

РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЬНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. И. Ивановский, С. Х. Розенфельд

(Москва)

Развивается метод, основанный на использовании модельного кинетического уравнения с частотой соударений $\omega = v/l$ (l — средняя длина свободного пробега, v — модуль молекулярной скорости). Метод испытывается на нескольких классических задачах.

1. Описание метода. Будем основываться на модельном кинетическом уравнении

$$v \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\tau(v)} (f_0 - f) \quad (1.1)$$

Здесь v — молекулярная скорость, $\tau^{-1}(v)$ — частота соударений, зависящая от скорости, f_0 — локально-равновесная функция распределения. При рассмотрении внутренних течений разреженного газа в большинстве случаев можно ограничиться рамками линейного приближения (т. е. малыми числами Маха и малыми градиентами температур).

Поэтому примем

$$f_0(v, \mathbf{r}) = N (2\pi m \theta)^{-3/2} \exp \left(-\frac{p^2}{2m\theta} \right) \left(1 + \frac{\mathbf{p} \mathbf{u}}{\theta} \right)$$

Разделим все частицы на два сорта: первичные — это частицы, только что слетевшие со стенки и не испытывавшие ни единого соударения; и вторичные — частицы, испытывавшие хотя бы одно соударение. Запишем кинетические уравнения для каждого сорта в отдельности

$$v \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\tau} (f_{02} - f_2) + \frac{1}{\tau} f_{01}, \quad v \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\tau} f_1 \quad (1.2)$$

Здесь f_1 и f_2 — функции распределения соответственно первичных и вторичных частиц, f_{01} и f_{02} — локально-равновесные функции, нормированные соответственно на плотности числа первичных и вторичных частиц.

Необходимость такого разделения вызвана следующим. При соударениях вторичных частиц со вторичными импульс и энергия любого элемента объема сохраняются. При соударениях же первичных частиц со вторичными в каждом элементе объема появляется импульс и энергия, принесенные частицей с той точки поверхности, которой она испущена. Поэтому газ вторичных частиц в каждой точке объема имеет источники энергии и импульса, формируемые потоками первичных частиц в данной точке.

Конкретизируем вид функции $\tau(v)$. Примем $\tau(v) = l/v$. Здесь l — средняя длина свободного пробега, v — модуль молекулярной скорости. (Различные способы выбора $\tau(v)$ обсуждались в работе [1].)

Запишем законы сохранения для вторичных частиц

$$\int d\mathbf{p} f_2 v = \int d\mathbf{p} f_{02} v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_2 v_0 \quad (1.3)$$

$$\int d\mathbf{p} f_2 v v = \int d\mathbf{p} f_{02} v v = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} N_2 v_0 u, \quad v_0 = \left(\frac{2\theta}{m}\right)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$\int d\mathbf{p} f_2 v v^2 = \int d\mathbf{p} f_{02} v v^2 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} N_2 v_0 \frac{v_0^2}{2} \quad (1.5)$$

При сделанном выборе $\tau(v)$ уравнения (1.2) можно переписать так:

$$f_1(\kappa v, \mathbf{r}_s + \kappa s) = f_1(\kappa v, \mathbf{r}_s) e^{-s/l} \quad (1.6)$$

$$f_2(\kappa v, \mathbf{r}_s + \kappa s) = f_2(\kappa v, \mathbf{r}_s) f^{-s/l} + \int_0^s ds' e^{-(s'-s)/l} f_0(\kappa v, \mathbf{r}_s + \kappa s') \quad (1.7)$$

Здесь $\kappa = \mathbf{v}/v$, $f_0 = f_{01} + f_{02}$, $\mathbf{r}_s$ — радиус-вектор точки на поверхности; f_s — функция распределения частиц, летящих с поверхности, которую примем локально-максвелловской.

