УДК 536.21

УЧЕТ СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК ТОРМОЖЕНИЯ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т. Джавед, И. Мустафа

Международный исламский университет, 44000 Исламабад, Пакистан
E-mails: tariq_17pk@yahoo.com, irfanmustafa1983@yahoo.com

Исследуется смешанная конвекция в потоке жидкости третьего порядка вблизи ортогональных точек торможения на вертикальной поверхности с учетом скольжения и вязкой диссипации. С использованием преобразования подобия исходная задача сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучается влияние параметров течения, таких как число Вайсенберга, параметр третьего порядка, локальное число Рейнольдса, число Прандтля, число Эккерта, параметр смешанной конвекции, параметры скольжения для скорости и температуры, на температуру и скорость, коэффициенты локального поверхностного трения и локальное число Нуссельта.

Ключевые слова: жидкость третьего порядка, теплоперенос, эффекты скольжения, вязкая диссипация, точки остановки потока, численное решение.

DOI: 10.15372/PMTF20160317

Введение. Интерес к исследованию смешанной конвекции в потоке жидкости обусловлен ее многочисленными приложениями в промышленности и технике (охлаждение вентиляторами электрических устройств, коллекторов тепловой солнечной энергии, работа печей, химическая обработка оборудования и др.). В случае если поток жидкости течет горизонтально вдоль нагреваемой или охлаждаемой поверхности, силами плавучести можно пренебречь, однако в случае вертикальной или наклонной поверхности силы плавучести оказывают существенное влияние на течение жидкости и на перенос тепла. В работе [1] исследовалась вынужденная и свободная конвекция в пограничном слое течения на горизонтальной поверхности. В [2] с использованием метода разложения в ряд изучалась вынужденная конвекция в потоке на вертикальной пластине и получено решение, отличающееся от найденного в [1]. В [3] получено решение задачи о вынужденной и свободной конвекции в пограничном слое с учетом сил плавучести. Смешанная конвекция в течении на плоской пластине исследовалась в работах [4–11], в которых показано, что в точках торможения потока конвекция имеет большое значение, когда вследствие разности температур потока и поверхности силы плавучести становятся существенными. В [12] исследовалась двумерная смешанная конвекция в потоке вблизи точек торможения на вертикальной поверхности и получено два решения в области встречных потоков при некоторых значениях параметров. Авторы [13] провели исследования с учетом нестационарности параметров, а авторы [14] выполнили аналогичный анализ для микрополярных жидкостей. В [15] с использованием метода гомотопического анализа получено решение для точек торможения двумерного потока на растягиваемой пластине. В [16] с использованием того же метода получено аналитическое решение для смешанной конвекции в точках торможения потока вязкоэластичной жидкости, примыкающего к вертикальной поверхности. В [17] аналогичная задача решена численно с использованием спектрального метода коллокации [18]. В работе [19] рассматривалось течение жидкости через проницаемую стенку в области пограничного слоя с учетом скольжения. Граничные условия скольжения для потоков различной геометрии рассматривались во многих работах (см., например, [20–26]).

В случае неньютоновских жидкостей модель жидкости второго порядка позволяет вычислять нормальные напряжения, однако не описывает течение в пограничном слое. Это позволяет сделать модель неньютоновской жидкости третьего порядка.

В случае жидкостей третьего порядка выражение для тензора напряжений Коши τ имеет вид [27]

$$\tau = -pI + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 + \beta_1 A_3 + \beta_2 (A_2 A_1 + A_1 A_2) + \beta_3 (\operatorname{tr} A_1^2)\, A_1.$$

Здесь p — давление; μ — динамическая вязкость; α_i $(i = 1, 2)$, β_i $(i = 1, 2, 3)$ — постоянные характеристики материала. Тензор Ривлина — Эриксона A_n определяется следующим образом:

$$A_1 = \nabla\boldsymbol{V} + (\nabla\boldsymbol{V})^{\mathrm{T}},$$

$$A_n = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\Big) A_{n-1} + A_{n-1}(\nabla\boldsymbol{V}) + (\nabla\boldsymbol{V})^{\mathrm{T}} A_{n-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

В случае если модель жидкости третьего порядка содержит термодинамические ограничения [28]

$$\mu \geqslant 0, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \quad |\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant \sqrt{24\mu\beta_3}, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \beta_3 \geqslant 0,$$

выражение для тензора напряжений Коши принимает вид

$$\tau = -pI + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 + \beta_3 (\operatorname{tr} A_1^2)\, A_1.$$

В [29] с использованием произвольной системы координат получены уравнения пограничного слоя жидкости третьего порядка. В [30] исследовалось течение жидкости третьего порядка в трубе.

В настоящей работе результаты [17] обобщаются на случай смешанной конвекции в потоке жидкости третьего порядка в окрестности ортогональных точек торможения на вертикальной поверхности с учетом скольжения для скорости и температуры, а также вязкой диссипации.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим задачу о стационарной ламинарной двумерной смешанной конвекции в потоке несжимаемой жидкости третьего порядка вблизи ортогональных точек торможения на нагреваемой вертикальной поверхности $y = 0$ (рис. 1). Начало декартовой системы координат Oxy соответствует центру поверхности, ось x направлена вдоль поверхности, ось y — перпендикулярно ей. Компоненты скорости невязкой жидкости вблизи точек торможения равны $u_e = ax$, $v_e = -ay$ (a — положительная константа). Поскольку рассматривается случай нагреваемой поверхности, температура поверхности T_w больше температуры окружающей жидкости T_∞. Уравнения пограничного слоя при наличии вязкой диссипации имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

