УДК 519.632.4

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

С. Д. Алгазин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
E-mail: algazinsd@mail.ru

Для решения задачи о свободных колебаниях пластины переменной толщины со свободными краями произвольной формы в плане разработан численный алгоритм без насыщения, который позволяет получить надежные результаты на редкой сетке. Проведено сравнение полученных результатов с результатами расчетов, выполненных в других работах.

Ключевые слова: численный алгоритм без насыщения, свободные колебания пластин, пластина переменной толщины.

Введение. В работе [1] исследовались колебания суперэллиптических пластин переменной толщины с защемленным и свободно опертым краем. (Суперэллиптические пластины — это пластины с границей, определяемой уравнением $x^{2n}/a^{2n} + y^{2n}/b^{2n} = 1$, где n — степень суперэллипса.) В [2] проведено аналитическое исследование акустических излучений от тонких круговых пластин линейно-переменной толщины. В этой работе не рассматривалось краевое условие свободного края, однако обзор работ, приведенный в [1, 2], позволяет оценить состояние исследуемого вопроса. Классической работой по теории колебаний является монография [3]. Очень часто цитируется работа [4]. Результаты, наиболее близкие к результатам настоящей работы, содержатся в [5]. Эксперименты по определению частот свободных колебаний круглых пластин со свободным краем проведены в работах [6–8], однако в них результаты экспериментов представлены в размерной форме, а константы материала не приводятся. Анализ библиографии, приведенной в [1–8], позволяет сделать вывод, что пластина переменной толщины произвольной формы в плане ранее не рассматривалась, исследовались лишь суперэллиптические (в частном случае эллиптические и круглые) и прямоугольные пластины. Настоящая работа посвящена исследованию свободных колебаний пластин переменной толщины произвольной формы в плане с одним граничным условием — свободным краем.

1. Вывод уравнения поперечных колебаний упругой изотропной пластины переменной толщины. Рассмотрим упругую изотропную пластину переменной толщины $h(x, y)$, ограниченную контуром произвольной формы и совершающую малые поперечные колебания под действием начального отклонения или внешней силы. Будем полагать, что выполняются все допущения теории малых упругих колебаний тонких пластин [9, 10]. Нейтральная поверхность разделяет растянутую и сжатую зоны изогнутой пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00207).

В качестве системы координат выбирается правовинтовая прямоугольная система координат, плоскость xy которой совмещена с нейтральной поверхностью в недеформированном состоянии, а ось z направлена вниз. Перемещения $w(x,y)$ точек нейтральной поверхности, отсчитываемые по оси z, будем называть прогибами пластины ($w_{\max} \ll h_{\min}$). В сделанных предположениях перемещение точки (x,y,z) пластины, расположенной на расстоянии z от нейтральной поверхности, равно [9, 10]

$$u = -z\,\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad v = -z\,\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad w = w(x,y).$$

Компоненты тензора деформаций в случае малых деформаций определяются по формулам

$$\varepsilon_{xx} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = 0. \qquad (1.1)$$

Компоненты тензора напряжений согласно гипотезе Кирхгоффа о плоском напряженном состоянии определяются в соответствии с законом Гука [9, 10]

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\sigma^2}\,(\varepsilon_{xx} + \sigma\varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\sigma^2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big),$$
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\sigma^2}\,(\varepsilon_{yy} + \sigma\varepsilon_{xx}) = -\frac{Ez}{1-\sigma^2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big), \qquad (1.2)$$
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{E}{1+\sigma}\,\varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{1+\sigma}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

где E — модуль упругости; σ — коэффициент Пуассона материала плиты.

