ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 5

УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СТОКСА

С. Д. Алгазин

Институт проблем управления РАН,
117806 Москва

Рассматривается внешняя задача для линеаризованных стационарных уравнений Навье — Стокса (уравнений Стокса) при обтекании тела вращения с малыми числами Рейнольдса. Относительно направления вектора скорости в невозмущенном потоке не делается никаких предположений. Таким образом, в общем случае задача трехмерна. В результате численного исследования этих уравнений установлена их плохая обусловленность. Предложен численный алгоритм решения плохо обусловленных уравнений Стокса, который не имеет насыщения, т. е. его точность тем выше, чем большим условиям гладкости удовлетворяет искомое решение.

1. Постановка задачи и выбор системы координат. В декартовых координатах (x_1, x_2, x_3) система уравнений Стокса имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v^i, \quad i = 1,2,3\,; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v^1}{\partial x_1} + \frac{\partial v^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v^3}{\partial x_3} = 0\,, \tag{1.2}$$

где Re — число Рейнольдса; (v^1, v^2, v^3) — вектор скорости; p — давление. Входящие в уравнения (1.1), (1.2) зависимые и независимые переменные обезразмерены стандартным способом. За характерные величины принимаются характерный линейный размер L_a и модуль вектора скорости потока в бесконечности v_∞, тогда, например, $p = (P - p_\infty)/(\rho v_\infty^2)$ (P — размерное давление, ρ — плотность жидкости, p_∞ — давление в невозмущенном потоке (в бесконечности)).

Таким образом, для определения параметров потока, вектора скорости (v^1, v^2, v^3) и давления p требуется найти решение системы уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$v^i\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1,2,3, \quad v^i\,|_\infty = v^i_\infty, \quad i = 1,2,3, \quad p\,|_\infty = 0.$$

Здесь Ω — рассматриваемое тело вращения вокруг оси x_3; $\partial\Omega$ — его граница; v^i_∞ $(i = 1,2,3)$ — скорость жидкости в невозмущенном потоке (в бесконечности).

Следствием уравнений (1.1), (1.2) будет соотношение

$$\Delta p = 0\,, \tag{1.3}$$

т. е. давление является гармонической функцией вне тела вращения. Это обстоятельство используется ниже.

Введем систему криволинейных координат (r, ϑ, φ), связанную с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) соотношениями [1]

$$x_1 = v(r,\vartheta)\cos\varphi, \quad x_2 = v(r,\vartheta)\sin\varphi, \quad x_3 = u(r,\vartheta). \tag{1.4}$$

Обозначим G область, получаемую меридиональным сечением тела Ω, и выберем функции u и v следующим образом. Пусть $\psi(z) = u(r,\vartheta)+iv(r,\vartheta)$, $z = r\exp(i\vartheta)$ — конформное отображение круга $|z| = r \leqslant 1$ на внешность области G, причем центр круга переходит в бесконечно удаленную точку. Удобно считать (r,ϑ,φ) сферическими координатами, тогда соотношения (1.4) задают отображение шара единичного радиуса на внешность тела Ω.

Для эллипсоида вращения вокруг оси x_3

$$\frac{x_1^2}{b^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{a^2}=1 \tag{1.5}$$

функции u и v известны в аналитическом виде [2]. Поверхность шара единичного радиуса переходит при отображении (1.4) в поверхность тела Ω. Тогда краевые условия, заданные на $\partial\Omega$, переносятся на поверхность шара, а краевые условия, заданные в бесконечности, переносятся в центр шара.

Обычно при использовании криволинейных координат уравнения для векторных величин записываются в проекциях на оси собственного базиса, координатные векторы которого направлены по касательным к координатным линиям. Этот базис зависит от координат точки пространства. В данном случае такой подход неудобен, так как отображение (1.4) теряет однозначность на оси x_3 (если $v = 0$, то φ любое). Это вызывает появление особенностей в решении, которые вызваны не существом дела, а «плохой» системой координат. Отметим, что сферическая система координат обладает аналогичным «недостатком».