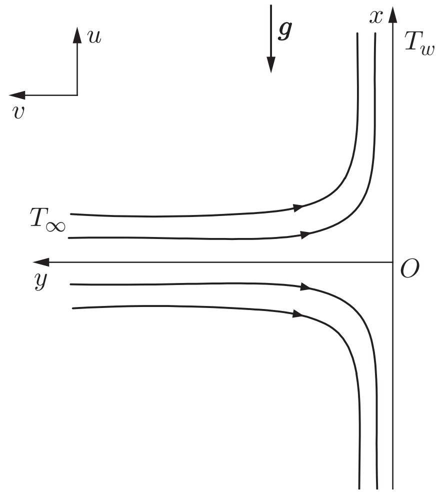

Рис. 1. Схема задачи

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\alpha_1}{\rho}\Big(u\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+v\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big)+$$
$$+2\,\frac{\alpha_2}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+6\,\frac{\beta_3}{\rho}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm g\beta(T-T_\infty); \qquad (1)$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}+(2\alpha_1+\alpha_2)\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2; \qquad (2)$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x}+v\,\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\nu}{c_p}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\frac{\alpha_1}{\rho c_p}\Big(u\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+2\,\frac{\beta_3}{\rho c_p}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^4, \qquad (3)$$

где u, v — компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно; ν — кинематическая вязкость; ρ, p — плотность и давление жидкости; α_1, α_2, β_3 — параметры, характеризующие жидкость; g — ускорение свободного падения; β — коэффициент теплового расширения; T — температура жидкости внутри пограничного слоя; c_p — удельная теплоемкость. Последний член в правой части уравнения (1) свидетельствует о наличии сил плавучести. Положительное значение этого члена соответствует случаю, когда поток направлен вертикально вверх ("способствующий" поток), отрицательное — случаю, когда поток направлен вертикально вниз ("препятствующий" поток).

Из уравнения (2) получаем выражение для модифицированного давления

$$p^*=p-(2\alpha_1+\alpha_2)\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2.$$

Из (1), (2) находим [29]

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p^*}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\alpha_1}{\rho}\Big(u\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+v\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big)+$$
$$+6\,\frac{\beta_3}{\rho}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm g\beta(T-T_\infty),$$
$$\frac{\partial p^*}{\partial y}=0. \qquad (4)$$

Используя выражения для скорости u_e свободного потока, соотношения (3), (4) запишем в виде

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x}+v\,\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\nu}{c_p}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\frac{\alpha_1}{\rho c_p}\Big(u\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+2\,\frac{\beta_3}{\rho c_p}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^4; \qquad (5)$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}=u_e\,\frac{du_e}{dx}+\nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\alpha_1}{\rho}\Big(u\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+v\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big)+{}$$
$$+6\,\frac{\beta_3}{\rho}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm g\beta(T-T_\infty). \qquad (6)$$

Граничные условия скольжения для скорости и температуры принимают вид

$$y=0:\qquad u=\frac{\gamma_1}{\mu}\,\tau_{xy},\quad v=0,\quad T=T_w+\gamma_2\,\frac{\partial T}{\partial y},$$
$$y\to\infty:\qquad u=u_e=ax,\quad v=v_e=-ay,\quad T=T_\infty,$$

где γ_1, γ_2 — параметры скольжения для скорости и температуры. Температура стенки изменяется линейно по x и равна $T_w=T_\infty+\Delta T\,x$ (ΔT — разность температур).

После выполнения преобразований подобия

$$\eta=\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,y,\quad u=axf'(\eta),\quad v=-\sqrt{a\nu}\,f(\eta),\quad \theta(\eta)=\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}$$

исходные уравнения (5), (6), являющиеся нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, переходят в систему обыкновенных дифференциальных уравнений [29]

$$\begin{gathered}f'''-f'^2+ff''+1+\mathrm{We}\,(2f'f'''-ff''''-f''^2)+6\varepsilon\,\mathrm{Re}_x\,f'''f''^2\pm\lambda\theta=0,\\ \theta''+\mathrm{Pr}\,(f\theta'-f'\theta)+\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}\,[f''^2+\mathrm{We}\,(f'f''^2-ff''f''')+2\varepsilon\,\mathrm{Re}_x\,f''^4]=0,\end{gathered} \qquad (7)$$

где штрих соответствует дифференцированию по η; $\mathrm{Pr}=\nu/\alpha$ — число Прандтля; $\mathrm{We}=a\alpha_1/\mu$ — число Вайсенберга; $\varepsilon=\beta_3a^2/\mu$ — параметр третьего порядка; $\mathrm{Re}_x=ax^2/\nu$ — локальное число Рейнольдса; $\lambda=\mathrm{Gr}_x\,/\,\mathrm{Re}_x^2$ — коэффициент плавучести (коэффициент смешанной конвекции); $\mathrm{Gr}_x=g\beta(T_w-T_\infty)x^3/\nu^2$ — локальное число Грасгофа; $\mathrm{Ec}=a^2x^2/[c_p(T_w-T_\infty)]$ — число Эккерта, значения которого считаются положительными при нагревании стенки ($T_w>T_\infty$). При $\lambda=0$ в потоке имеет место только вынужденная конвекция, при $\lambda\ne0$ — смешанная конвекция.