Зафиксируем теперь точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \kappa s$ и поставим выражение (1.7) последовательно в уравнения сохранения (1.3) — (1.5)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} N_2 v_0 = \frac{1}{l} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} N v_0 + 3\kappa Q \right\} \quad (1.8)$$

$$\frac{8}{3\sqrt{\pi}} Q_2 v_0 = \frac{1}{l} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{8}{3\sqrt{\pi}} v_0 \kappa (\kappa Q) + 3\kappa \frac{N v_0^2}{2} \right\} \quad (1.9)$$

$$\frac{8}{\sqrt{\pi}} N_2 v_0 \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{l} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{8}{\sqrt{\pi}} N \frac{v_0^2}{2} v_0 + \frac{15}{4} N v_0^2 (\kappa Q) \right\} \quad (1.10)$$

Здесь

$$\kappa = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad Q = N u$$

Уравнения (1.8) — (1.10) выражают плотность, потоки и давление вторичных частиц через полные значения этих величин во всем объеме. Найдём теперь вклад первичных частиц. Интегрируя уравнение (1.6) по пространству импульсов в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \kappa s$, находим

$$N_1(\mathbf{r}) = - \oint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N_s + \frac{1}{\sqrt{\pi}} N_s \frac{u_s \kappa}{v_{0s}} \right\} \quad (1.11)$$

$$Q_1(\mathbf{r}) = - \oint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 N_s \kappa + 3\kappa (N_s u_s \kappa) \right\} \quad (1.12)$$

$$N_1 \frac{v_0^2}{2} = - \oint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N_s \frac{v_{0s}^2}{2} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} v_{0s} (N_s u_s \kappa) \right\} \quad (1.13)$$

Здесь u_s — скорость стенки, $v_{0s} = (2\theta_s/m)^{1/2}$, θ_s — температура стенки.

Полные плотность, потоки и давление выразятся формулами

$$N = \frac{1}{lv_0} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ Nv_0 + \frac{3V\pi}{2} \kappa Q \right\} - \oint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N_s + \frac{\kappa \mathbf{u}_s}{v_{0s}} N_s \right\} \quad (1.14)$$

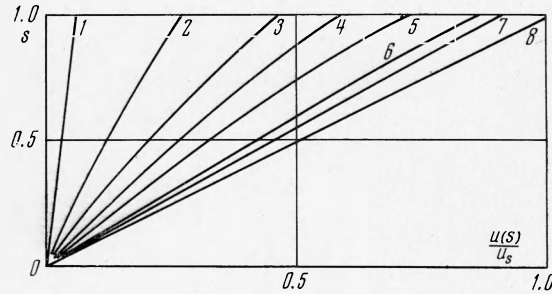
$$Q = \frac{1}{lv_0} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ 3\kappa v_0 (\kappa Q) + \frac{9V\pi}{8} \kappa \frac{Nv_0^2}{2} \right\} - \oint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{2}{V\pi} N_s v_{0s} \kappa + 3\kappa (\kappa N_s \mathbf{u}_s) \right\} \quad (1.15)$$

$$N \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{lv_0} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N \frac{v_0^2}{2} v_0 + \frac{15V\pi}{32} v_0^2 \kappa Q \right\} - \oint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N_s \frac{v_{0s}^2}{2} + \frac{8}{3V\pi} v_{0s} (N_s \mathbf{u}_s \kappa) \right\} \quad (1.16)$$

Параметры N_s и Q_s определяются из условия непротекания

$$Q(\mathbf{r}_s) \mathbf{n}(\mathbf{r}_s) = 0 \quad (1.17)$$

Система уравнений (1.14) — (1.17) представляет собой замкнутую систему интегральных уравнений, в принципе достаточную для решения любой задачи о течениях разреженного газа.



Фиг. 1

Ниже рассматривается ряд задач, решения которых хорошо известны и на примере которых будет показано корректность и весьма высокая эффективность развиваемого здесь метода.

2. Течение Куэтта. Имеются две бесконечные плоские пластины, движущиеся параллельно друг другу со скоростями $\pm u_s$. Расстояние между пластинами равно $2a$. Ищется плотность потока числа частиц вдоль оси пластин (фиг. 1).

