости точки M целиком лежит на проекции крыла S, где задана нагрузка $\Phi'_\xi = p(\xi)$. В формуле (2) контурный интеграл по линии COD ($\xi = 0$) исчезает, а двойной интеграл обращается в нуль в силу плоскопараллельности потока ($\Phi''_{\xi\zeta} = 0$). Остается известное для крыла бесконечного размаха соотношение

$$\Phi'_y\Big|_{y=0} = -\Phi'_x\Big|_{y=0} = -p(\xi). \qquad (4)$$

Используемое в литературе ошибочное (см. [4])* решение обратной задачи [2]

$$\Phi'_y\Big|_{y=0} = -\Phi'_x\Big|_{y=0} + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{s} \Phi'_\xi \frac{(x-\xi)}{(z-\zeta)^2\sqrt{(x-\xi)^2 - (z-\zeta)^2}}\, d\zeta\, d\xi$$

в случае крыла бесконечного размаха не переходит в имеющее место соотношение (4) — остается двойной интеграл, который предлагают понимать в смысле Адамара.

Уравнение несущей линии в соответствии с (2)–(4) имеет вид

$$y = -\frac{1}{u_\infty} \int\limits_{0}^{x} p(\xi)\, d\xi, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (5)$$

*В [4] на рисунке следует поменять местами обозначения осей (y, η), (z, ζ).

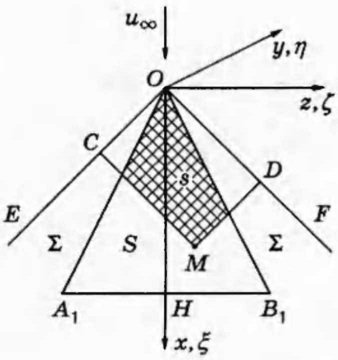


Рис. 4

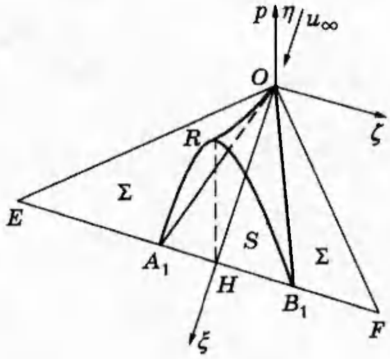


Рис. 5

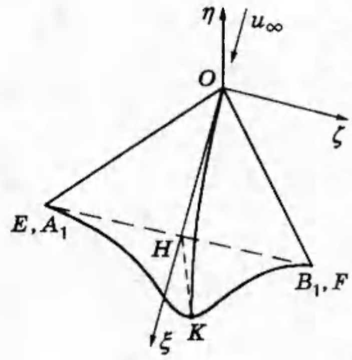


Рис. 6

На рис. 3 приведены графики несущих линий $y = y(x)$ при различных видах нагрузки, полученные согласно (5): *а* — постоянная нагрузка $p = p_0$, несущая линия — пластина $y = -(p_0/u_\infty)\,x$; *б* — линейно возрастающая нагрузка с безударным входом $p = p_0 x$, несущая линия $y = -(p_0/u_\infty)x^2/2$; *в* — нагрузка $p = p_*(1-2x)$, несущие линии — дужки, образующие параболический профиль $y = \pm(p_*/u_\infty)x(1-x)$; *г* — линейно возрастающей $p = p_* x$ и линейно убывающей $p_\text{н} = p_*(1-x)$ нагрузкам соответствуют дужки $y_\text{в} = -(p_*/u_\infty)x^2/2$, $y_\text{н} = -(p_*/u_\infty)(x - x^2/2)$, образующие замкнутый профиль, на котором перепад давлений $p_\text{н} + p_\text{в} = p_*$ постоянен по всей длине.