Граничные условия принимают вид

$$\begin{gathered}f(0)=0,\quad f'(0)=\gamma_vf''(0)[1+3\,\mathrm{We}\,f'(0)+2\varepsilon\,\mathrm{Re}_x(f''(0))^2],\\ f'(\infty)=1,\quad f''(\infty)=0,\quad \theta(0)=1+\gamma_t\theta'(0),\quad \theta(\infty)=0,\end{gathered} \qquad (8)$$

где $\gamma_v=\gamma_1\sqrt{a/\nu}$, $\gamma_t=\gamma_2\sqrt{a/\nu}$ — безразмерные параметры скольжения для скорости и температуры. Коэффициент локального поверхностного трения C_{fx} и локальное число Нуссельта Nu_x задаются формулами

$$C_{fx}=\frac{\tau_{xy}}{\rho u_e^2},\qquad \mathrm{Nu}_x=\frac{xq_w}{k(T_w-T_\infty)} \qquad (9)$$

(k — теплопроводность жидкости), сдвиговое напряжение τ_{xy}, поток тепла на стенке q_w — формулами

$$\tau_{xy}=\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)+\alpha_1\Big(u\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+u\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+2\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}+2\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y}\Big)+{}$$
$$+\beta_3\Big\{\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big[4\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+2\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+4\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}+2\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2+4\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big\}\Big|_{y=0},$$

$$q_w=-k\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}.$$

Уравнение (9) запишем в безразмерном виде

$$C_{fx}\,\mathrm{Re}_x^{1/2} = [f'' + \mathrm{We}\,(3f'f'' - ff''') + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}_x\,f''^3]\big|_{\eta=0},$$

$$\mathrm{Nu}_x\,/\,\mathrm{Re}_x^{1/2} = -\theta'(0).$$

Метод решения. Для решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (7) с граничными условиями (8) используем спектральный метод коллокации [18]. В этом методе искомые функции $f(\xi)$, $\theta(\xi)$ аппроксимируются суммой базисных функций $T_n(\xi)$ [18]:

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(\xi); \tag{10}$$

$$\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{N} b_n T_n(\xi). \tag{11}$$

В (10), (11) в качестве базисных функций выбираются полиномы Чебышева, которые определены на интервале $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ по формуле

$$T_n(\xi) = \cos\,(N \cos^{-1}\xi),$$

a_n, b_n — неизвестные коэффициенты, которые требуется определить. Задача решается на интервале $[0, \infty]$, который отображается на интервал $[-1, 1]$ с помощью преобразования

$$\xi = 2\eta/\eta_\infty - 1$$

(η_∞ соответствует границе пограничного слоя). Подставляя выражения (10), (11) в уравнение (7), получаем ненулевые невязки. Коэффициенты a_n, b_n выбираются таким образом, чтобы минимизировать полученные невязки в области определения базисных функций. В настоящей работе используется метод коллокации, в котором узлы коллокации определяются следующим образом [18]:

$$\xi_j = \cos\,(j\pi/N), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

В этом случае получается система $2N + 2$ алгебраических уравнений с $2N + 2$ неизвестными коэффициентами a_n, b_n. Система решается с использованием итерационного метода Ньютона [31] при $N = 64$.

Результаты исследования и их обсуждение. Для проверки полученных результатов проведено их сравнение с результатами [16, 17] при отсутствии скольжения и получено хорошее соответствие решений при различных значениях числа Вайсенберга We и числе Прандтля Pr = 0,2 (см. таблицу).

На рис. 2, 3 приведены профили скорости и температуры при Pr = 0,5, Ec = 0,05, We = 0,3, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях параметра смешанной конвекции λ. Видно, что в случае “способствующего” потока при увеличении λ скорость увеличивается, а температура уменьшается. При $\lambda > 2$ вблизи поверхности скорость достигает максимального значения, которое больше, чем в свободном потоке, затем принимает значение, равное скорости свободного потока. Увеличение параметра смешанной конвекции λ не оказывает существенного влияния на толщину пограничного слоя скорости и толщину теплового пограничного слоя. В случае “препятствующего” потока (см. рис. 3) при увеличении λ скорость уменьшается, а температура увеличивается.

На рис. 4 показано влияние числа Прандтля Pr на температуру и скорость при $\lambda = 1$, Ec = 0,05, We = 0,3, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$. Видно, что в случае “способствующего” потока при

Значения $f''(0)$, $-\theta'(0)$ при $\mathrm{Pr} = \lambda = 0{,}2$, $\mathrm{Ec} = \mathrm{Re}_x = \varepsilon = \gamma_t = \gamma_v = 0$ и различных значениях We

We	Работа [17]		Работа [16]		Настоящая работа	
	"Способст-вующий" поток	"Препятст-вующий" поток	"Способст-вующий" поток	"Препятст-вующий" поток	"Способст-вующий" поток	"Препятст-вующий" поток
			$f''(0)$			
0	1,354 26	1,107 11	1,3543	1,1072	1,354 26	1,107 11
0,5	0,982 30	0,818 54	0,9821	0,8184	0,982 30	0,818 54
1,0	0,817 38	0,684 34	0,8174	0,6844	0,817 38	0,684 34
1,5	0,716 94	0,601 29	0,7171	0,6015	0,716 94	0,601 29
2,0	0,647 13	0,543 10	0,6474	0,5435	0,647 13	0,543 10
			$-\theta'(0)$			
0	0,441 98	0,423 51	0,4420	0,4235	0,441 98	0,423 51
0,5	0,409 90	0,394 99	0,4097	0,3939	0,409 90	0,394 99
1,0	0,391 89	0,378 37	0,3920	0,3785	0,391 89	0,378 37
1,5	0,379 22	0,366 52	0,3793	0,3667	0,379 22	0,366 52
2,0	0,369 44	0,357 29	0,3698	0,3578	0,369 44	0,357 29