Потенциальная энергия элементарного объема при упругой деформации пластины равна [9, 10]

$$dU = (1/2)(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy})\,dx\,dy\,dz,$$

или с учетом (1.2), (1.1)

$$dU = \frac{Ez^2}{2(1-\sigma^2)}\Big\{(\Delta w)^2 + 2(1-\sigma)\Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\Big)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big]\Big\}\,dx\,dy\,dz.$$

Полная потенциальная энергия пластины равна интегралу от величины dU по всему объему пластины V. Переходя от тройного интеграла к повторному и интегрируя по z от нижней поверхности пластины $z = z_1(x,y)$ до верхней поверхности $z = -z_2(x,y)$, находим полную потенциальную энергию деформированной пластины

$$U = \frac{1}{2}\iint\limits_S D\Big\{(\Delta w)^2 + 2(1-\sigma)\Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\Big)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big]\Big\}dx\,dy,$$

где $D = E[z_1^3(x,y) + z_2^3(x,y)]/[3(1-\sigma^2)]$; S — проекция области V на нейтральную поверхность.

Кинетическая энергия пластины равна

$$K = \frac{1}{2} \iint\limits_S \rho h \Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2 dx\, dy.$$

Для задачи о свободных колебаниях $U + K = \mathrm{const}$, следовательно, $\delta(U + K) = 0$, $w = \hat{w}(x, y)\, \mathrm{e}^{i\omega t}$, $(\partial w/\partial t)^2 = -\omega^2 \hat{w}(x, y)\, \mathrm{e}^{2i\omega t}$.

Искомое уравнение имеет вид

$$\delta \iint\limits_S \bigg(D\Big\{(\Delta\hat{w})^2 + 2(1-\sigma)\Big[\Big(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x\, \partial y}\Big)^2 - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2}\Big]\Big\} - \omega^2 \rho h \hat{w}^2\bigg) dS = 0. \tag{1.3}$$

Далее знак “$\wedge$” над w опускаем. Проведем обезразмеривание соотношения (1.2). Введем безразмерные величины (отмечены штрихом) по формулам

$$x = x'L, \quad y = y'L, \quad w = w'L, \quad z_1 = z_1'L, \quad z_2 = z_2'L, \quad h = h'L,$$

$$D = D' p_0 L^3, \quad \omega = \omega'\Omega, \quad \rho = \rho' p_0/(L^2\Omega^2),$$

где Ω — характерная частота, конец расчетного диапазона, с^{-1}; L — характерный линейный размер, м; P_0 — характерное давление, Н/м^2.

Соотношение (1.3) в безразмерных переменных сохраняет прежний вид. В дальнейшем штрихи у безразмерных величин опускаем.

2. Дискретизация. Вместо того чтобы варьировать соотношение (1.3) и получить сложное уравнение 4-го порядка в частных производных с граничными условиями 2-го и 3-го порядков, проведем дискретизацию квадратичного функционала (1.3) и получим задачу о стационарном значении квадратичной формы. Краевым условиям свободного края удовлетворять не нужно, так как эти краевые условия являются естественными и получаются автоматически, если приравнять к нулю вариацию функционала. Для дискретизации функционала (1.3) перейдем от произвольной области к кругу. (Заметим, что для численного построения конформного отображения имеются надежные алгоритмы (см., например, [11]).) Пусть $z = \psi(\zeta)$ $(\zeta = r\, \mathrm{e}^{i\theta})$ — конформное отображение круга $|\zeta| \leqslant 1$ на область S $(z = x + iy,\ x = u(r, \theta),\ y = v(r, \theta))$, при этом выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\, \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Пусть $\Phi(x, y) = \Phi(u(r, \theta), v(r, \theta))$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \partial^2\Phi/\partial x^2 \\ \partial^2\Phi/\partial x\, \partial y \\ \partial^2\Phi/\partial y^2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \partial^2\Phi/\partial r^2 \\ \partial^2\Phi/\partial r\, \partial\theta \\ \partial^2\Phi/\partial\theta^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{r^3|\psi'(\zeta)|^6} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где A^{-1} — матрица размером 3×3, элементы которой выражаются через первые производные $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ по r и θ; $c = (c_1, c_2, c_3)'$ — вектор-столбец, элементы которого выражаются через первые производные $\Phi(x, y) = \Phi(u(r, \theta), v(r, \theta))$ по r и θ, а также через первые и вторые производные $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ по r и θ [12].

