УДК 539.376

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ДЛИННОЙ УЗКОЙ МЕМБРАНЫ ВНУТРИ ВЫСОКОЙ ЖЕСТКОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПОПЕРЕЧНОМ ДАВЛЕНИИ

А. М. Локощенко, Л. В. Фомин, Ю. Г. Басалов

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия
E-mails: loko@imec.msu.ru, fleonid1975@mail.ru, basalov@yandex.ru

Исследуется задача об установившейся ползучести длинной узкой прямоугольной мембраны в случае линейной зависимости поперечного давления от времени. Мембрана находится внутри высокой длинной жесткой матрицы с прямоугольным сечением, отношение высоты которой к половине ширины больше единицы. Используется степенная зависимость между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций ползучести мембраны. Рассматриваются два варианта условий контакта мембраны и матрицы: идеальное скольжение и прилипание. Анализ задачи проводится до момента времени, в который мембрана практически полностью прилегает к стенкам матрицы. Показано, что если относительная высота мембраны меньше определенного значения, то длительность ползучести мембраны до момента времени, в который она практически полностью прилегает к стенкам матрицы, в случае идеального скольжения меньше, чем в случае прилипания, и наоборот. Приведено объяснение этого эффекта.

Ключевые слова: мембрана, установившаяся ползучесть, высокая жесткая матрица, переменное поперечное давление, идеальное скольжение, прилипание.

DOI: 10.15372/PMTF20210613

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о ползучести длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением q (рис. 1), которое возрастает пропорционально времени t. Решение этой задачи при постоянной и кусочно-постоянной зависимостях $q(t)$ при различных физических и геометрических условиях приведено в работах [1–3] и др. Особый интерес представляет изучение ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. В работах [3, 4] рассмотрены задачи о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. В [4] приведены решения задач при учете различных форм матриц: клиновидной, криволинейной и прямоугольной при различных условиях на поверхности контакта мембраны и матрицы. В работе [5] представлены основные феноменологические закономерности, определяющие постановку задачи контактного взаимодействия общего вида. В [6] приведено решение задачи об установившейся ползучести мембраны в случае кусочно-постоянной зависимости скорости изменения поперечного давления от времени.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-08-00387).

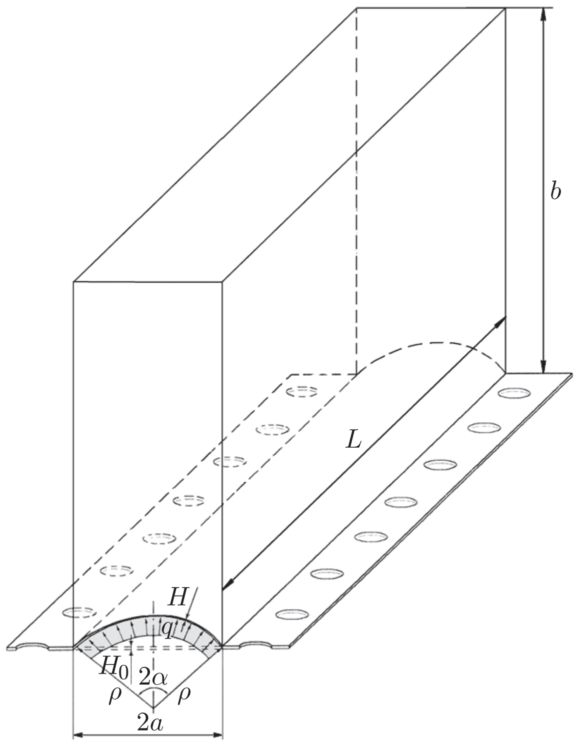

Рис. 1. Деформирование длинной узкой мембраны, находящейся внутри прямоугольной высокой матрицы

Для описания деформирования мембраны при $t > 0$ используется степенной закон установившейся ползучести материала

$$\dot{p}_u = \frac{1}{t_0}\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0}\right)^n, \qquad p_u\big|_{t=0} = 0, \tag{1.1}$$

где σ_u, $\dot{p}_u$ — интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести соответственно; σ_0, t_0, n — постоянные величины; точка обозначает дифференцирование по времени.