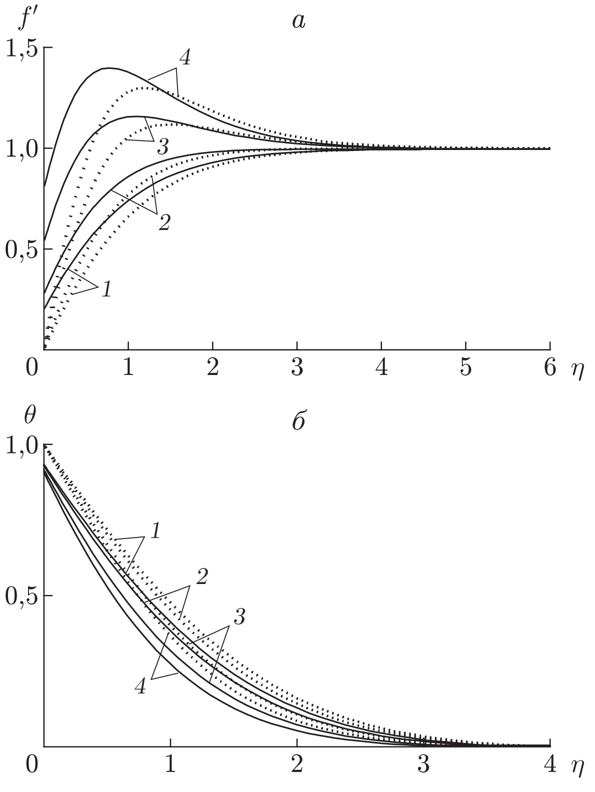

Рис. 2

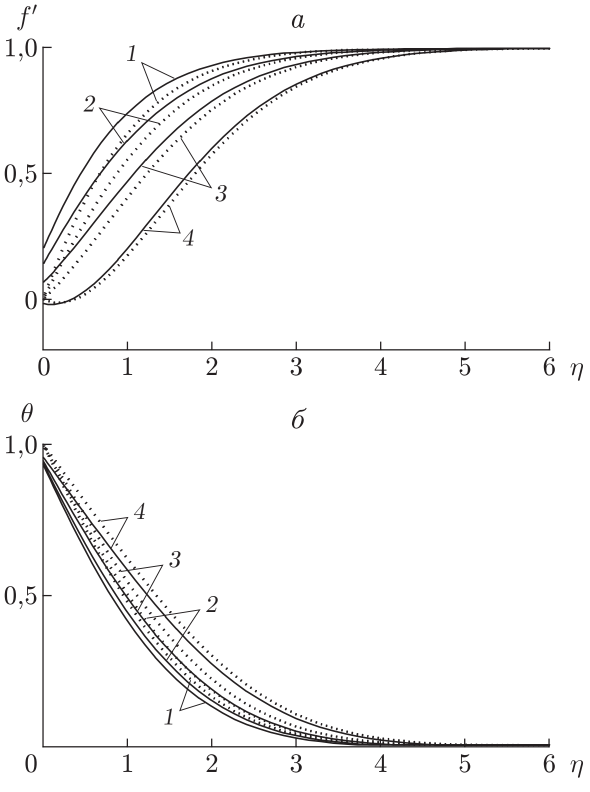

Рис. 3

Рис. 2. Профили скорости (a) и температуры ($б$) в "способствующем" потоке при $\mathrm{Pr} = 0{,}5$, $\mathrm{Ec} = 0{,}05$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях λ:
сплошные линии — с учетом скольжения ($\gamma_v = 0{,}2$, $\gamma_t = 0{,}1$), пунктирные — без учета скольжения ($\gamma_v = 0$, $\gamma_t = 0$); *1* — $\lambda = 0$, *2* — $\lambda = 1$, *3* — $\lambda = 5$, *4* — $\lambda = 10$

Рис. 3. Профили скорости (a) и температуры ($б$) в "препятствующем" потоке при $\mathrm{Pr} = 0{,}5$, $\mathrm{Ec} = 0{,}05$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях λ:
1 — $\lambda = 0$, *2* — $\lambda = 0{,}7$, *3* — $\lambda = 1{,}4$, *4* — $\lambda = 1{,}9$ (остальные обозначения те же, что на рис. 2)