Выход из этого положения следующий: оставим в качестве искомых функций проекции вектора скорости v^i $(i = 1,2,3)$ на оси декартовой системы координат, а независимые переменные x_1, x_2, x_3 заменим подстановкой (1.4) на r,ϑ,φ. Тогда получаем

$$\alpha\cos\varphi\,\frac{\partial p}{\partial r}+\beta\cos\varphi\,\frac{\partial p}{\partial\vartheta}-\frac{1}{v}\sin\varphi\,\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta V^1+f_1); \tag{1.6}$$

$$\alpha\sin\varphi\,\frac{\partial p}{\partial r}+\beta\sin\varphi\,\frac{\partial p}{\partial\vartheta}+\frac{1}{v}\cos\varphi\,\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta V^2+f_2); \tag{1.7}$$

$$\frac{rv_\vartheta}{w^2}\,\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{rv_r}{w^2}\,\frac{\partial p}{\partial\vartheta}=\frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta V^3+f_3); \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered}\alpha\cos\varphi\,\frac{\partial V^1}{\partial r}+\beta\cos\varphi\,\frac{\partial V^1}{\partial\vartheta}-\frac{1}{v}\sin\varphi\,\frac{\partial V^1}{\partial\varphi}+\alpha\sin\varphi\frac{\partial V^2}{\partial r}+\\ +\beta\sin\varphi\,\frac{\partial V^2}{\partial\vartheta}+\frac{1}{v}\cos\varphi\,\frac{\partial V^2}{\partial\varphi}+\frac{rv_\vartheta}{w^2}\,\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{rv_r}{w^2}\,\frac{\partial p}{\partial\vartheta}=f_4,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}&\alpha(r,\vartheta)=-ru_\vartheta/w^2 \quad (w^2=u_\vartheta^2+v_\vartheta^2);\\ &\beta(r,\vartheta)=(1+ru_\vartheta v_r/w^2)/v_\vartheta\,;\\ &f_i=-rv_\infty^i(1+rv_r/v)/w^2 \quad (i=1,2,3);\\ &f_4=v_\infty^1\alpha\cos\varphi+v_\infty^2\alpha\sin\varphi+v_\infty^3 rv_\vartheta/w^2;\\ &v^i=(1-r)v_\infty^i+V^i \quad (i=1,2,3).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Замена искомых функций v^i на V^i ($i = 1,2,3$) по формуле (1.10) произведена для того, чтобы сделать краевые условия для скорости однородными:

$$V^i|_{r=0} = V^i|_{r=1} = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{1.11}$$

Это требуется для более удобной дискретизации лапласиана. Для давления имеем краевое условие

$$p|_{r=0} = 0. \tag{1.12}$$

Лапласиан от функций V^i ($i = 1,2,3$) в переменных (r,ϑ,φ) принимает вид

$$\Delta V^i = \frac{r}{vw^2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big(rv\frac{\partial V^i}{\partial r}\Big)\Big) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\frac{v}{r}\frac{\partial V^i}{\partial\vartheta}\Big) + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V^i}{\partial\varphi^2}. \tag{1.13}$$

Итак, требуется решить уравнения (1.6)–(1.9) в шаре единичного радиуса с краевыми условиями (1.11), (1.12).

2. Дискретный лапласиан и дискретные уравнения Стокса. Для дискретизации лапласиана (1.13) с однородными краевыми условиями (1.11) применим методику, описанную в [3].

Таким образом, получаем дискретный лапласиан в виде h-матрицы:

$$H = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}' \Lambda_k \otimes h_k, \quad L = 2l + 1. \tag{2.1}$$

Здесь штрих означает, что слагаемое при $k = 0$ берется с коэффициентом $1/2$; знак $\otimes$ — кронекерово произведение матриц; h — матрица размера $L \times L$ с элементами

$$h_{k_{ij}} = \cos k\,\frac{2\pi(i-j)}{L} \quad (i,j = 1,2,\ldots,L);$$

Λ_k — матрица дискретного оператора, соответствующего дифференциальному оператору

$$\frac{r}{vw^2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big(rv\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big)\Big) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\frac{v}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\Big) - \frac{k^2}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}, \quad k = 0,\ldots,l \tag{2.2}$$