Исследуется ползучесть длинной узкой прямоугольной мембраны толщиной H_0 внутри жесткой матрицы прямоугольной формы (см. рис. 1). Ширина $2a$ и длина L мембраны удовлетворяют неравенству $2a/L \ll 1$. Отношение высоты матрицы b к половине ее ширины a удовлетворяет неравенству $b/a > 1$.

Рассматривается линейная зависимость

$$q(t) = q_0 k \frac{t}{t_0} = q_0 k \bar{t}, \qquad \bar{t} = \frac{t}{t_0} \tag{1.2}$$

в случае практически полного прилегания мембраны к стенкам матрицы при различных скоростях увеличения поперечного давления. В этом случае отношение радиуса мембраны к ее ширине a равно заданной малой величине Δ $(\Delta/a \ll 1)$.

При моделировании напряженно-деформированного состояния при $t > 0$ рассматриваются радиальное σ_{rr}, окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и осевое σ_{zz} главные напряжения и соответствующие компоненты тензора деформаций ползучести p_{rr}, $p_{\theta\theta}$, p_{zz}.

Рассмотрим элемент мембраны. Полагая напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и записывая уравнения его равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = q\rho/H, \qquad d(\sigma_{\theta\theta} H) = 0, \tag{1.3}$$

где ρ — радиус кривизны срединной поверхности; H — толщина мембраны.

Следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta} H = \text{const}\,. \tag{1.4}$$

Сравнение равенств (1.3) и (1.4) показывает, что рассматриваемый радиус кривизны срединной поверхности мембраны во всех ее точках один и тот же ($\rho = \text{const}$), т. е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с углом раствора 2α [3]. В этом случае очевидно, что если толщина мембраны до деформации ползучести постоянна, то она постоянна и после деформации ползучести. Следовательно, согласно равенству (1.3) окружное напряжение не изменяется по длине окружности радиусом ρ.

Ниже исследуются три стадии ползучести мембраны.

2. Свободное деформирование мембраны в условиях ползучести (первая стадия). На первой стадии деформирования плоская в начальном состоянии мембрана под действием давления $q(t)$ принимает форму незамкнутой цилиндрической оболочки с центральным углом, равным 2α. На этой стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до момента, в который она касается боковых стенок жесткой матрицы.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{q} = \frac{q}{\sigma_0}, \quad \bar{H}_i = \frac{H_i}{H_0}, \quad \bar{H}_0 = \frac{H_0}{a}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0}{\sigma_0},$$
$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{a}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь H_i ($i = 1, 2, 3$) — толщина мембраны на i-й стадии. Далее черта над безразмерными переменными опускается.

Из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (см., например, [4]) следует

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2}\,\frac{f(\sigma_u)}{\sigma_u}\, s_{ij},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{z\theta}^2 + \sigma_{\theta r}^2 + \sigma_{zr}^2)}, \tag{2.1}$$

s_{ij} — компоненты девиатора напряжений.

В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести $\dot{p}_{zz}$ принимается равной нулю:

$$\dot{p}_{zz} = 0. \tag{2.2}$$

Вследствие тонкостенности цилиндрических оболочек принимается равенство

$$\sigma_{rr} = 0. \tag{2.3}$$

В этом случае с учетом (2.2), (2.3) из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (2.1) следует

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\,\sigma_{\theta\theta}, \qquad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q\rho}{H_0 H_1}.$$

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны, определим приращение окружной деформации ползучести:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно, скорость окружной деформации ползучести равна

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \dot{\rho}/\rho + \dot{\alpha}/\alpha. \tag{2.4}$$

Так как

$$\rho \sin\alpha = 1, \tag{2.5}$$

то

$$\dot{p}\sin\alpha + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha = 0.$$

Тогда выражение (2.4) преобразуется к виду

$$\dot{p}_{\theta\theta} = (1/\alpha - \mathrm{ctg}\alpha)\dot{\alpha}. \tag{2.6}$$