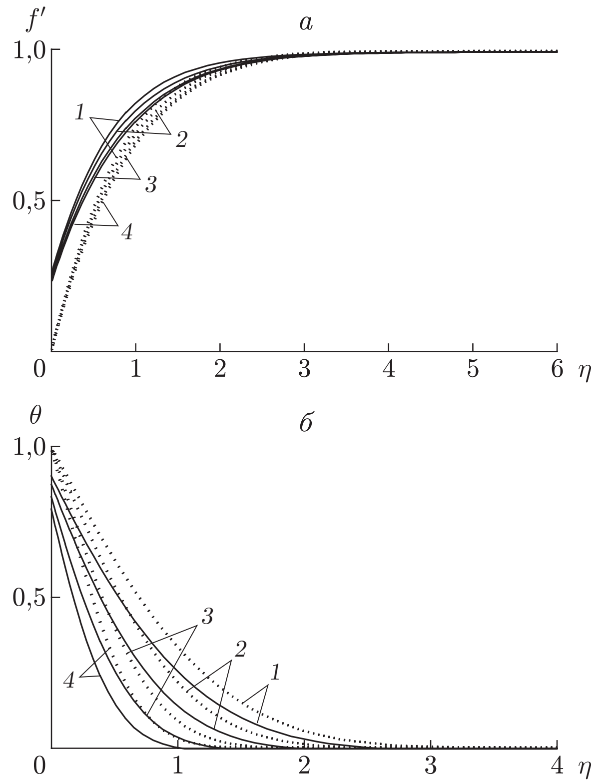

Рис. 4

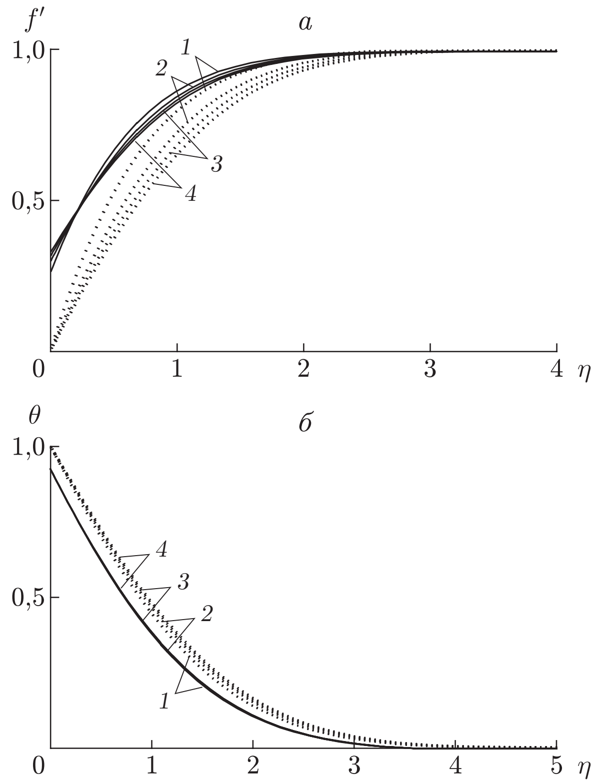

Рис. 5

Рис. 4. Профили скорости (*а*) и температуры (*б*) в "способствующем" потоке при $\lambda = 1$, $\mathrm{Ec} = 0{,}05$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях числа Прандтля:
1 — $\mathrm{Pr} = 1$, *2* — $\mathrm{Pr} = 2$, *3* — $\mathrm{Pr} = 5$, *4* — $\mathrm{Pr} = 10$ (остальные обозначения те же, что на рис. 2)

Рис. 5. Профили скорости (*а*) и температуры (*б*) в "способствующем" потоке при $\lambda = 1$, $\mathrm{Ec} = 0{,}05$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}5$ и различных значениях ε:
1 — $\varepsilon = 0$, *2* — $\varepsilon = 4$, *3* — $\varepsilon = 8$, *4* — $\varepsilon = 12$ (остальные обозначения те же, что на рис. 2)

увеличении числа Прандтля скорость, температура и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются. На рис. 5 показано влияние параметра третьего порядка ε на скорость и температуру в случае "способствующего" потока при $\lambda = 1$, $\mathrm{Ec} = 0{,}05$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}5$. Видно, что в случае отсутствия скольжения скорость, увеличиваясь с нулевого значения, достигает скорости свободного потока. В случае учета скольжения профиль скорости сначала меняется, при $\eta = 0{,}25$ становится постоянным для всех значений ε, затем вновь начинает меняться при изменении ε. И при наличии, и при отсутствии скольжения параметр третьего порядка оказывает минимальное влияние на температуру. Толщина пограничного слоя скорости увеличивается при изменении ε, а толщина теплового пограничного слоя остается постоянной.

На рис. 6 приведены профили скорости и температуры в случае "способствующего" потока при $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}5$ и различных значениях числа Эккерта. На рис. 7 показано влияние параметров скольжения на профили температуры и

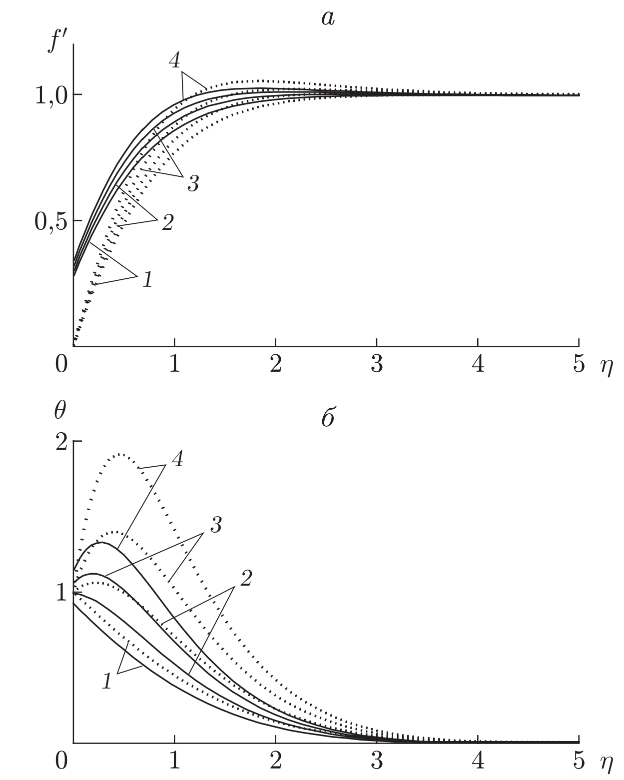

Рис. 6

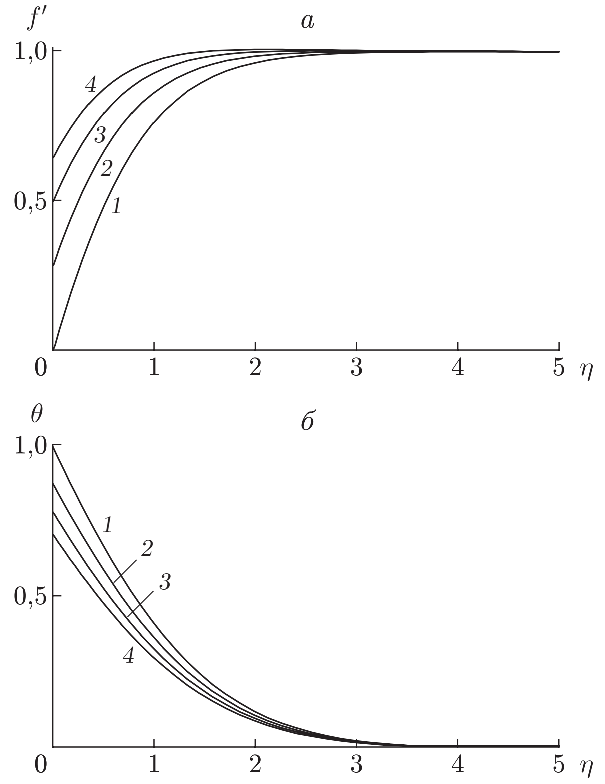

Рис. 7

Рис. 6. Профили скорости (*а*) и температуры (*б*) в “способствующем” потоке при $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}5$ и различных значениях числа Эккерта:
1 — $\mathrm{Ec} = 0$, *2* — $\mathrm{Ec} = 3$, *3* — $\mathrm{Ec} = 6$, *4* — $\mathrm{Ec} = 9$ (остальные обозначения те же, что на рис. 2)

