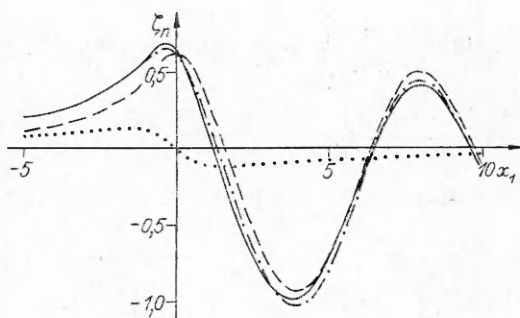




В заключение отметим, что интеграл для η_n -вклада n -й моды в волновое поле, образованное точечным источником [6], расходится при $c = c_n$. Однако поле смещений $\eta(x, y, z)$, генерируемое системой источников — сток интенсивности Q , расположенной в точках $(-a, 0, -H_1)$ и $(a, 0, -H_1)$, определено при $c = c_n$ и связано с $\zeta(x, y, z)$ для диполя формулой $\eta(x, y, z) =$

$= QM^{-1} \int_{-a}^a \zeta(x + \xi, y, z) d\xi$. Асимптотика для передних фронтов волн в случаях $c > c_n$ [4] и $c < c_n$ [6] выражается через функции Эйри в отличие от (23). Таким образом, известные асимптотики для передних фронтов не равномерны по c при c , близких к c_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Стурова И. В., Сухарев В. А. Генерация внутренних волн локальными возмущениями в жидкости с заданным изменением плотности по глубине // Изв. АН СССР. ФАО.— 1981.— Т. 17, № 6.
2. Санников В. Ф. Влияние двух пикноклинов на установившиеся внутренние волны в потоке стратифицированной жидкости // Поверхностные и внутренние волны.— Севастополь, 1981.
3. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане.— Севастополь, 1983.
4. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. ФАО.— 1984.— Т. 20, № 6.
5. Gray E. P., Hart R. W., Farrell R. A. The structure of the internal wave Mach front generated by a point source moving in a stratified fluid // Phys. Fluids.— 1983.— V. 26, N 10.
6. Санников В. Ф. Установившиеся внутренние волны, генерируемые локальным источником возмущений в потоке // Моделирование поверхностных и внутренних волн.— Севастополь, 1984.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: ГИТТЛ, 1955.— Ч. 1.
8. Федорук М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
9. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс.— М.: Наука, 1965.

Поступила 4/XI 1986 г.

УДК 532.526.2

О ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВБЛИЗИ УСТУПА

В. В. Боголепов, И. И. Липатов

(Москва)

Отрыв пограничного слоя может вызываться разными причинами: неблагоприятным градиентом давления, падением скачка уплотнения на пограничный слой, изломом контура обтекаемого тела и т. д. Один из возможных примеров тела с изломом обтекающей — уступ на плоской поверхности. Подобная конфигурация часто встречается на практике, поэтому исследование обтекания уступа выполнялось в целом ряде экспериментальных работ [1]. Численное моделирование обтекания уступов проводилось на основе полной системы уравнений Навье — Стокса в ограниченной области изменения числа Рейнольдса (см., например, [2]).

Для исследования возмущенного течения в пограничном слое при больших числах Рейнольдса широкое применение нашел метод сращиваемых асимптотических разложений. Обзоры исследований, в которых этот метод применялся к анализу отрывных течений, можно найти в [3—5]. Одним из важных моментов, связанных с применением метода сращиваемых асимптотических разложений, является выделение характерных областей течения. Разбиение возмущенного течения на области связано с неравномерной пригодностью асимптотических разложений или с разным воздействием на тече-

ние процессов конвекции, диффузии, градиента давления и др. Цель настоящей работы — изучение структуры возмущенного течения вблизи уступа в некотором диапазоне изменения параметра, пропорционального высоте уступа. Одна из характерных областей исследуемого течения — область с масштабами, равными по порядку величины высоте уступа. В другой характерной области происходит распространение возмущений вверх по потоку от уступа. Анализ течения в этих областях проведен ниже.