В случае плоского деформированного состояния из условия несжимаемости получаем

$$\dot{p} = \dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = 0, \qquad \dot{p}_{zz} = 0, \qquad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta},$$

$$\dot{p}_u = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\theta\theta})^2 + (\dot{p}_{\theta\theta} - \dot{p}_{zz})^2 + (\dot{p}_{zz} - \dot{p}_{rr})^2 + 6(\dot{p}^2_{r\theta} + \dot{p}^2_{\theta z} + \dot{p}^2_{zr})}\,, \tag{2.7}$$

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\,\alpha\Big)\frac{d\alpha}{dt}.$$

Поскольку скорость радиальной деформации ползучести равна $\dot{p}_{rr} = \dot{H}_1/H_1$, из равенства (2.6) с учетом $\dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}$ получаем

$$-\frac{\dot{H}_1}{H_1} = \Big(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\,\alpha\Big)\dot{\alpha}. \tag{2.8}$$

Проинтегрируем уравнение (2.8), используя начальные значения $t = 0$, $\alpha(0) = 0$, $H_1(0) = 1$:

$$H_1(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \qquad H_1\big|_{\alpha=\pi/2} = \frac{2}{\pi} = H_1^0 \tag{2.9}$$

(H_1^0 — толщина мембраны в конце первой стадии).

С помощью выражений (1.2), (1.3), (2.5), (2.9) окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ и интенсивность напряжений σ_u можно выразить через угол раствора α:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q\rho}{H_1 H_0} = \frac{q_0 kt}{H_0}\,\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}, \qquad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q_0\alpha kt}{H_0\sin^2\alpha}. \tag{2.10}$$

С учетом (2.6), (2.7), (2.10) из (1.1) получаем зависимость угла раствора α от времени t

$$\int_0^t t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \int_0^\alpha \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\,\alpha\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{H_0\sin^2\alpha}{q_0 k\alpha}\Big)^n d\alpha. \tag{2.11}$$

Введем безразмерное время τ:

$$\tau^n = (q_0/H_0)^n\, t^{n+1}. \tag{2.12}$$

Из (2.11), (2.12) следует

$$\frac{\tau^n}{n+1} = \Big(\frac{q_0}{H_0}\Big)^n\,\frac{t^{n+1}}{n+1} = \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1}\frac{1}{k^n}\int_0^\alpha \Big(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\,\alpha\Big)\Big(\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\Big)^n d\alpha.$$

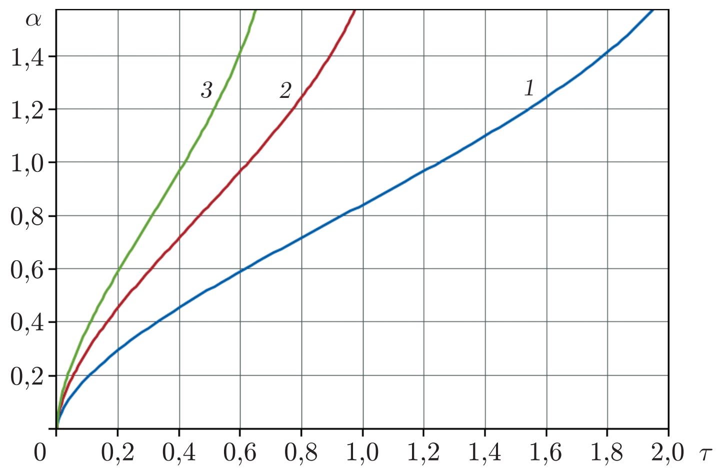

Рис. 2. Зависимость $\alpha(\tau)$ в случае свободного деформирования матрицы:
1 — $k = 0{,}5$, *2* — $k = 1$, *3* — $k = 1{,}5$

Отсюда получаем

$$\tau = \Big[(n+1)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1}\frac{1}{k^n}\int\limits_0^\alpha\Big(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\Big)\Big(\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\Big)^n\,d\alpha\Big]^{1/n}.$$

На рис. 2 приведены зависимости $\alpha(\tau)$ при $n = 3$, $k = 0{,}5$; $1{,}0$; $1{,}5$.