Рис. 7. Профили скорости (*а*) и температуры (*б*) в “способствующем” потоке при $\lambda = 1$, $\mathrm{Ec} = 0{,}05$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}5$ и различных значениях параметров скольжения γ_v и γ_t:
а — *1* — $\gamma_v = 0$, *2* — $\gamma_v = 0{,}2$, *3* — $\gamma_v = 0{,}4$, *4* — $\gamma_v = 0{,}6$; *б* — *1* — $\gamma_t = 0$, *2* — $\gamma_t = 0{,}2$, *3* — $\gamma_t = 0{,}4$, *4* — $\gamma_t = 0{,}6$

скорости при $\lambda = 1$, $\mathrm{Ec} = 0{,}05$, $\mathrm{We} = 0{,}3$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}5$. На рис. 7 видно, что учет скольжения приводит к увеличению скорости и уменьшению температуры на стенке, а также к уменьшению толщины пограничного слоя.

Зависимости коэффициента локального поверхностного трения и локального числа Нуссельта от различных параметров показаны на рис. 8–11. Видно, что обе величины $C_{fx}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}$ и $\mathrm{Nu}_x\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$ уменьшаются при увеличении параметров скольжения (см. рис. 8). Однако при увеличении параметра смешанной конвекции λ $C_{fx}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}$ и $\mathrm{Nu}_x\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$ увеличиваются в случае “способствующего” потока и уменьшаются в случае “препятствующего” потока (см. рис. 9).

Зависимости коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта $C_{fx}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}$ и $\mathrm{Nu}_x\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$ от числа Прандтля приведены на рис. 10. Видно, что при учете скольжения локальный коэффициент поверхностного трения $C_{fx}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}$ уменьшается, а

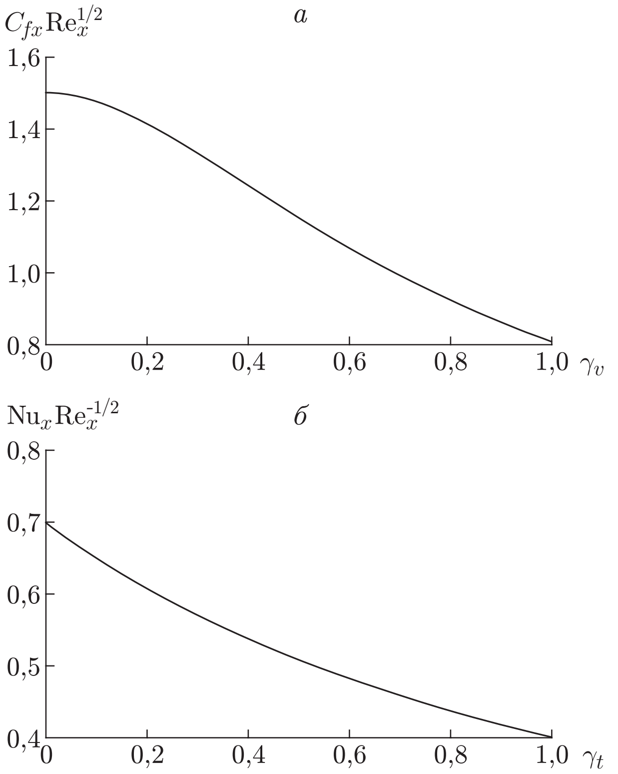

Рис. 8

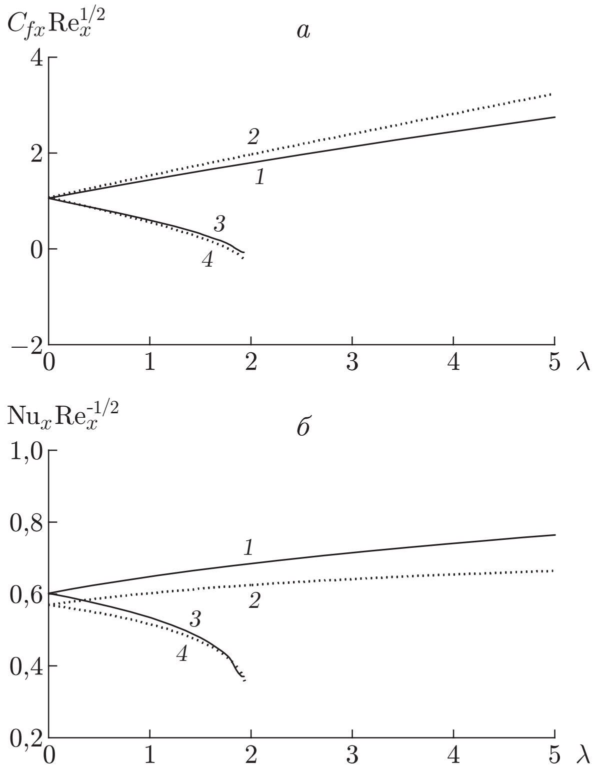

Рис. 9

Рис. 8. Зависимости коэффициента поверхностного трения от параметра скольжения γ_v (*а*) и локального числа Нуссельта от параметра скольжения γ_t (*б*) в случае "способствующего" потока при $\lambda = 1$, Ec = 0,05, We = 0,3, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$, Pr = 0,5