1. Рассматривается ламинарное обтекание уступа, расположенного на расстоянии l от передней кромки плоской поверхности. Начало декартовой системы координат совпадает с передней кромкой пластины (рис. 1). Для координат, отсчитываемых вдоль поверхности пластины и по нормали к ней, соответствующих компонентом вектора скорости, плотности, давления, динамического коэффициента вязкости приняты обозначения: $xl, yl, u_\infty u, u_\infty v, \rho_\infty \rho, \rho_\infty u_\infty^2 p, \mu_\infty \mu$. Предполагается, что $Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty = \varepsilon^{-2} (\rho_\infty, u_\infty, \mu_\infty — \text{плотность, скорость и динамический коэффициент вязкости в невозмущенном набегающем потоке})$ велико, но не превышает критического значения, при котором вблизи уступа появляются области переходного течения. Предполагается также, что высота уступа H может изменяться в пределах $\varepsilon^{3/2} \leq H \leq \varepsilon^{5/4}$. Как показано в [6], при $H \sim O(\varepsilon^{3/2})$ возмущенное течение вблизи уступа в области с масштабами $x \sim y \sim H$ описывается полной системой уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости. При увеличении высоты уступа влияние сил вязкости на течение в этой области становится несущественным. В главном приближении течение вблизи уступа описывается при $H > \varepsilon^{3/2}$ системой уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости. Вводятся следующие представления для координат и функций течения в области I вблизи уступа (см. рис. 1):

$$(1.1) \quad x = 1 + Hx_1, y = Hy_1, u = H\varepsilon^{-1}u_1(x_1, y_1) + \dots, v = H\varepsilon^{-1}v_1(x_1, y_1) + \dots, \rho = \rho_w + \dots, p = p_\infty / \rho_\infty u_\infty^2 + H^2 \varepsilon^{-2} a^2 p_1(x_1, y_1) + \dots, a = \varepsilon du / dy(1, 0).$$

Подстановка (1.1) в систему уравнений Навье — Стокса и предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0, H \rightarrow 0$ приводят к

$$(1.2) \quad u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0.$$

В качестве граничных условий на поверхности уступа и на плоской поверхности задаются условия непротекания

$$(1.3) \quad u_1(0, 0 < y_1 < 1) = 0, v_1(x_1 \leq 0, 0) = v_1(x_1 > 0, 1) = 0.$$

Граничные условия для системы (1.2), задаваемые при $x_1 \rightarrow -\infty$, зависят от того, какое влияние уступ оказывает на течение перед ним. Ниже показано, что нелинейные изменения профиля скорости в области, сравнимой по высоте с высотой уступа и с длиной, превосходящей высоту уступа, вызываются уступами, высота которых больше по порядку величины, чем

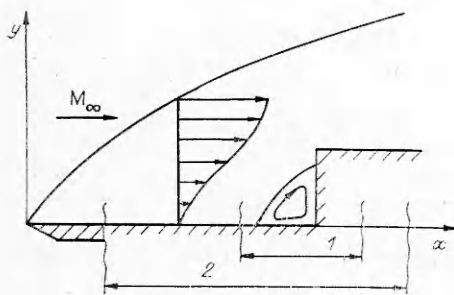


Рис. 1

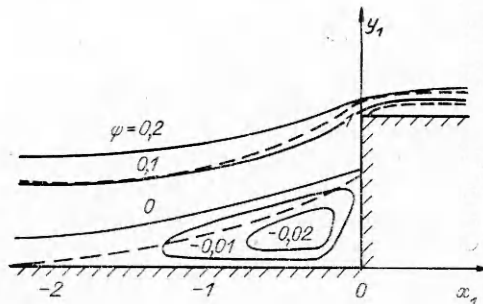


Рис. 2

$O(\varepsilon^{5/4})$. При $H < O(\varepsilon^{5/4})$ граничные условия при $x_1 \rightarrow -\infty$ имеют вид

$$(1.4) \quad u_1(x_1 \rightarrow -\infty, y_1) = y_1.$$

Аналогичны и граничные условия, задаваемые на больших расстояниях ниже по течению:

$$(1.5) \quad u_1(x_1 \rightarrow \infty, y_1) = y_1.$$

Условие затухания возмущений на больших расстояниях по нормали к поверхности приводит к

$$(1.6) \quad u_1(x_1, y_1 \rightarrow \infty) = y_1 + O(1).$$

Решение краевой задачи (1.2)–(1.6) неединственно. Перед уступом формируется область возвратных токов, в образовании которой существенную роль играют силы вязкости. Так, если в области возвратных токов завихренность постоянна, то ее значение должно определяться из условия пространственной периодичности течения в пограничном слое, расположенном на границе области возвратных токов [7]. В качестве примера возможного решения в настоящей работе получено решение краевой задачи (1.2)–(1.6) в предположении о том, что завихренность течения в области возвратных токов совпадает с завихренностью невозмущенного течения в пристеночной области пограничного слоя перед уступом. Картина линий тока, вычисленных с помощью методов теории функций комплексной переменной, изображена на рис. 2, где штриховые кривые — линии тока, полученные в результате численного решения системы уравнений Навье — Стокса по методу [6]. В этих расчетах $Re_1 = \rho_w a H^2 / \mu_w \varepsilon^3$ полагалось равным 10^4 . Видно качественное сходство картин линий тока, найденных в результате решения системы уравнений Эйлера и Навье — Стокса. Уступ высотой $H \sim O(\varepsilon^{5/4})$ вызывает изменение профиля скорости в пристеночной области перед уступом с толщиной, сравнимой с высотой уступа. Для дальнейшего анализа необходимо получить решение системы уравнений Эйлера $u_1(x_1 \rightarrow \infty, y_1)$ при произвольном начальном профиле скорости $u_1(x_1 \rightarrow -\infty, y_1)$. Для нахождения искомого решения можно воспользоваться свойством сохранения полного давления вдоль линии тока. Пусть $f_0 = u_1(x_1 \rightarrow -\infty, y_1)$ и $f_1 = u_1(x_1 \rightarrow \infty, y_1)$, тогда из уравнения Бернулли

$$(1.7) \quad f_1(\psi) = \sqrt{f_0^2(\psi) - 2\Delta p},$$

где Δp — перепад давления, индуцированный уступом [$\Delta p = p_1(x_1 \rightarrow \infty) - p_1(x_1 \rightarrow -\infty)$]; ψ — функция тока, определяемая уравнением

$$(1.8) \quad f_0 = d\psi/dy_1.$$

Соотношения (1.7), (1.8) задают вид профиля скорости $f_1(\psi)$. Для нахождения неизвестного перепада давления Δp нужно воспользоваться крайним условием (1.6), которое имеет вид

$$(1.9) \quad \lim_{\psi \rightarrow \infty} \left[1 + \int_0^\psi \frac{d\psi}{f_1} - 2\psi \right] = \lim_{\psi \rightarrow \infty} \left[\int_0^\psi \frac{d\psi}{f_0} - 2\psi \right].$$

Из соотношения (1.9) перепад давления Δp может быть найден численным интегрированием с помощью итераций. Условие (1.9) эквивалентно условию сохранения суммарной толщины вытеснения, образованной переменной частью толщины вытеснения жидкости и высотой уступа. Изменение суммарной толщины вытеснения на коротких расстояниях привело бы к появлению больших перепадов давления, превосходящих по порядку величины скоростные напоры жидкости на расстояниях по нормали к поверхности, сравнимых с высотой уступа. В свою очередь, такие изменения скорости вызвали бы еще большие изменения суммарной толщины вытеснения, т. е. привели бы к несамосогласованной схеме течения. Подробно эта ситуация изучена в [8]. Изменение толщины вытеснения про-

исходит в более длинной области, так называемой области свободного взаимодействия [4, 5].