2. Крыло треугольной формы в плане с полностью дозвуковыми (звуковыми) кромками (рис. 4) нагружено по закону

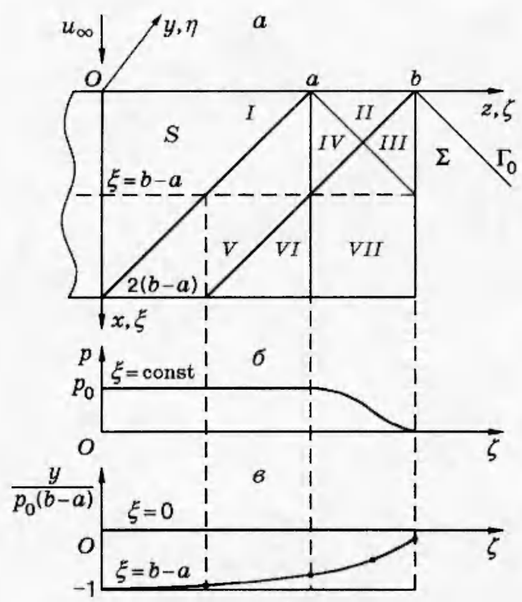
$$p = \frac{p_0}{k^2}(k^2\xi^2 - \zeta^2), \quad p'_\zeta = -\frac{2p_0}{k^2}\zeta, \quad (\xi,\zeta) \in S + L, \quad 0 < k \leqslant 1. \tag{6}$$

На рис. 5 схематично изображена поверхность $p = p(\xi,\zeta)$ (OA_1RB_1O). Область S (треугольник OA_1B_1O) — проекция крыла на базовую плоскость $\eta = 0$ — ограничена контуром L: передние кромки проекции OA_1, OB_1 $(\zeta = \mp k\xi)$, задняя кромка A_1B_1 $(\xi = \text{const})$. Для такого крыла в формуле (2) контурный интеграл отсутствует, так как на головных характеристиках OE, OF $(\zeta = \mp\xi)$, согласно постановке задачи, $p = 0$. В двойном интеграле, согласно постановке задачи, интегрирование ведется только по области S. После проведения всех необходимых процедур интегрирования в формулах (2), (3) уравнение поверхности $y = y(x,z)$ треугольного в плане крыла OA_1B_1O, нагруженного в соответствии с формулой (6), можно записать в виде

$$y = -\frac{2\,p_0}{3\,k^2}\,x^3 G(c,k), \tag{7}$$

где

$$G(c,k) = (k^2 - c^2) - \frac{1}{\pi}\left\{k\sqrt{1-c^2} - 2\,\frac{c^2}{k}\,\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c} + \right.$$
$$+\frac{(k-c)[k^2(k-c) - 2(1-k^2)c]}{2k\sqrt{1-k^2}}\,\ln\frac{\sqrt{(1-k^2)(1-c^2)} + 1 - kc}{(k-c)} +$$
$$\left.+\frac{(k+c)[k^2(k+c) + 2(1-k^2)c]}{2k\sqrt{1-k^2}}\,\ln\frac{\sqrt{(1-k^2)(1-c^2)} + 1 + kc}{(k+c)}\right\};$$
$$0 < c \leqslant k \leqslant 1;$$



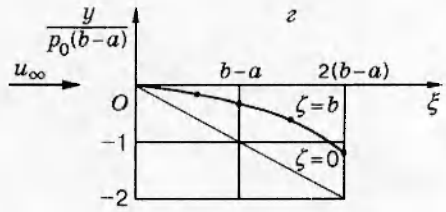


Рис. 7

$c = z/x$ — луч в базовой плоскости $y = 0$; $k = z/x$ — луч, соответствующий кромке крыла.