Рис. 9. Зависимости коэффициента поверхностного трения (*а*) и локального числа Нуссельта (*б*) от параметра смешанной конвекции λ при Ec = 0,05, We = 0,3, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$, Pr = 0,5 и различных значениях параметров скольжения: *1, 2* — "способствующий" поток, *3, 4* — "препятствующий" поток; *1, 3* — $\gamma_v = 0{,}2$, $\gamma_t = 0{,}1$; *2, 4* — $\gamma_v = \gamma_t = 0$

локальное число Нуссельта $\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2}$ увеличивается. Коэффициент поверхностного трения $C_{fx} \mathrm{Re}_x^{1/2}$ является убывающей функцией, а локальное число Нуссельта $\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2}$ — возрастающей функцией.

Влияние числа Эккерта на коэффициент локального поверхностного трения и локальное число Нуссельта показано на рис. 11. Видно, что в этом случае $C_{fx} \mathrm{Re}_x^{1/2}$ является возрастающей функцией, $\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2}$ — убывающей. При увеличении числа Эккерта величина $\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2}$ становится отрицательной при $\lambda = 1$, Pr = 0,5, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1$, We = 0,3.

Заключение. Исследована смешанная конвекция в потоке жидкости третьего порядка вблизи ортогональной точки торможения на вертикальной поверхности с учетом и без учета скольжения. Изучено влияние различных параметров течения на скорость и температуру. Установлено, что при наличии скольжения скорость вблизи стенки увеличивается

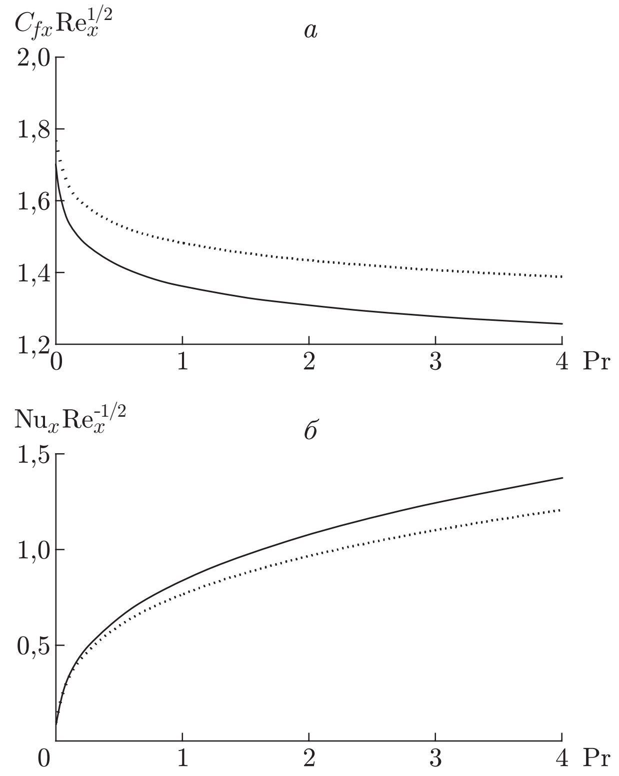

Рис. 10

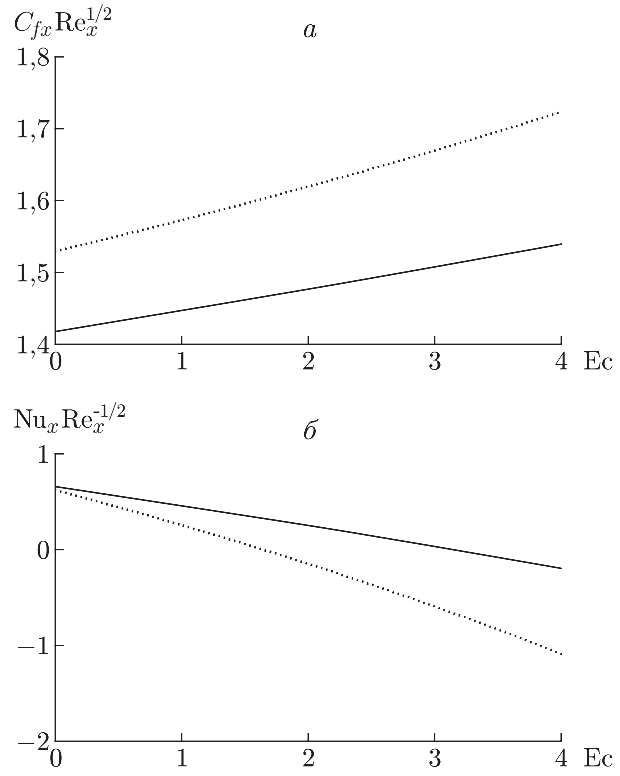

Рис. 11

Рис. 10. Зависимости коэффициента поверхностного трения (*а*) и локального числа Нуссельта (*б*) от числа Прандтля в случае "способствующего" потока при $\lambda = 1{,}0$, $\mathrm{Ec} = 0{,}05$, $\mathrm{Re}_x = 0{,}1$, $\varepsilon = 1{,}0$, $\mathrm{We} = 0{,}3$ и различных значениях параметров скольжения:

сплошные линии — $\gamma_v = 0{,}2$, $\gamma_t = 0{,}1$, пунктирные — $\gamma_v = 0$, $\gamma_t = 0$

Рис. 11. Зависимости коэффициента поверхностного трения (*а*) и локального числа Нуссельта (*б*) от числа Эккерта в случае "способствующего" потока (обозначения те же, что на рис. 10)

с увеличением числа Вайсенберга и параметра третьего порядка. Коэффициент локального поверхностного трения и локальное число Нуссельта уменьшаются при увеличении скорости и параметра скольжения для температуры в случае "способствующего" потока. При увеличении параметра смешанной конвекции коэффициент локального поверхностного трения и локальное число Нуссельта уменьшаются в случае "препятствующего" потока и увеличиваются в случае "способствующего" потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sparrow E. M., Eichhom R., Gregg J. C.** Combined forced and free convection in a boundary layer flow // Phys. Fluids. 1959. V. 2. P. 319–328.
2. **Sparrow E. M., Gregg J. C.** Buoyancy effects in forced convection flow and heat transfer // J. Appl. Mech. 1959. V. 26. P. 133–138.
3. **Szewczyk A. A.** Combined forced and free convection laminar flow // J. Heat Transfer. 1964. V. 86. P. 501–507.