Интегральное уравнение (1.15) для потока и в этом случае может быть преобразовано к следующему виду:

$$Q(s) = \int_{-1}^{+1} K(s, s') Q(s') ds' + \frac{3}{2} N_s u_s \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) e^{-\lambda t} \operatorname{sh} \lambda t s$$

где

$$K(s, s') = -\frac{3}{2} \frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) e^{-\lambda t |s-s'|} \quad (2.1)$$

Здесь $s = z/a$. Параметр $\lambda = a/l = \text{Kn}^{-1}$ характеризует степень разрежения. Интегральное уравнение (2.1) решалось численно в широком диапазоне чисел λ от 10^{-3} до 5. Типичные профили потока представлены на фиг. 1, где значениям $\lambda = 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 3.0, 5.0, \infty$ соответствуют кривые 1—8.

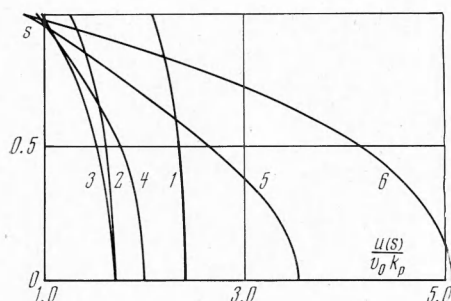
Предельные случаи могут быть исследованы аналитически. Так, при $\lambda \rightarrow 0$ имеем $Q(s) \equiv 0$. При $\lambda \rightarrow \infty$ воспользуемся асимптотической формулой

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} f(s') ds' \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^n} e^{-\lambda t |s-s'|} = \frac{2}{\lambda} \left\{ \frac{1}{n} f(s) + \frac{1}{n+2} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 f}{\partial s'^2} \right\} \quad (2.2)$$

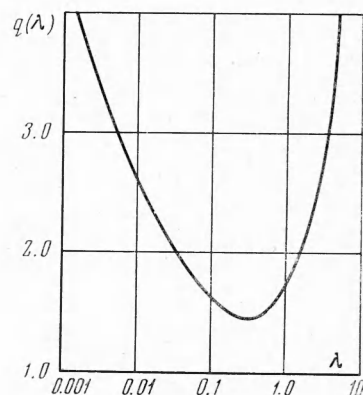
Применяя (2.2) к уравнению (2.1), получаем при $\lambda \rightarrow \infty$ $\partial^2 u / \partial s^2 = 0$ с условиями скольжения на границе

$$u(1) = u_s - \frac{3}{8} l \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.3)$$

Решением уравнения (2.3) являются линейные профили, проходящие через начало координат. Сопоставление условий (2.3) с фиг. 1 показывает, что уже при $\lambda = 5$ решение интегрального уравнения (2.1) совпадает со своей континуальной асимптотикой.



Фиг. 2



Фиг. 3

Изложенные здесь результаты хорошо согласуются с известными представлениями (см., например, [2]).

3. Течение Пуазейля. Исследуется изотермический поток, возникающий под влиянием постоянного градиента давления, приложенного вдоль оси X . В этом случае уравнение (1.15) преобразуется к виду

$$Q^*(s) = \int_{-1}^{+1} K(s, s') Q^*(s') ds' - \frac{9V\pi}{8} \left\{ \frac{k_p}{\lambda} \left(\frac{1}{3} - \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^4} e^{-\lambda t} \text{ch } \lambda t s \right) - \frac{16}{9\pi} \frac{k_p}{\lambda} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} \left(1 - \frac{3}{t^2} \right) e^{-\lambda t} \text{ch } \lambda t s \right\} \quad (3.1)$$

Здесь

$$Q^* = \frac{2u}{v_0}, \quad k_p = \frac{a}{P} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Это интегральное уравнение решалось численно от $\lambda = 10^{-3}$ до $\lambda = 5.0$. На фиг. 2 показаны характерные профили потока для значений

$\lambda = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 3.0, 5.0$ (кривые 1—6 соответственно). Сопоставление с данными, имеющимися в [2], показывает почти полное их совпадение. При $\lambda \rightarrow \infty$ из уравнения (3.1) можно получить известное уравнение Пуазейля

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.2)$$

с условиями скольжения на границе

$$u(1) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} v_0 \frac{k_p}{\lambda} - \frac{3}{8} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial s} \quad (1) \quad (3.3)$$

Коэффициент вязкости при этом равен

$$\eta = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \rho v_0 l \quad (3.4)$$

Важной особенностью плоского течения Пуазейля является существование минимума объемного расхода при некоторых числах λ (парадокс Кнудсена). На фиг. 3 показана полученная нами кривая расхода. При $\lambda \rightarrow 0$ она имеет логарифмическую особенность, при $\lambda \rightarrow \infty$ линейно растет и достигает минимума при $\lambda = 0.36-0.4$. В работе [3] указывается значение $\lambda = 0.42-0.55$. Близкие значения получены в недавно проведенных экспериментах [4].