Уравнение боковой кромки крыла ($c = k$)

$$y = \frac{2\,p_0}{3\,k\pi}\,x^3\Big\{\sqrt{1-k^2} - 2\ln\,\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k} - \frac{2}{\sqrt{1-k^2}}\,\ln k\Big\},$$

а срединной линии ($c = 0$)

$$y = -\frac{2\,p_0}{3\,k}\,x^3\Big\{k - \frac{1}{\pi}\Big[1 + \frac{k^2}{\sqrt{1-k^2}}\,\ln\,\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}\Big]\Big\}.$$

В случае крыла со звуковыми кромками ($k = 1$) уравнение поверхности крыла (7) принимает вид

$$y = -\frac{2\,p_0}{3}\,x^3\Big\{(1-c^2) - \frac{2}{\pi}\Big[\sqrt{1-c^2} - c^2\,\ln\,\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}\Big]\Big\}.$$

При этом для передних кромок OA_1, OB_1 ($c = k = 1$) $y = 0$, а для срединной линии OK ($c = 0$, $k = 1$)

$$y = -\frac{2\,p_0}{3}\,x^3\Big(1 - \frac{2}{\pi}\Big).$$

Крыло опирается своими прямолинейными кромками OA_1, OB_1(рис. 6) на базовую плоскость $y = 0$, входит в поток, не внося передними кромками возмущений.

3. Крыло прямоугольной формы в плане (рис. 7,a) равномерно нагружено в корневой своей части, нагрузка на консольной части обеспечивает необходимую для получения решения в классе ограниченных функций степень гладкости при сопряжении нагрузок в областях S и Σ (рис. 7,$б$):

$$S\colon\quad \Phi'_\xi = p_0, \qquad \Phi''_{\xi\zeta} = 0, \qquad 0 \leqslant \zeta \leqslant a,$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi'_\xi &= \frac{p_0}{(b-a)^3}\,(b-\zeta)^2[3(\zeta-a) + (b-\zeta)] \\ \Phi''_{\xi\zeta} &= -\frac{6\,p_0}{(b-a)^3}\,(b-\zeta)(\zeta-a) \end{aligned}\right\}\ a \leqslant \zeta \leqslant b;$$

$$\Sigma: \quad \Phi'_\xi = \Phi''_{\xi\zeta} = 0, \qquad \Gamma_0: \quad \Phi'_\xi = 0.$$

Здесь Γ_0 — головная характеристическая линия (рис. 7,a).

Для крыла с хордой $2(b-a)$, где $(b-a)$ — протяженность консоли по размаху, существуют семь областей (области I–VI отделены друг от друга сплошными линиями) с различным видом аналитического решения, зависящего от геометрии крыла и распределения нагрузки на нем. Проведение необходимых для получения в аналитическом виде уравнения поверхности крыла процедур интегрирования сингулярных интегралов, согласно формулам (2), (3), представляет трудоемкую работу, требующую особого внимания к сингулярностям операторов. Полученные уравнения поверхности крыла в областях I–VII позволяют выявить характерные особенности геометрии крыла, но из-за их громоздкости они здесь не приводятся.

На рис. 7,*в,г* показано поведение поверхности крыла в характерных сечениях. Передняя кромка ($\xi = 0$) остается прямолинейной и на консольном ($a \leqslant \zeta \leqslant b$) участке крыла. В сечении $\xi = b - a$ крыло «подстраивается» к задаваемому на консоли распределению давления, начиная от места пересечения с характеристикой, исходящей из точки ($\xi = 0$, $\zeta = a$). Корневое сечение ($\zeta = 0$), где давление постоянно ($p = p_0$) и не сказывается влияние консольной части крыла, — прямая линия (в области I поверхность крыла — пластина). На торце ($\zeta = b$) крыло как бы вписывается в набегающий поток, не внося возмущений угловой точкой ($\xi = 0$, $\zeta = b$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воробьев Н. Ф.** Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. Новосибирск: Наука, 1985.
2. **Общая** теория аэродинамики больших скоростей / Под ред. У. Р. Сирса. М.: Воениздат, 1962.
3. **Воробьев Н. Ф.** Об одном точном решении задачи о концевом эффекте крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке // ПМТФ. 1992. Т. 33, № 1. С. 65–71.
4. **Воробьев Н. Ф.** Особенности решений задач аэродинамики крыла конечного размаха // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 3. С. 55–66.

Поступила в редакцию 30/IX 1996 г.