4. **Merkin J. H.** The effect of buoyancy forces on the boundary layer flow over a semi-infinite vertical plate in a uniform stream // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 439–450.
5. **Lloyd J. R., Sparrow E. M.** Combined forced and free convection flow on vertical surfaces // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1970. V. 13. P. 434–438.
6. **Oosthuizen P. H., Hart R.** A numerical study of laminar combined convective flow over a flat plate // J. Heat Transfer. 1973. V. 95. P. 60–63.
7. **Wilks G.** Combined forced and free convective flow on vertical surfaces // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1973. V. 16. P. 1958–1964.
8. **Tingwei G., Bachrum R., Dagguent M.** Influence de la convective natural le sur la convection force andes-sus D'une surface plane vertical voumise a un flux de rayonnement // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1982. V. 25. P. 1061–1065.
9. **Raju M. S., Liu X. R., Law C. K.** A formulation of combined forced and free convection past horizontal and vertical surfaces // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. P. 2215–2224.
10. **Yao L. S.** Two-dimensional mixed convection along a flat plate // J. Heat Transfer. 1987. V. 190. P. 440–445.
11. **Merkin J. H., Mahmood T.** Mixed convection boundary layer similarity solution prescribed heat flux // Z. angew. Math. Phys. 1989. Bd 40. S. 61–68.
12. **Ramachandran N., Chen T. S., Armaly B. F.** Mixed convection in stagnation flows adjacent to vertical surfaces // J. Heat Transfer. 1988. V. 110. P. 373–377.
13. **Devi C. D. S., Takhar H. S., Nath G.** Unsteady mixed convection flow in stagnation region adjacent to a vertical surface // Heat Mass Transfer. 1991. V. 26. P. 71–79.
14. **Nazar R., Amin N., Filip D., Pop I.** Stagnation-point flow of a micropolar fluid towards a stretching sheet // Intern. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39. P. 1227–1235.
15. **Zhu J., Zheng L. C., Zhang Z. G.** Analytical solution to stagnation-point flow and heat transfer over a stretching sheet based on homotopy analysis // Appl. Math. Mech. (English Ed.) 2009. V. 30. P. 463–474.
16. **Hayat T., Abbas Z., Pop I.** Mixed convection in the stagnation point flow adjacent to a vertical surface in a viscoelastic fluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 3200–3206.
17. **Li D., Labropulu F., Pop I.** Mixed convection flow of a viscoelastic fluid near the orthogonal stagnation-point on a vertical surface // Intern. J. Therm. Sci. 2011. V. 50. P. 1698–1705.
18. **Canuto C.** Spectral methods in fluid dynamics / C. Canuto, M. Y. Hossaini, A. Quartcroni, T. A. Zang. Berlin: Springer, 1987.
19. **Beavers G. S., Joseph D. D.** Boundary conditions at a naturally permeable wall // Intern. J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 197–207.
20. **Andersson H. I.** Slip flow past a stretching surface // Acta Mech. 2002. V. 158. P. 121–125.
21. **Labropulu F., Li D.** Stagnation point flow of a second grade fluid with slip // Intern. J. Non-Linear Mech. 2008. V. 43. P. 941–947.
22. **Cao K., Baker J.** Slip effects on mixed convective flow and heat transfer from a vertical plate // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 3829–3841.
23. **Harris S. D., Ingham D. B., Pop I.** Mixed convection boundary-layer flow near the stagnation point on a vertical surface in a porous medium: Brinkman model with slip // Transport Porous Media. 2009. V. 77. P. 267–285.
24. **Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Similarity solution of mixed convective boundary layer slip flow over a vertical plate // Ain Shams Engng J. 2013. V. 4. P. 299–305.
25. **Aman F., Ishak A., Pop I.** Mixed convection boundary layer flow near stagnation point on vertical surface with slip // Appl. Math. Mech. (English Ed.) 2011. V. 32. P. 1599–1606.

26. **Das K.** Slip effects on MHD mixed convection stagnation point flow of a micropolar fluid towards a shrinking vertical sheet // Comput. Math. Appl. 2012. V. 63. P. 255–267.
27. **Rajagopal K. R., Na T. Y.** On Stokes problem for a non-Newtonian fluid // Acta Mech. 1983. V. 48. P. 233–239.
28. **Fosdick R. L., Rajagopal K. R.** Thermodynamics and stability of fluids of third grade // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1980. V. 369. P. 351–377.
29. **Pakdemirli M.** The boundary layer equations of third grade fluids // Intern. J. Non-Linear Mech. 1992. V. 27. P. 785–793.
30. **Yurusoy M., Pakdemirli M.** Approximate analytical solutions for the flow of a third-grade fluid in a pipe // Intern. J. Non-Linear Mech. 2002. V. 37. P. 187–195.
31. **Jaluria Y.** Computer methods for engineering. Boston: Allyn and Bacon Inc., 1988.

Поступила в редакцию 9/I 2013 г.,
в окончательном варианте — 17/VI 2014 г.