с краевыми условиями

$$\Phi|_{r=0} = \Phi|_{r=1} = 0. \tag{2.3}$$

Для дискретизации дифференциального оператора (2.2), (2.3) выберем по ϑ сетку, состоящую из n узлов:

$$\vartheta_\nu = \frac{\pi}{2}(y_\nu + 1), \quad y_\nu = \cos\varepsilon_\nu, \quad \varepsilon_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}, \quad \nu = 1,2,\ldots,n,$$

а также применим интерполяционную формулу

$$g(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{T_n(y)g_\nu}{n\frac{(-1)^\nu}{\sin\varepsilon_\nu}(y - y_\nu)}, \quad y = (2\vartheta - \pi)/\pi, \tag{2.4}$$

где $g_\nu = g(\vartheta_\nu)$ ($\nu = 1,2,\ldots,n$); $T_n(y) = \cos(n\arccos y)$.

Первую и вторую производные по ϑ, входящие в соотношения (2.2), получим дифференцированием интерполяционной формулы (2.4).

По r выберем сетку, состоящую из m узлов:

$$r_\nu = (1 + z_\nu)/2, \quad z_\nu = \cos\chi_\nu, \quad \chi_\nu = (2\nu - 1)\pi/(2m), \quad \nu = 1, 2, \dots, m,$$

а также применим интерполяционную формулу

$$q(r) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{T_m(z)(r-1)rq_k}{m\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{\sin\chi_\nu}(r_\nu - 1)r_\nu(z - z_\nu)}, \quad q_\nu = q(r_\nu), \quad z = 2r - 1. \tag{2.5}$$

Первую и вторую производные по r, входящие в выражение (2.2), найдем дифференцированием интерполяционной формулы (2.5). Дифференцированием интерполяционных формул (2.4), (2.5) получим значения производных по ϑ и r, входящих в левую часть уравнения неразрывности (1.9).

Для дискретизации производных от давления по r используем интерполяционную формулу

$$q(r) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{T_m(z)\, r\, q_k}{m\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{\sin\chi_\nu} r_\nu(z - z_\nu)}. \tag{2.6}$$

Величины, входящие в формулу (2.6), определены выше. Значения первой производной от давления по r, входящие в левую часть соотношений (1.6)–(1.8), получим дифференцированием интерполяционной формулы (2.6).

Для построения формулы численного дифференцирования по φ рассмотрим интерполяционную формулу

$$s(\varphi) = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{2l} D_l(\varphi - \varphi_k)s_k, \quad L = 2l + 1, \tag{2.7}$$

где

$$s_k = s(\varphi_k); \quad \varphi_k = 2\pi k/L \quad (k = 0, 1, \dots, 2l);$$

$$D_l(\varphi - \varphi_k) = 0{,}5 + \sum_{j=1}^{l} \cos j(\varphi - \varphi_k).$$

Значения производных по φ определим дифференцированием формулы (2.7).

Для получения дискретных уравнений Стокса нужно в уравнениях (1.6)–(1.9) заменить производные дискретными производными, найденными дифференцированием соответствующих интерполяционных формул (2.4)–(2.7); лапласиан заменяется на матрицу H. Вместо функций V^1, V^2, V^3 и p в дискретные уравнения Стокса войдут значения этих функций в узлах сетки $(\vartheta_\nu, r_\mu, \varphi_k)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, $\mu = 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2l$. В результате имеем систему из $4mnL$ линейных уравнений. В явном виде система дискретных уравнений не выписывается из-за ее громоздкости. Например, при $m = n = 10$, $L = 9$ порядок системы уравнений 3600.

Для исследования числа обусловленности этой системы линейных уравнений вычислялись собственные значения оператора Лапласа с однородными краевыми условиями (1.11). Для этого достаточно вычислить собственные значения матриц Λ_k, $k = 0, 1, \dots, l$ [4]. Вычислительные эксперименты показали, что собственные значения оператора Лапласа имеют две точки сгущения: 0 и $-\infty$. Таким образом, нормы матриц H и H^{-1} имеют большие значения, которые быстро растут с увеличением числа узлов сетки. В этом состоит отличие внешних задач по сравнению с внутренними.