4. Теплопередача между плоскими пластинами. Рассчитаем сначала профиль температуры между бесконечными плоскими пластинами, из которых верхняя имеет температуру θ_+ , а нижняя — θ_- . Интегральное уравнение (1.16) преобразуется к виду

$$\theta(s) = \int_{-1}^{+1} K(s, s') \theta(s') ds' + \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\lambda t} \left\{ \frac{\theta_+ + \theta_-}{2} \operatorname{ch} \lambda t s + \frac{\theta_+ - \theta_-}{2} \operatorname{sh} \lambda t s \right\} \quad (4.1)$$

$$K(s, s') = \frac{\lambda}{2} \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-\lambda t |s-s'|}$$

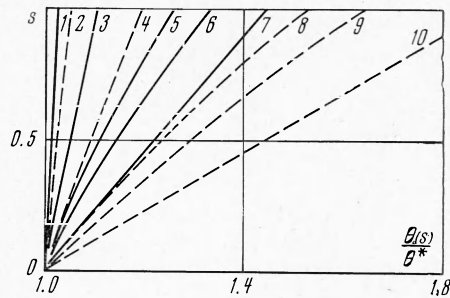
Результаты численного расчета $\theta(s)$ представлены на фиг. 4. Кривые 1—10 соответствуют следующим парам значений: $\lambda, \delta = 0.01, 0.5; 0.01, 1.0; 0.1, 0.5; 0.1, 1.0; 0.5, 0.5; 1.0, 0.5; 50.05, 0.5, 1.0; 1.0, 1.0; 5.0, 1.0; \delta = (\theta_+ - \theta_-) / (\theta_+ + \theta_-)$.

Тепловой поток выражается через температуру следующим образом:

$$J(s) = -\frac{4}{(2\pi m)^{1/2}} \int_{-1}^{+1} ds' \frac{\partial}{\partial s'} \theta^{3/2}(s') \int_1^\infty \frac{dt}{t^3} e^{-\lambda t |s-s'|} \quad (4.2)$$

В свободно-молекулярном пределе это выражение переходит в

$$J(s) = -\frac{2}{(2\pi m)^{1/2}} (\theta_+^{3/2} - \theta_-^{3/2}) \quad (4.3)$$



Фиг. 4

В континуальном пределе профили температуры линейные с температурным скачком у стенок

$$\theta(1) = \theta_+ - \frac{1}{2} l \frac{\partial \theta}{\partial z}(1) \quad (4.4)$$

Формула (4.2) при $\lambda \rightarrow \infty$ переходит в уравнение теплопроводности с коэффициентом теплопроводности

$$k_T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho v_0 l \quad (4.5)$$

Располагая явными выражениями для коэффициентов вязкости и теплопроводности, можно найти число Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{c_p \eta}{k_T} = \frac{2}{3}$$

Это значение совпадает с числом Прандтля для уравнения Больцмана.

Таким образом, предлагаемый метод обеспечивает корректный предельный переход как к свободно-молекулярным, так и к континуальным течениям. В то же время, не накладывая никаких ограничений на геометрию области и размерность задачи, он позволяет весьма экономными средствами описать течения с произвольными числами Кнудсена.

Поступила 18 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson D. G. M., Baum H., Crook M. The current status of statistical models in kinetic theory. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 1, New York — London, Acad. Press., 1969.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
3. Cercignani C. Plane Poiseuille flow and Knudsen minimum effect. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 2, New York — London, Acad. Press., 1963.
4. Породнов Б. Т., Суетин П. Е., Борисов С. Ф. Течение газов в плоской щели в широком диапазоне чисел Кнудсена. Ж. техн. физ., 1970, т. 40, вып. 11.