2. Для анализа течения в области 2 свободного взаимодействия (см. рис. 1) используются оценки для перепада давления, полученные выше

$$(2.1) \quad \Delta p \sim H^2/\varepsilon^2,$$

откуда следует, что при $H \sim \varepsilon^{5/4}$ перепад давления $\Delta p \sim \varepsilon^{1/2}$ равен по порядку величины тому перепаду, при котором в области 2 перед уступом с длиной $\Delta x \sim \varepsilon^{3/4}$ индуцируются нелинейные изменения поверхностного трения [4, 5]. Все это относится как к дозвуковому внешнему течению, так и к сверхзвуковому течению. Возмущения, распространяющиеся вверх по потоку от уступа, приводят к изменению толщины вытеснения, самосогласованному с возмущением давления. Вблизи уступа, в области 1, происходит скачкообразное (в масштабах области 2 свободного взаимодействия) изменение давления при неизменной толщине вытеснения. Профиль продольной скорости меняется согласно (1.7). Далее, ниже по течению, происходит затухание возмущений, индуцированных уступом, в области свободного взаимодействия ($\Delta x \sim \varepsilon^{3/4}$). Краевая задача, описывающая течение в области свободного взаимодействия при сверхзвуковом внешнем течении, имеет вид [4, 5]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial P}{\partial X} &= \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \quad P = -\frac{\partial}{\partial X} \lim_{Y \rightarrow \infty} (U - Y), \\ U(X \rightarrow -\infty, Y) &= Y, \quad \partial U / \partial Y(X, Y \rightarrow \infty) = 1, \\ V(X \leq 0, 0) &= 0, \quad V(X > 0, H_1) = 0, \\ U(X \rightarrow \infty, Y) &= Y - H_1, \quad U(X \leq 0, 0) = 0, \quad U(X > 0, H_1) = 0, \\ U &= \varepsilon^{-1/4} \mu_w^{-1/4} a^{-1/4} \rho_w^{1/2} \beta^{1/4} u, \quad V = \varepsilon^{-3/4} \mu_w^{-3/4} a^{-3/4} \rho_w^{1/2} \beta^{-1/4} v, \\ P &= \varepsilon^{-1/2} \mu_w^{-1/2} a^{-1/2} \beta^{1/2} p, \quad X = \varepsilon^{-3/4} a^{5/4} \mu_w^{1/4} \rho_w^{1/2} \beta^{3/4} x, \\ Y &= \varepsilon^{-5/4} \mu_w^{-5/4} a^{5/4} \rho_w^{1/2} \beta^{1/4} y, \quad H_1 = \varepsilon^{-5/4} \mu_w^{-1/4} a^{3/4} \rho_w^{1/2} \beta^{1/4} H. \end{aligned}$$

Краевую задачу (2.2) следует дополнить соотношениями (1.7)–(1.9), связывающими профили скорости при $X \rightarrow -0$ и $X \rightarrow +0$, а также возмущение давления слева и справа от торца уступа. Из этих соотношений вытекает, в частности, что продольная скорость на верхней поверхности уступа становится ненулевой (нулевая продольная скорость на нулевой линии тока под действием перепада давления ΔP становится равной $u_w = \sqrt{-2\Delta P}$). Заметим, что $\Delta P < 0$, поскольку для сохранения неизменной суммарной толщины вытеснения поток несжимаемой жидкости около уступа должен разгоняться.

Изучим вначале решение задачи (2.2) при малых значениях параметра $H_1 \ll 1$ или при $H < O(\varepsilon^{5/4})$. Задача (2.2) может быть тогда линеаризована:

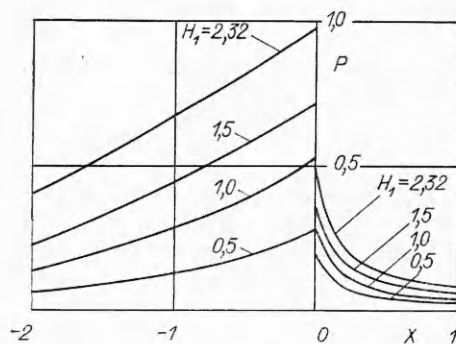
$$(2.3) \quad U = Y + U_1 H_1 + \dots, \quad V = V_1 H_1 + \dots, \quad P = P_1 H_1 + \dots,$$

$$Y \frac{\partial U_1}{\partial X} + V_1 + \frac{\partial P_1}{\partial X} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0, \quad P_1 = -\lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{\partial U_1}{\partial X},$$