В конце первой стадии ($\tau = \tau_1$) угол раствора мембраны $2\alpha(\tau_1) = 2\alpha_1$ удовлетворяет равенству $2\alpha_1 = \pi$. Следовательно, момент времени τ_1, в который завершается первая стадия, и толщина мембраны $H_1^0 = H(\tau_1)$, вычисляемая согласно зависимости (2.9), определяются выражениями

$$\tau_1 = \tau\big|_{\alpha=\alpha_1=0{,}5\pi}, \qquad H_1^0 = H_1\big|_{t=t_1} = \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{2}{\pi}.$$

Далее рассматривается процесс ползучести мембраны внутри жесткой матрицы при различных контактных условиях.

3. Вторая стадия деформирования при идеальном скольжении мембраны вдоль стенок матрицы ($0 \leqslant y_0 \leqslant b - 1$). Введем координаты поперечного сечения матрицы x, y и дополнительные безразмерные координаты:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \bar{y}_0 = \frac{y_0}{a}$$

(x_0, y_0 — координаты точек касания мембраны и матрицы).

В случае относительно высокой ($b \geqslant 1$) и относительно низкой ($b < 1$) матриц решения задачи различаются.

Вследствие осевой симметрии мембраны и матрицы далее рассматривается ползучесть правой половины мембраны ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant b$) внутри относительно высокой матрицы.

При $\tau > \tau_1$ часть поверхности мембраны прилегает к боковой поверхности матрицы.

При исследовании второй стадии ползучести мембраны рассмотрим два ее близких положения (радиус свободной дуги мембраны $\rho = 1$). В одном положении длина зоны контакта равна y_0, в другом — $y_0 + dy_0$ (рис. 3). Согласно определению $dp_{\theta\theta}$ имеем

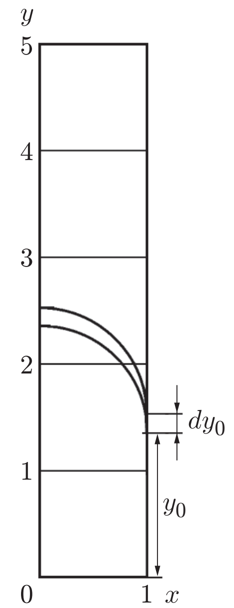

Рис. 3. Вторая стадия ползучести мембраны в случае идеального скольжения и прилипания

$$
\begin{gathered}
dp_{\theta\theta} = \frac{y_0 + dy_0 + 0{,}5\pi - (y_0 + 0{,}5\pi)}{y_0 + 0{,}5\pi} = \frac{dy_0}{y_0 + 0{,}5\pi} = -\frac{dH_2}{H_2}, \\
p_{\theta\theta} = -\int\limits_{H_1^0}^{H_2(y_0)} \frac{dH_2}{H_2} = \int\limits_0^{y_0} \frac{dy_0}{y_0 + 0{,}5\pi} = \ln \frac{H_1^0}{H_2(y_0)} = \ln \frac{y_0 + 0{,}5\pi}{0{,}5\pi};
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

$$
H_2(y_0) = 0{,}5\pi \, \frac{H_1^0}{y_0 + 0{,}5\pi} = \frac{1}{y_0 + 0{,}5\pi}. \tag{3.2}
$$

Вторая стадия ($t = t_2$) заканчивается в тот момент, когда мембрана касается поперечной стенки матрицы (при $y_0 = b - 1$). Согласно (3.2) в конце второй стадии толщина мембраны равна

$$
H_2^0 = H_2(t_2) = \frac{1}{b - 1 + 0{,}5\pi}.
$$

Из (3.1) следует

$$
p_{\theta\theta} = \ln \frac{y_0 + 0{,}5\pi}{0{,}5\pi}, \quad \dot{p}_{\theta\theta} = \frac{1}{y_0 + 0{,}5\pi} \frac{dy_0}{dt}, \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{y_0 + 0{,}5\pi} \frac{dy_0}{dt}. \tag{3.3}
$$

Интенсивность напряжений определяется соотношениями (2.10), (3.2):

$$
\sigma_u(y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_0 H_2(y_0)}, \quad \rho = 1, \quad \sigma_u(y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q_0 k t}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q_0}{H_0} (y_0 + 0,5\pi) k t. \tag{3.4}
$$