Матрица дискретных уравнений Стокса имеет блочный вид

$$A = \begin{Vmatrix} H & 0 & 0 & P_1 \\ 0 & H & 0 & P_2 \\ 0 & 0 & H & P_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{Vmatrix},$$

где H — дискретный лапласиан; P_i $(i = 1, 2, 3)$ — матрицы, получаемые при дискретизации членов с давлением; u_i $(i = 1, 2, 3)$ — матрицы, получаемые при дискретизации уравнения неразрывности. Все эти матрицы размера $R \times R$ $(R = mnl$ — число узлов сетки). Обозначим

$$A_{n-1} = \begin{Vmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{Vmatrix}, \quad v_n = (u_1, u_2, u_3), \quad u_n = (P_1, P_2, P_3)'$$

и будем разыскивать матрицу, обратную матрице A, в виде

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \alpha_n^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Здесь P_{n-1} — матрица размера $3R \times 3R$; $q_n = (q_1, q_2, q_3)$, где q_i $(i = 1, 2, 3)$ — матрицы размера $R \times R$; $r_n = (r_1, r_2, r_3)'$, где r_i $(i = 1, 2, 3)$ — матрицы размера $R \times R$. Тогда получаем $q_n = -\alpha_n^{-1} v_n A_{n-1}^{-1}$, $P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1} u_i \alpha_n^{-1} v_n A_{n-1}^{-1}$, $r_n = -A_{n-1}^{-1} u_n \alpha_n^{-1}$ $(\alpha_n = -u_1 H^{-1} p_1 - u_2 H^{-1} p_2 - u_3 H^{-1} p_3$ — матрица размера $R \times R)$.

Таким образом, легко видеть, что из-за описанных выше свойств матриц H и H^{-1} норма матриц A и A^{-1} имеет большое значение, которое растет с увеличением числа узлов сетки, т. е. система дискретных уравнений Стокса плохо обусловлена. Это является следствием плохой обусловленности дифференциальных уравнений Стокса в неограниченной области (внешности тела вращения) и вызвано строением спектра оператора Лапласа в данной области.

Ниже будет рассмотрен приближенный метод решения плохо обусловленных дискретных уравнений Стокса, а сейчас обсудим свойства проведенной дискретизации. Классический подход к дискретизации уравнений математической физики состоит в замене производных конечными разностями. Этот подход обладает существенным недостатком: он не реагирует на гладкость решения рассматриваемой задачи математической физики, т. е. погрешность дискретизации не зависит от гладкости разыскиваемого решения. Другими словами, разностные алгоритмы приводят к численным методам с насыщением [5]. Поэтому выше для дискретизации уравнений Стокса применялась интерполяция решения многочленами (алгебраическими или тригонометрическими). Производные от искомых функций, входящие в уравнения Стокса, вычислялись дифференцированием интерполяционных формул. Данный метод дискретизации не имеет насыщения, поскольку интерполяционный многочлен приближает искомую функцию тем точнее, чем большим условиям гладкости она удовлетворяет [5]. Такое свойство алгоритма позволяет вести расчеты на достаточно редкой сетке, когда число обусловленности дискретных уравнений Стокса не очень велико.

3. Определение давления. Выше указывалось (см. (1.3)), что давление — гармоническая функция. Рассмотрим более общую задачу на собственные значения для оператора Лапласа в проколотом в центре шаре единичного радиуса:

$$\Delta p = \lambda p, \quad p|_{r=0} = 0. \tag{3.1}$$

При этом нас интересуют собственные функции краевой задачи (3.1), соответствующие нулевому собственному значению $\lambda = 0$. Замена соотношения (1.3) на более общую задачу (3.1) объясняется тем, что методы решения конечномерных задач на собственные значения хорошо разработаны [6], так же как и методы дискретизации лапласиана [3, 4].