Для дискретизации функционала (1.2) используем квадратурную формулу [13]

$$\int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} f(\zeta)\,d\sigma = \sum_{\nu,l} c_{\nu l} f_{\nu l}, \qquad f_{\nu l} = f(r_\nu\,\mathrm{e}^{i\theta_l}),$$
$$r_\nu = \cos\frac{(2\nu-1)\pi}{4m}, \qquad \nu = 1,2,\dots,m, \quad \theta_l = \frac{2\pi l}{N}, \quad l = 0,1,\dots,2n, \quad N = 2n+1, \tag{2.2}$$

которая получается при замене подынтегральной функции интерполяционной формулой для функции двух переменных в круге [14]:

$$(P_M f)(r,\theta) = \sum_{l=0}^{2n}\sum_{\nu=1}^{m} f_{\nu l} L_{\nu l}(r,\theta). \tag{2.3}$$

Здесь

$$f_{\nu l} = f(r_\nu,\theta_l), \qquad L_{vl}(r,\theta) = \frac{2T_{2m}(r)}{NT'_{2m}(r_\nu)}\Big(\frac{D_n(\theta-\theta_l)}{r-r_\nu} - \frac{D_n(\theta-\theta_l+\pi)}{r+r_\nu}\Big),$$

$$D_n(\theta) = 0{,}5 + \sum_{k=1}^{n}\cos k\theta, \qquad T_m(r) = \cos\,(m\arccos x).$$

Интерполяционная формула (2.3) обладает необходимыми свойствами: она точна на многочленах от двух переменных степени $\omega = \min\,(n, m-1)$. Обозначим множество этих многочленов через P_ω, а через E_ω обозначим наилучшее приближение функции $f \in C[D]$ (D — единичный круг) многочленом из P_ω. Тогда определен проектор P_M: $C[D] \to L^M$, $L^M = L(L_1,\dots,L_M)$ и справедливо классическое неравенство

$$|f(r,\theta) - (P_M f)(r,\theta)| \leqslant (1 + |P_M|_\infty)E_\omega(f), \tag{2.4}$$

где $|P_M|_\infty$ — норма проектора P_M ($M = mN$; $N = 2n+1$ — число узлов интерполяции в круге). Как и в одномерном случае, из неравенства (2.4) следует, что соответствующая интерполяционная формула не имеет насыщения. Норма проектора P_M удовлетворяет соотношению

$$|P_M|_\infty = O(\ln^2 M),$$

причем эту оценку можно уточнить. Сделав некоторые предположения о гладкости класса интерполируемых функций, можно оценить скорость убывания наилучшего приближения E_ω при $M \to \infty$ и получить оценки погрешности интерполяционной формулы (2.3). Пусть $f(r,\theta) = (P_M f)(r,\theta) + \rho_M(r,\theta;f)$, где $\rho_M(r,\theta;f)$ — погрешность интерполяционной формулы (2.3) (остаток). Тогда справедлива следующая

Теорема [14]**.** *Рассмотрим класс функций $H_\infty^M(K;D) \subset C(D)$, удовлетворяющих в круге D условиям*

$$\Big|\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k\,\partial y^l}\Big| \leqslant K, \qquad k + l \leqslant \mu.$$

Тогда при $f \in H_\infty^M(K;D)$ имеем неравенство

$$|\rho_M(\,\cdot\,;f)|_\infty \leqslant c_\mu K M^{-\mu/2}\log^2 M, \tag{2.5}$$

где c_μ — константа, зависящая от параметра μ.

Таким образом, из формулы (2.5) следует, что при одном и том же числе узлов интерполяции M скорость убывания погрешности интерполяционной формулы (2.3) возрастает при увеличении параметра μ, т. е. при увеличении гладкости интерполируемой функции f. Это означает, что полученная интерполяционная формула не имеет насыщения.