Подставляя выражения для $\dot{p}_u$ (3.3) и σ_u (3.4) в (1.1), получаем зависимость координаты y_0 от времени t

$$
\int\limits_0^{y_0} \frac{dy_0}{(y_0 + 0{,}5\pi)^{n+1}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{q_0}{H_0}\right)^n k^n \int\limits_{t_1}^{t} t^n \, dt = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{q_0}{H_0}\right)^n k^n \, \frac{t^{n+1} - t_1^{n+1}}{n+1}.
$$

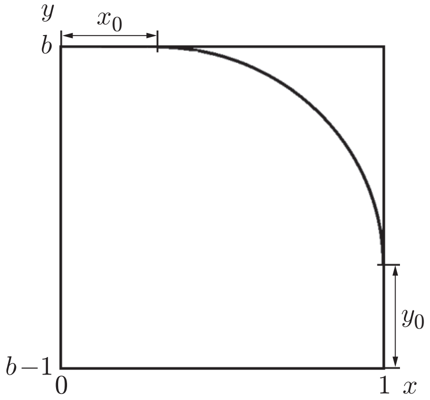

Рис. 4. Третья стадия ползучести мембраны в случае идеального скольжения и прилипания

С учетом (2.11) имеем

$$\tau(y_0) = \Big[\tau_1^n + \Big(\frac{(0{,}5\pi)^{-n}}{n} - \frac{(y_0 + 0{,}5\pi)^{-n}}{n}\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1}\,\frac{n+1}{k^n}\Big]^{1/n}, \qquad \tau_2 = \tau\big|_{y_0 = b-1}.$$

4. Третья стадия деформирования при идеальном скольжении мембраны вдоль стенок матрицы ($b - 1 \leqslant y_0 \leqslant b - \Delta$)**.** На третьей стадии ползучесть мембраны в тот момент, когда она касается обеих стенок матрицы (рис. 4), определяется следующим образом:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{2 - 0{,}5\pi}{2y_0 - b + 1 + 0{,}5\pi(b - y_0)}\,dy_0,$$

$$-\int\limits_{H_2^0}^{H_3(y_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \ln\frac{H_2^0}{H_3(y_0)} = \ln\frac{1 + 0{,}5\pi b - b + (2 - 0{,}5\pi)y_0}{2(b-1) - b + 1 + 0{,}5\pi(b - b + 1)},$$

$$H_3(y_0) = [1 + 0{,}5\pi b - b + y_0(2 - 0{,}5\pi)]^{-1}.$$

Третья стадия завершается при значении $y_0^0 = b - \Delta$, удовлетворяющем неравенству $\Delta = b - y_0^0 \ll 1$.

Толщина мембраны в конце третьей стадии равна

$$H_3^0(y_0^0) = [1 - b + 0{,}5\pi b + y_0^0(2 - 0{,}5\pi)]^{-1}.$$

Интенсивность напряжений определяется соотношениями

$$\sigma_u(y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q_0 kt\rho}{H_0 H_3(y_0)}, \qquad \rho = b - y_0;$$

$$\sigma_u(y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q_0 kt}{H_0}\,[1 - b + 0{,}5\pi b + y_0(2 - 0{,}5\pi)](b - y_0). \qquad (4.1)$$

Подставляя выражения для $\sigma_u(y_0)$ (4.1) и $\dot{p}_u(y_0)$ (3.3) в (1.1), получаем

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{2 - 0{,}5\pi}{2y_0 - b + 1 + 0{,}5\pi(b - y_0)}\,\frac{dy_0}{dt} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q_0 kt}{H_0}\,[1 - b + 0{,}5\pi b + y_0(2 - 0{,}5\pi)](b - y_0)\Big)^n,$$

откуда следует

$$\tau(y_0) = \Big(\tau_2^n + (n+1)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{n+1}\frac{2-0{,}5\pi}{k^n}\times$$

$$\times\int\limits_{b-1}^{y_0}\frac{dy_0}{[1-b+0{,}5\pi b+y_0(2-0{,}5\pi)]^{n+1}(b-y_0)^n}\Big)^{1/n},$$

$$\tau_3 = \tau\big|_{y_0=y_0^0}.$$

5. Вторая стадия деформирования мембраны в случае ее прилипания к стенкам матрицы ($0 \leqslant y_0 \leqslant b-1$)**.** При исследовании второй стадии ползучести мембраны рассмотрим два ее близких положения (радиус свободной дуги мембраны $\rho = 1$). Согласно определению $p_{\theta\theta}$ имеем