В дискретном виде краевая задача (3.1) сводится к вычислению собственных значений h-матрицы, т. е. к решению алгебраической проблемы собственных значений:

$$H\mathbf{p} = \lambda\,\mathbf{p} \tag{3.2}$$

($\mathbf{p}$ — вектор длины nmL, компоненты которого содержат значения искомого давления в узлах сетки). Матрица H строится по формуле (2.1). Однако для численного дифференцирования по r применяется интерполяционная формула (2.6), удовлетворяющая краевому условию (см. (3.1)). Решая конечномерную задачу (3.2), определяем собственные значения, близкие к нулю. Соответствующий собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя c. Подставив найденное давление в дискретные уравнения Стокса, легко определим из уравнений движения компоненты скорости. Для этого требуется обратить h-матрицу по формуле [4]

$$H^{-1} = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}'\Lambda_k^{-1}\otimes h_k, \quad L = 2l+1$$

(эта формула проверяется непосредственным умножением) и вычислить произведение полученной матрицы на некоторые векторы. Теперь осталось подобрать константу c так, чтобы выполнялось уравнение неразрывности. Подставим в уравнение неразрывности найденные компоненты скорости и получим для определения константы c $R = mnL$ уравнений, т. е. переопределенную систему линейных уравнений, которая служит для отбраковки «лишних» решений и нахождения константы c. Для искомого решения константы c, определяемые из дискретного уравнения неразрывности, обязательно должны быть примерно равными, и за искомую константу c можно принять любую из них или среднее арифметическое всех полученных констант. Для посторонних решений константы c сильно отличаются, и такие решения должны быть отброшены.

Заметим, что вычисление собственных значений и собственных векторов h-матрицы сводится к вычислению собственных значений и собственных векторов матриц Λ_k $(k = 0, 1, \ldots, l)$ меньшего размера [4]. Таким образом, удается определить все собственные значения и собственные векторы h-матрицы размера 900×900.

4. Результаты численных экспериментов. Численные расчеты проводились для шара с $a = b = 1$ и эллипсоида вращения с $a = 1$, $b = 0{,}5$; $0{,}95$ (см. (1.5)) на сетке, состоящей из 225 узлов ($m = n = 5$, $L = 9$), 900 узлов ($m = n = 10$, $L = 9$) и 2025 узлов ($m = n = 15$, $L = 9$). В качестве граничного условия по скорости в невозмущенном потоке (в бесконечности) рассматривалось течение с параметрами $v_\infty^1 = 1$, $v_\infty^2 = v_\infty^3 = 0$. Во всех расчетах принималось $\mathrm{Re} = 0{,}01$.

Вначале обсудим результаты расчетов для шара. На сетке из 225 узлов ($m = n = 5$, $L = 9$) у матрицы Λ_0 определены два близких к нулю собственных значения: $\lambda_{24} = -0{,}3\cdot 10^{-5}$ и $\lambda_{25} = -0{,}7\cdot 10^{-18}$, остальные собственные значения имели порядок от 10^{-2} до 10^{2}. У матрицы Λ_1 определено одно собственное значение, близкое к нулю: $\lambda_{24} = -0{,}5\cdot 10^{-5}$. Остальные собственные значения порядка $10^{-2} \div 10^{3}$. Матрицы Λ_2, Λ_3, Λ_4 имеют собственные значения порядка $10^{-2} \div 10^{3}$, $10^{-1} \div 10^{4}$, $10^{-1} \div 10^{4}$ соответственно, и, следовательно, у них нет собственных значений, которые можно интерпретировать как близкие к нулю. Второй расчет проводился на сетке из 900 узлов ($m = n = 10$, $L = 9$). Матрица Λ_0 имеет два действительных собственных значения, близких к нулю: $\lambda_{99} = 0{,}2 \cdot 10^{-11}$ и $\lambda_{100} = -0{,}4 \cdot 10^{-18}$. Кроме того, имелась также комплексная пара собственных значений, близкая к нулю, с действительными частями собственных значений $\lambda_{97} = \lambda_{98} = -0{,}5 \cdot 10^{-7}$. Остальные собственные значения имели порядок $10^{-3} \div 10^{3}$. Матрица Λ_1 имеет близкое к нулю действительное собственное значение $\lambda_{100} = -0{,}2 \cdot 10^{-12}$. Кроме того, есть близкая к нулю комплексная пара с действительными частями собственных значений $\lambda_{98} = \lambda_{99} = -0{,}2 \cdot 10^{-8}$. Остальные собственные значения порядка $10^{-4} \div 10^{4}$. Собственные значения матриц Λ_2, Λ_3 и Λ_4 имели порядок $10^{-6} \div 10^{5}$, $10^{-4} \div 10^{5}$, $10^{-3} \div 10^{5}$ соответственно. Итак, проведенные расчеты показывают, что для шара единичного радиуса у h-матрицы четыре семейства собственных векторов, дающих близкие к нулю собственные значения (заметим, что собственное значение матрицы Λ_1 двухкратное [4]).