Используя интерполяционную формулу (2.3), можно построить квадратурную формулу для вычисления определенных интегралов, когда областью интегрирования является круг. Действительно, заменяя подынтегральную функцию выражением (2.3), получаем квадратурную формулу (2.2), где $d\sigma$ — элемент площади, $\delta(f)$ — погрешность, $c_{\nu l}$ — весовые коэффициенты, не зависящие от параметра l:

$$c_{\nu l} = \int\limits_D L_{\nu l}(r,\theta)\,d\sigma.$$

Рассмотрим блочно-диагональную матрицу $C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, где c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) — диагональные матрицы размером $N \times N$ с одинаковыми числами на диагонали. Для погрешности квадратурной формулы имеем следующую оценку: $|\delta(f)| \leqslant 2\pi E_\omega(f)$. Заметим, что все весовые коэффициенты $c_{\nu l}$ положительны при достаточно большом числе узлов интерполяции. Для коэффициентов квадратурной формулы (2.2) имеем выражение

$$c_\nu = \frac{4\pi r_\nu}{m(2n_\nu+1)}\Big(\frac{\cos\psi_\nu}{2} + \sum_{s=3(2)}^{m-1} t_s \cos s\psi_\nu\Big),$$

где $t_s = 1/(1+(-1)^{(s-1)/2}s)$; $\psi_\nu = (2\nu-1)\pi/(4m)$; $s \geqslant 1$ нечетно. В результате получаем задачу о нахождении стационарного значения квадратичной формы

$$J(w) = \sum_{\nu,l}\Big[\frac{c_{\nu l}}{|\psi'(\zeta_{\nu l})|^2}\,D_{\nu l}\Big((Hw)^2_{\nu l} + \frac{2(1-\sigma)}{r_\nu^4|\psi'(\zeta_{\nu l})|^4}\,[(D^{(xy)}w)^2_{\nu l} - (D^{(xx)}w)_{\nu l}(D^{(yy)}w)_{\nu l}]\Big) - \\ - c_{\nu l}\omega^2\rho|\psi'(\zeta_{\nu l})|^2 h_{\nu l} w^2_{\nu l}\Big],$$

где $(Hw)^2_{\nu l} = \Big(\sum\limits_{\mu,k} H_{\nu l,\mu k} w_{\mu k}\Big)^2$; H — матрица дискретного оператора Лапласа, получающаяся при подстановке интерполяционной формулы (2.3) в выражение для плоского оператора Лапласа:

$$\Delta w = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2},$$

$D^{(xy)}$, $D^{(xx)}$ и $D^{(yy)}$ — матрицы численного дифференцирования по x, y; x, x и y, y соответственно, формулы для которых определяются из (2.1) (без множителя $1/(r^2|\psi'(\zeta)|^4)$). Матрицы численного дифференцирования по r и θ определяются численным дифференцированием интерполяционной формулы (2.3).

Рассмотрим матрицу A и диагональную матрицу B:

$$A_{\nu l,\mu k} = \sum_{\nu,l}\Big[\frac{c_{\nu l}}{|\psi'(\zeta_{\nu l})|^2}\,D_{\nu l}\Big(H_{\nu l,\mu k}H_{\nu l,\tilde\nu\tilde l} + \\ + \frac{2(1-\sigma)}{r_\nu^4|\psi'(\zeta_{\nu l})|^4}\,\big(2D^{(xy)}_{\nu l,\mu k}D^{(xy)}_{\nu l,\tilde\nu\tilde l} - D^{(yy)}_{\nu l,\mu k}D^{(xx)}_{\nu l,\tilde\nu\tilde l} - D^{(xx)}_{\nu l,\mu k}D^{(yy)}_{\nu l,\tilde\nu\tilde l}\big)\Big)\Big],$$

$$B_{\tilde\nu\tilde l} = \operatorname{diag}(c_{\tilde\nu} h_{\tilde\nu\tilde l}\rho|\psi'(\zeta_{\tilde\nu\tilde l})|^2).$$

Получаем задачу на собственные значения $Aw - \omega^2 Bw = 0$, где A — симметричная матрица; B — положительно определенная диагональная матрица. Сведем эту обобщенную задачу на собственные значения к стандартной задаче на собственные значения для симметричной матрицы. Пусть $w = B^{-1/2}w'$. Тогда $B^{-1/2}AB^{-1/2}w' = \omega^2 w'$.