$$-\int\limits_{H_1^0}^{H_2(y_0)}\frac{dH_2}{H_2} = \int\limits_0^{y_0}\frac{2}{\pi}\,dy_0 = \frac{2}{\pi}\,y_0 = \ln\frac{H_1^0}{H_2(y_0)}\ ,$$

$$H_2(y_0) = H_1^0\exp\Big(-\frac{2}{\pi}\,y_0\Big), \qquad p''_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\dot p_{\theta\theta} = -\frac{\dot H_2}{H_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{dy_0}{dt}. \tag{5.1}$$

Вторая стадия ($t = t_2$) заканчивается в тот момент, когда мембрана касается верхней поперечной стенки матрицы (при $y_0 = b-1$).

В конце второй стадии толщина мембраны равна

$$H_2^0 = H_2(t_2) = H_1^0\exp\Big(-\frac{2}{\pi}\,(b-1)\Big) = \frac{2}{\pi}\exp\Big(-\frac{2}{\pi}\,(b-1)\Big).$$

Интенсивность напряжений определяется соотношением

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q\rho}{H_2H_0}, \qquad \rho = 1, \qquad \sigma_u(y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q_0}{H_0}\,\frac{\pi}{2}\exp\Big(\frac{2}{\pi}\,y_0\Big)kt. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1), (5.2) в (1.1), получаем

$$\Big(\frac{4}{\sqrt{3}\pi}\Big)^{n+1}\Big(\frac{H_0}{q_0}\Big)^n\frac{1}{k^n}\,\frac{dy_0}{(\exp{(2y_0/\pi)})^n} = t^n\,dt,$$

$$\tau(y_0) = \Big\{\tau_1^n + (n+1)\Big(\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\Big)^{n+1}\frac{1}{k^n}\,\frac{\pi}{2n}\Big[1-\Big(\exp\Big(\frac{2}{\pi}\,y_0\Big)\Big)^{-n}\Big]\Big\}^{1/n}, \quad \tau_2 = \tau\big|_{y_0=b-1}.$$

6. Третья стадия деформирования мембраны в случае ее прилипания к стенкам матрицы ($b-1 \leqslant y_0 \leqslant b-\Delta$)**.** На третьей стадии ползучесть мембраны в тот момент, когда она касается боковой и поперечной стенок матрицы, определяется следующим образом:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{2-0{,}5\pi}{0{,}5\pi(b-y_0)}\,dy_0, \qquad \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} = \frac{2-0{,}5\pi}{0{,}5\pi(b-y_0)}\,\frac{dy_0}{dt},$$

$$-\int\limits_{H_2^0}^{H_3(y_0)}\frac{dH_3}{H_3} = -\ln\frac{H_3(y_0)}{H_2^0} = \int\limits_{b-1}^{y_0}dp_{\theta\theta} = -\frac{2-0{,}5\pi}{0{,}5\pi}\,\ln{(b-y_0)},$$

$$H_3(y_0) = \frac{2}{\pi} \exp\Big(-\frac{2}{\pi}(b-1)\Big)(b-y_0)^{4/\pi-1}, \qquad \sigma_u(y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q_0}{H_0} \frac{kt}{H_3(y_0)}(b-y_0),$$

$$\dot p_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot p_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2-0{,}5\pi}{0{,}5\pi(b-y_0)} \frac{dy_0}{dt}.$$

Подставляя полученные выражения для σ_u и $\dot p_u$ в (1.1), находим

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2-0{,}5\pi}{0{,}5\pi(b-y_0)} \frac{dy_0}{dt} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q_0}{H_0} kt \frac{1}{(2/\pi)\exp{(-2(b-1)/\pi)}(b-y_0)^{4/\pi-1}}(b-y_0)\Big)^n.$$