Вычисление собственных векторов h-матрицы для шара проводилось на сетке из 900 узлов ($m = n = 10$, $L = 9$). Искомые четыре семейства собственных функций задачи (3.1) для шара единичного радиуса легко угадываются. Собственные векторы h-матрицы, отвечающие близким к нулю действительным собственным значениям матрицы Λ_0, дают два семейства собственных функций, не зависящих от φ:

$$p_1 = cr \tag{4.1}$$

соответствует собственному значению λ_{100} матрицы Λ_0, а

$$p_2 = c_1 r \ln((1 - \cos\vartheta)/(1 + \cos\vartheta)) + c_2 r \tag{4.2}$$

— собственному значению λ_{99} матрицы Λ_0. Точнее говоря, одно из инвариантных подпространств оператора Лапласа (3.1), отвечающее нулевому собственному значению, имеет вид (4.2), т. е. двумерно. В расчетах получается два близких к нулю собственных значения матрицы Λ_0 размера 100×100 (λ_{100} и λ_{99}). Как уже говорилось выше, собственному значению λ_{100} соответствует собственная функция вида (4.1) (это подтверждается численными расчетами), а собственному значению λ_{99} — некоторая собственная функция из семейства (4.2).

Собственные векторы h-матрицы, отвечающие действительному близкому к нулю собственному значению λ_{100} матрицы Λ_1, дают два семейства собственных функций, зависящих от φ:

$$p_3 = c_3 r^2 \sin\vartheta \cos\varphi; \tag{4.3}$$

$$p_4 = c_4 r^2 \sin\vartheta \sin\varphi. \tag{4.4}$$

Семейство собственных функций (4.3) соответствует решению, приведенному в [7] для шара. Семейства (4.1), (4.2), (4.4) дают посторонние решения, не удовлетворяющие уравнению неразрывности (см. п. **3**).

Далее проводилось вычисление константы c_3 из уравнения неразрывности (см. п. **3**). За искомую константу принималось среднее арифметическое близких друг к другу констант, определяемых из дискретного уравнения неразрывности. Получено значение $c_3 = 144{,}09$ (собственный вектор матрицы Λ_1, отвечающий собственному значению λ_{100}, нормировался по максимуму модуля). Найденное приближенное решение сравнивалось с точным [7]. Вычисления показывают, что максимальная относительная погрешность составляет 0,26 %.

Второй расчет проводился для эллипсоида с полуосями $a = 1$, $b = 0{,}5$. На сетке из 225 узлов ($m = n = 5$, $L = 9$) получено, что у матрицы Λ_0 есть одно собственное значение, близкое к нулю: $\lambda_{25} = -0{,}3 \cdot 10^{-5}$. Остальные собственные значения были порядка $10^{-2} \div 10^2$. Собственные значения матриц Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4 имели порядок $10^{-2} \div 10^3$, $10^{-2} \div 10^4$, $10^{-1} \div 10^4$, $10^{-1} \div 10^5$. Таким образом, число узлов сетки явно недостаточно. На сетке из 900 узлов ($m = n = 10$, $L = 9$) матрица Λ_0 имеет два близких к нулю собственных значения: $\lambda_{99} = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_{100} = 0{,}2 \cdot 10^{-9}$, остальные собственные значения порядка $10^{-3} \div 10^4$. Матрица Λ_1 имеет одно собственное значение, близкое к нулю: $\lambda_{94} = 0{,}3 \cdot 10^{-5}$, остальные собственные значения порядка $10^{-3} \div 10^4$. Матрицы Λ_2, Λ_3, Λ_4 имеют собственные значения порядка $10^{-3} \div 10^5$, $10^{-3} \div 10^5$, $10^{-2} \div 10^6$.