3. Численные эксперименты. Для проверки методики проводились расчеты собственных частот для круглой пластины диаметром 6,3 см и толщиной 1,0017 см. Принимались следующие значения констант материала: $\sigma = 0{,}25 \div 0{,}33$, $E = 6{,}867 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3; $P_0 = 1$ атм $= 1{,}0133 \cdot 10^5$ Па. Сначала рассмотрим результаты для круглой пластины постоянной толщины при $h = 0{,}318$, $\sigma = 0{,}25$, $M = 3$, $N = 7$. Ниже приведены значения (в герцах) трех собственных частот пластины начиная с четвертой частоты (полужирным шрифтом выделены знаки, совпавшие с расчетом на сетке 30×41): **269,23**2 50, **269,23**2 50, **439**,095 52. Первые три частоты, близкие к нулю, получаются вследствие того, что пластина имеет свободный край и может двигаться как твердое тело.

Дальнейшие расчеты проводились для двух эпитрохоид. Эпитрохоида получается при качении малого круга радиусом ε по большому кругу радиусом a. Точка, связанная с малым кругом, описывает кривую, называемую эпитрохоидой. Конформное отображение единичного круга на эту область задается формулой $\psi(\zeta) = \zeta(a + \varepsilon\zeta^n)$ (n — число лепестков эпитрохоиды). Расчеты проводились при $2a = 6{,}3$, $n = 4$, $\varepsilon = 1/6$ и $n = 12$, $\varepsilon = 0{,}0625$ и постоянной и переменной толщинах пластины. При этом переменная толщина изменялась по закону

$$h = h_0(1 + \alpha_1 X + \beta_1 X^2), \qquad X = x/a, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$h = h_0(1 + \alpha_2 R + \beta_2 R^2), \qquad R = r/a,$$

где a — радиус круга.

Расчеты проводились для следующих пластин:

— пластины постоянной толщины $h = 0{,}318$ см, контуром которой является эпитрохоида, при $\sigma = 0{,}25$, $n = 4$, $\varepsilon = 1/6$, $M = 20$, $N = 41$ и при $\sigma = 0{,}25$, $n = 12$, $\varepsilon = 0{,}0625$, $M = 20$, $N = 41$;

— круглой пластины переменной толщины (диаметр 6,3 см, толщина $h_0 = 0{,}318$ см) при $\sigma = 0{,}25$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\beta_2 = 0{,}1$, $M = 20$, $N = 41$ и $\sigma = 0{,}25$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\beta_1 = 0{,}1$, $M = 20$, $N = 41$;

— пластины переменной толщины (диаметр 6,3 см, $h_0 = 0{,}318$ см, $\sigma = 0{,}25$, $M = 20$, $N = 41$), контуром которой является эпитрохоида, при $n = 4$, $\varepsilon = 1/6$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\beta_2 = 0{,}1$; $n = 12$, $\varepsilon = 0{,}0625$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\beta_2 = 0{,}1$; $n = 4$, $\varepsilon = 1/6$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\beta_1 = 0{,}1$; $n = 12$, $\varepsilon = 0{,}0625$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\beta_1 = 0{,}1$.

Для проверки сходимости проводилось сравнение с расчетами на сетке 30×41. Для первых 12 частот полученные результаты совпадают с точностью до 6–7 знаков после запятой.

4. Сравнение с результатами, полученными в других работах. Сравнение с результатами расчетов, выполненных в работах [1, 2, 4, 5, 8, 15, 16], показывает, что в них содержится систематическая ошибка, которую можно пояснить с помощью результатов, взятых из работы [5]. В этой работе для пластины постоянной толщины со свободным краем при $\sigma = 0{,}3$ получены следующие значения частот: $F = 5{,}3583$; 9,0031; 12,439; 20,475.

В настоящей работе расчеты проводились по описанной выше методике на сетке $M = 30$, $N = 41$ при $\sigma = 0{,}30$; 0,33; 0,25. Результаты этих расчетов аналогичны, поэтому рассмотрим только случай $\sigma = 0{,}3$. Для первого собственного значения получена пара близких значений $F = 5{,}358\,210\,3$; 5,358 210 5, для второго собственного значения $F = 9{,}003\,136\,39$. Далее вновь получаем пару близких значений $F = 12{,}438\,987\,8$;

12,438 987 9. Для последнего собственного значения, полученного в работе [5], имеем пару близких собственных значений $F = 20{,}474\,541\,4$; $20{,}474\,541\,6$.