С учетом (2.11) имеем

$$\tau_3(y_0) = \Big\{ \tau_2^n + (n+1)\Big(\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\Big)^{n+1} \frac{2-0{,}5\pi}{k^n}\Big[\exp\Big(\frac{2}{\pi}(b-1)\Big)\Big]^{-n} \int\limits_{b-1}^{y_0} (b-y_0)^{(4/\pi-2)n-1}\Big\}^{1/n} =$$

$$= \Big\{ \tau_2^n + (n+1)\Big(\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\Big)^{n+1} \frac{2-0{,}5\pi}{k^n}\Big[\exp\Big(\frac{2}{\pi}(b-1)\Big)\Big]^{-n} \frac{\pi(b-y_0)^{(4/\pi-2)n} - \pi}{2(\pi-2)n}\Big\}^{1/n}.$$

Третья стадия ($\tau = \tau_3$) завершается при значении y_0^0, удовлетворяющем неравенству $\Delta \ll b - y_0^0$, $\tau_3 = \tau(y_0^0)$.

7. Результаты численных расчетов. В табл. 1 приведены результаты вычисления длительностей τ_1, τ_2, τ_3 первой, второй и третьей стадий деформирования мембраны в случае ее идеального скольжения относительно матрицы при $n = 3$, $b = 3$; 5. Расчеты проводились при значениях скорости увеличения давления $k = 0{,}5$; 1,0; 1,5. В качестве характеристики степени прилегания мембраны к стенкам жесткой матрицы приняты значения $\Delta = 0{,}0100$; 0,0010; 0,0001. В табл. 2 приведены значения τ_1, τ_2, τ_3 при тех же значениях k, n, Δ, b с учетом прилипания мембраны к стенкам матрицы. На рис. 5 представлены зависимости $y_0(\tau)$ на третьей стадии деформирования в случаях идеального скольжения и прилипания при различных значениях k.

Результаты вычислений показывают, что при относительно малом значении b (в частности, $b = 3$) при различных значениях остальных параметров (k и Δ) длительность τ_3 в случае идеального скольжения мембраны меньше, чем в случае ее прилипания к стенкам матрицы. При большем значении b (в частности, $b = 5$), наоборот, длительность τ_3 в случае идеального скольжения мембраны больше, чем в случае ее прилипания. Такой результат обусловлен тем, что в случае прилипания мембраны к стенкам матрицы толщина свободного участка мембраны $H_3(y_0)$ в процессе ее ползучести быстро уменьшается вследствие увеличения значения y_0:

$$H_3(y_0) = \frac{2}{\pi} \exp\Big(-\frac{2}{\pi}(b-1)\Big)(b-y_0)^{4/\pi-1}.$$

Таблица 1

Длительность различных стадий ползучести мембраны в случае ее идеального скольжения относительно матрицы

b	k	τ_1	τ_2	τ_3		
				$\Delta = 0{,}01$	$\Delta = 0{,}001$	$\Delta = 0{,}0001$
3	0,5	1,947	2,280	7,899	36,277	168,327
	1,0	0,973	1,140	3,949	18,139	84,163
	1,5	0,649	0,760	2,633	12,092	56,109
5	0,5	1,947	2,300	4,746	21,133	98,031
	1,0	0,973	1,150	2,373	10,566	49,015
	1,5	0,649	0,767	1,582	7,044	32,677

Таблица 2

Длительность различных стадий ползучести мембраны в случае ее прилипания к стенкам матрицы

b	k	τ_1	τ_2	τ_3		
				$\Delta = 0{,}01$	$\Delta = 0{,}001$	$\Delta = 0{,}0001$
3	0,5	1,947	2,300	9,788	51,948	276,894
	1,0	0,973	1,150	4,894	25,974	138,447
	1,5	0,649	0,767	3,263	17,316	92,298
5	0,5	1,947	2,306	3,193	14,559	77,510
	1,0	0,973	1,153	1,597	7,279	38,755
	1,5	0,649	0,769	1,064	4,853	25,837