Далее проводились расчеты на сетке из 2025 узлов ($m = n = 15$, $L = 9$). Вычислялись собственные значения матриц Λ_0 и Λ_1. Матрица Λ_0 имеет два близких к нулю собственных значения: $\lambda_{224} = -0{,}1 \cdot 10^{-9}$, $\lambda_{225} = -0{,}2 \cdot 10^{-13}$. Остальные собственные значения порядка $10^{-5} \div 10^4$. Матрица Λ_1 имеет одно собственное значение, близкое к нулю: $\lambda_{221} = -0{,}1 \cdot 10^{-8}$. Остальные собственные значения порядка $10^{-4} \div 10^5$. Таким образом, h-матрица для эллипсоида также имеет четыре семейства собственных векторов, соответствующих близким к нулю собственным значениям матриц Λ_0 и Λ_1. Нас интересует четная по φ собственная функция, отвечающая близкому к нулю собственному значению матрицы Λ_1 (возмущение соответствующей собственной функции для шара). Приближенное вычисление этой собственной функции проводилось на сетке из 900 узлов ($m = n = 10$, $L = 9$).

Результаты расчета показывают, что константы c_i ($i = 1, 2, \ldots, 900$) достаточно сильно отличаются друг от друга со средним значением 318,31. Очевидно, что 900 узлов недостаточно для нахождения этой собственной функции (напомним, что собственное значение матрицы Λ_1, отвечающее искомому собственному вектору, имеет порядок 10^{-5}, т. е. недостаточно близко к нулю). Для проверки этой гипотезы были проведены расчеты для эллипсоида с полуосями $a = 1$, $b = 0{,}95$ на сетке из 900 узлов. Вычислялись собственные значения матриц Λ_0 и Λ_1. Оказалось, что матрица Λ_0 имеет два близких к нулю собственных значения: $\lambda_{99} = 0{,}2 \cdot 10^{-11}$ и $\lambda_{100} = 0{,}1 \cdot 10^{-16}$. Кроме того, имелась близкая к нулю комплексная пара собственных значений с действительными частями собственных значений $\lambda_{97} = \lambda_{98} = -0{,}6 \cdot 10^{-7}$. Остальные собственные значения были порядка $10^{-3} \div 10^3$. Матрица Λ_1 имеет одно действительное близкое к нулю собственное значение $\lambda_{100} = 0{,}2 \cdot 10^{-12}$ и комплексную пару с действительными частями собственных значений $\lambda_{98} = \lambda_{99} = -0{,}2 \cdot 10^{-8}$. Вычисление собственного вектора проводилось для собственного значения λ_{100} матрицы Λ_1. Разброс c_i ($i = 1, 2, \ldots, 900$) составил от 147,85 до 160,57 со средним значением $c = 152{,}36$. Максимальная относительная погрешность отличия полученного решения от решения в шаре 6 %. Таким образом, для применения этого приближенного решения дискретных уравнений Стокса расчетная сетка должна быть такова, чтобы близкие к нулю собственные значения h-матрицы (3.2) были порядка 10^{-12}.

Расчеты проводились на ПЭВМ типа AT-386 с тактовой частотой 25 МГц и объемом оперативной памяти 640 килобайт. Как видно из описанных выше расчетов, для численного исследования доступны задачи об обтекании тел, близких к шару при малых числах Рейнольдса, потоком вязкой несжимаемой жидкости. Для изучения обтекания тел сложной формы необходимо использовать более мощную ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алгазин С. Д.** Дискретизация оператора Лапласа и быстрое решение уравнения Пуассона для внешности тела вращения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 6. С. 1746–1750.

2. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.

3. **Алгазин С. Д.** Дискретизация оператора Лапласа и быстрое решение уравнения Пуассона в торе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 10. С. 1661–1666.

4. **Алгазин С. Д.** О дискретизации оператора Лапласа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 3. С. 521–525.

5. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

6. **Уилкинсон Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

7. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 2.

Поступила в редакцию 14/IX 1994 г.