Для пластины переменной толщины при $\alpha_1 = 0{,}1$, $\beta_1 = 0$ в работе [5] получены следующие значения первых пяти собственных частот: $F = 5{,}375$; 9,021; 12,49; 20,52; 21,94.

В настоящей работе в расчетах по описанной выше методике при $\sigma = 0{,}3$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\beta_1 = 0$ получены следующие значения: $F = 5{,}359\,045$; 5,359 050; 9,004 074 9; 12,420 022 2; 12,420 022 9; 20,444 97; 20,459 84; 21,787 500 43; 21,787 500 48.

Первые пять собственных частот, полученные в работе [5] при $\alpha_2 = 0{,}1$, $\beta_2 = 0$, имеют следующие значения: $F = 5{,}621$; 5,620; 9,376; 13,27; 21,54. В расчетах, проведенных в настоящей работе, получены значения $F = 5{,}620\,195\,6$; 5,620 195 78; 9,372 832 2; 13,268 789 88; 13,268 781 00; 21,512 882 9; 21,512 883 0.

Результаты расчетов в основном совпали с результатами, приведенными в работе [5], однако их нельзя считать верными, поскольку часть собственных частот круглой пластины постоянной толщины со свободным краем являются кратными (см. выше) и при возмущении толщины распадаются на две близкие частоты. В табл. 1–7 работы [5] приведено только по одной частоте из пары (кроме первой пары в последней строке табл. 5), что является ошибкой. Это разные, хотя и близкие частоты.

Заключение. Из проведенных численных экспериментов следует, что построенный алгоритм обладает высокой эффективностью. Например, для получения первых двух частот свободного колебания круглой пластины постоянной толщины с точностью до двух знаков после запятой достаточно сетки, состоящей из 21 узла. Сравнение с результатами расчетов, проведенных в других работах, показало наличие в них ошибок: из двух кратных (близких) частот приводится только одна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Seyit Ceribasi, Gulay Altay.** Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method // J. Sound Vibrat. 2009. V. 319. P. 668–680.
2. **Wanyama W.** Analytical investigation of the acoustic radiation from linearly-varying thin circular plates: Dissert. mech. engng. Texas, 2000.
3. **Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).** Теория звука. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. Т. 1.
4. **Leissa A. W.** Vibration of Plates-NASA SP-160. Washington, 1969.
5. **Singh B., Chakraverty S.** Use of characteristic orthogonal polynomials in two dimensions for transverse vibration of elliptic and circular plates with variable thickness // J. Sound Vibrat. 1994. V. 173, N 3. P. 289–299.
6. **Wood A. B.** An experimental determination of the frequencies of free circular plates // Proc. Phys. Soc. 1935. V. 47. P. 794.
7. **Waller M. D.** Vibration of free circular plates // Proc. Phys. Soc. 1937. V. 50. P. 70–86.
8. **Waller M. D.** Vibration of free elliptical plates // Proc. Phys. Soc. 1950. V. 63. P. 451–456.
9. **Огибалов П. М.** Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1958.
10. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1968.
11. **Казанджан Э. П.** Об одном численном методе конформного отображения односвязных областей. М., 1977. (Препр. / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 82).
12. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 23. Колебания пластины переменной толщины со свободными краями произвольной формы в плане. М., 2009. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 899).

13. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Науч. мир, 2002.
14. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. Изд. 2-е, испр. и доп. / Под ред. А. Д. Брюно. М.; Ижевск: РХД, 2002.
15. **Myafyov B., Dyegorenkov V.** Circles in the sand: methods for reproducing Chladni's figures // Phys. Educat. 2005. N 9. P. 408–410.
16. **Готкевич В. С.** Собственные колебания пластинок и оболочек: Справ. пособие. Киев: Наук. думка, 1964.

Поступила в редакцию 4/V 2009 г.,
в окончательном варианте — 30/XII 2009 г.