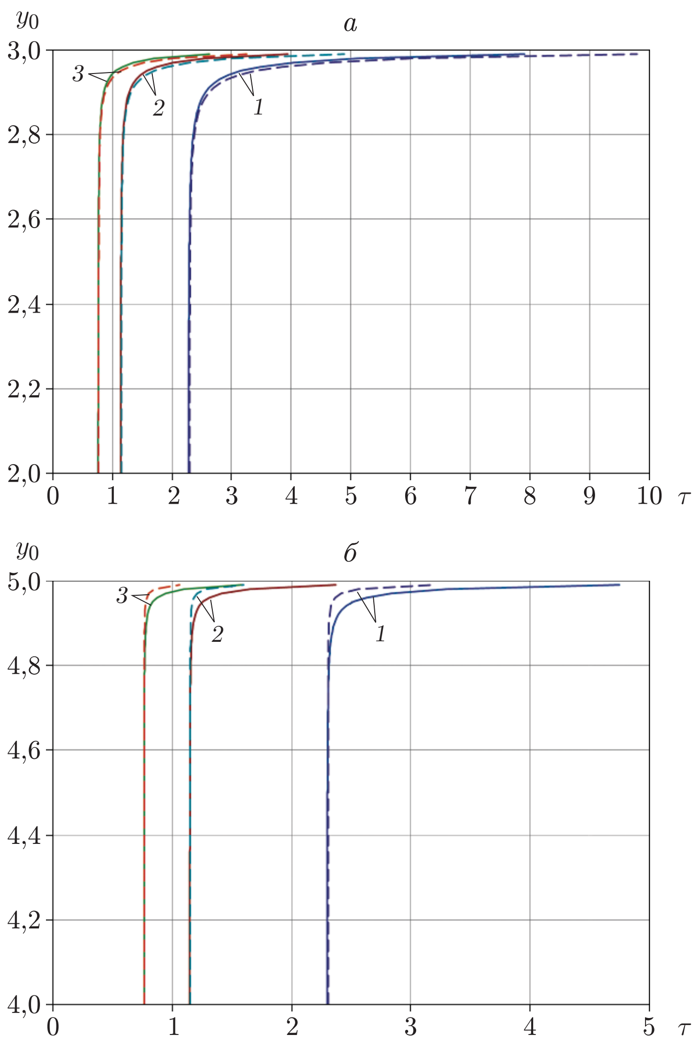

Рис. 5. Зависимости $y_0(\tau)$ в случае идеального скольжения (сплошные линии) и прилипания (штриховые линии) на третьей стадии ползучести мембраны при различных значениях k, b:
а — $b = 3$, *б* — $b = 5$; *1* — $k = 0{,}5$, *2* — $k = 1$, *3* — $k = 1{,}5$

Поэтому достаточно быстро возрастает поперечная деформация ползучести $p_{\theta\theta}$ и соответственно уменьшается длительность τ_3. Расчеты показывают, что при идеальном скольжении и прилипании значения τ_3 совпадают при $b^* = 3{,}666$; $4{,}054$; $4{,}417$ для $\Delta = 0{,}0100$; $0{,}0010$; $0{,}0001$ соответственно.

Заключение. Проведено исследование ползучести длинной прямоугольной мембраны в стесненных условиях (внутри высокой жесткой матрицы) под действием поперечного давления, возрастающего пропорционально времени с различной скоростью. Рассмотрены два варианта условий на поверхности контакта мембраны и матрицы: идеальное скольжение и полное прилипание. Исследованы три стадии деформирования мембраны: ползучесть в свободных условиях, ползучесть мембраны при контакте с боковыми стенками матрицы и ползучесть мембраны при контакте со всеми стенками матрицы. Анализ проводится до момента времени, в который мембрана практически полностью прилегает к стенкам матрицы. Анализ полученных соотношений показал, что при $b = 3$ в случае идеального скольжения это время τ_3 меньше, чем в случае прилипания мембраны к стенкам матрицы, а при $b = 5$ — больше. Приведено физическое объяснение этого эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Odqvist F. K. G.** Mathematical theory of creep and creep rupture. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1974.
2. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
3. **Малинин Н. Н.** Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986.
4. **Локощенко А. М.** Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016.
5. **Ефимов А. Б., Романюк С. Н., Чумаченко Е. Н.** Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 6. С. 82–98.
6. **Локощенко А. М., Абросимова Е. А.** Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости скорости изменения поперечного давления от времени // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 1. С. 103–113.

Поступила в редакцию 8/X 2020 г.,
после доработки — 31/I 2021 г.
Принята к публикации 1/III 2021 г.