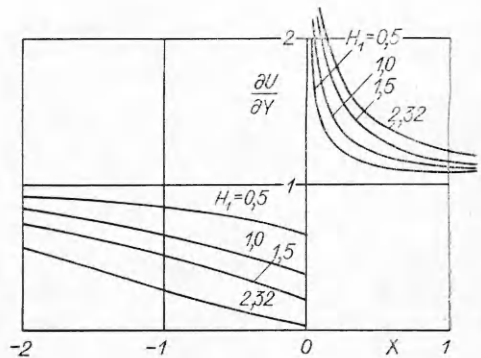
$$U_1(X \rightarrow -\infty, Y) = 0, \quad \partial U_1 / \partial Y(X, Y \rightarrow \infty) = 0, \quad U_1(X \rightarrow \infty, Y) = -1,$$

$$U_1(X < 0, 0) = 0, \quad U_1(X > 0, 0) = -1, \quad V_1(X, 0) = 0.$$

Заметим, что перепад давления в области 1 при $H_1 \ll 1$ оказывается внепорядковым ($\Delta P_1 = O(H_1^2)$). Решение линейной задачи (2.3) получено в [9], где изучено течение в окрестности точек начала и прекращения движения поверхности.



Р и с. 3



Р и с. 4

При конечных значениях параметра $\bar{H}_1$ решение задачи (2.2) можно получить численным методом. В настоящей работе она решалась численным методом [9]. Принципиальная сложность при интегрировании задачи (2.2) заключается в появлении ненулевой скорости на поверхности при $X > 0$. Для корректного решения вводится дополнительная расчетная подобласть. Необходимость введения такой подобласти связана с образованием пограничного слоя на верхней поверхности уступа.

Решение задачи (2.2) получено при нескольких значениях параметра H_1 . На рис. 3 изображены распределения возмущения давления на поверхности пластины ($X < 0$) и на поверхности уступа ($X > 0$). С ростом высоты уступа $\bar{H}_1$ возмущение давления перед уступом также растет. Для исследованного диапазона изменения параметра $\bar{H}_1$ характерен монотонный рост перепада давления ΔP при увеличении H_1 . Представление решения при $X \rightarrow +0$ в виде ряда по степеням X ($P = P(0) + C_1 X^{1/2}$) получено в [9]. Второй член в этом разложении описывает разгон жидкости, необходимый для сохранения локальной суммарной толщины вытеснения при росте толщины образующегося пограничного слоя. Процедура численного интегрирования краевой задачи (2.2) состояла в следующем. В некоторой точке выше по течению от уступа задавалось положительное возмущение давления, далее задача решалась с помощью маршевого метода. Подбор начального возмущения давления осуществлялся из условия затухания возмущений на больших расстояниях ниже по потоку от уступа. При слишком малом начальном возмущении давления решение оканчивалось особой точкой X_0 , в которой $P(X \rightarrow X_0) \rightarrow -\infty$. Такое решение описывает течение около уступа конечной длины, на донном срезе которого (при $X = X_0$) задан большой отрицательный перепад давления. Решения, соответствующие слишком большому начальному возмущению давления, характеризовались ростом давления в области ниже по течению от торца уступа, что приводило в конечном итоге к уменьшению поверхностного трения до нуля. Решения этого вида соответствуют обтеканию уступа, на поверхности которого на некотором расстоянии от торца установлен щиток, вызывающий отрыв пограничного слоя.

На рис. 4 изображено распределение трения на поверхности пластины ($X < 0$) и на поверхности уступа ($X > 0$). С ростом высоты уступа трение перед уступом уменьшается. При $X = 0$ происходит скачкообразное увеличение трения до бесконечно больших значений, что связано с образованием пограничного слоя на поверхности уступа. Ниже по течению от торца уступа при всех исследованных значениях параметра $\bar{H}_1$ поверхностное трение монотонно уменьшается до трения в невозмущенном пограничном слое.

Решение задачи (2.2) получено в ограниченной области изменения параметра H_1 , соответствующей безотрывному (предотрывному) течению перед уступом. Для расчета течения при $H_1 \geq 2,5$ разностная схема должна допускать наличие области возвратных токов в течении перед уступом. Принципы построения расчетной процедуры для такого режима

течения даны в [9]. Следует отметить, что область возвратных токов всегда существует в течении перед уступом, речь идет о возможном увеличении размеров такой области на масштабы, сравнимые с длиной области взаимодействия. Увеличение высоты уступа будет приводить к росту размеров области отрыва и перемещению точки отрыва вверх по потоку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чжен П. Отрывные течения. — М.: Мир, 1973. — Т. 1—3.
2. Мышенков В. И. Численное решение уравнений Навье — Стокса для задачи обтекания прямоугольника потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1972. — № 4.
3. Сычев В. В., Рубан А. И. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи механики. — 1979. — Т. 2, вып. 4.
4. Нейланд В. Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики. — 1981. — Т. 4, вып. 2.
5. Stewartson K. Some recent studies in triple deck // Numerical and physical aspects of aerodynamic flows. — N. Y.; Berlin: Springer-Verlag, 1982. — N 4.
6. Боголепов В. В. Расчет обтекания, обращенного навстречу потоку малого уступа // ПМТФ. — 1983. — № 2.
7. Нейланд В. Я., Сычев В. В. К теории течений в стационарных срывных зонах // Учен. зап. ЦАГИ. — 1970. — Т. 1, № 1.
8. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа // Тр. ЦАГИ. — 1971. — Вып. 1363.
9. Липатов И. И., Нейланд В. Я. Влияние внезапного изменения движения поверхности пластины на течение в ламинарном пограничном слое в сверхзвуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ. — 1982. — Т. 13, № 5.

Поступила 18/X 1986 г.

УДК 532.5

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С РАЗРЫВАМИ ВИХРЯ

В. А. Владимиров

(Новосибирск)

В гидродинамике идеальной жидкости широко используются решения с разрывами завихренности. Они возникают, например, в задачах склейки потенциальных и вихревых течений [1]. В настоящей работе рассматривается задача устойчивости таких течений в плоской постановке. Получен интеграл линеаризованных уравнений движения, представляющий собой квадратичную форму полей возмущений скорости, вихря и нормального смещения поверхности разрыва. Условия положительной определенности этой формы приводят к достаточным условиям устойчивости в среднеквадратическом, обобщающим известные [2—4] для течений с непрерывной завихренностью. Приведены примеры устойчивых течений, включающие потоки в криволинейной щели, плоскопараллельные и круговые течения. При кусочно-постоянной завихренности для течений последних двух типов даны условия нелинейной устойчивости.

1. Основное течение и класс возмущений. Изучаются плоские движения идеальной несжимаемой однородной по плотности жидкости в области τ с неподвижной непроницаемой границей $\partial\tau$. Результаты справедливы для областей τ достаточно общего вида, однако для определенности речь пойдет о криволинейном кольце (замкнутой щели), граница которого составлена из замкнутых контуров R_+ и R_- . В декартовых координатах x, y задано стационарное течение с полями x -, y -компонент скорости, функцией тока, вихрем и давлением:

$$(1.1) \quad U(\mathbf{x}), V(\mathbf{x}), \Psi(\mathbf{x}), \Omega(\mathbf{x}), P(\mathbf{x}), \mathbf{x} \equiv (x, y), U = -\Psi_y, \\ V = \Psi_x, \Omega \equiv V_x - U_y.$$

Индексами из независимых переменных обозначаются частные производные. Предполагается, что U и V непрерывны, а их первые и вторые производные непрерывны почти везде в τ , за исключением фиксированных кривых R , на которых Ω имеет конечные разрывы. Для определенности исследуется течение с замкнутыми линиями тока $\vec{\Psi} = \text{const}$, каждая из которых охватывает внутреннюю границу кольца. Единственная замкну-