УДК 519.624.3

ДИСКРЕТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. Ф. Воеводин, О. А. Фроловская

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mails: afvoevod@mail.ru, oksana@hydro.nsc.ru

С помощью сопряженных уравнений разработан метод решения краевых задач для уравнений второго и третьего порядков. С использованием метода факторизации трехточечная краевая задача для уравнения третьего порядка сведена к системе уравнений первого и второго порядков. Для решения уравнения второго порядка строится дискретная задача, которая затем используется при решении основной задачи. Особенность метода заключается в том, что при построении дискретных (разностных) краевых задач не используются аппроксимации дифференциальных операторов. Метод обобщается на решение уравнений более высоких порядков.

Ключевые слова: краевая задача, сопряженное уравнение, разностная схема.

DOI: 10.15372/PMTF20210603

Введение. В данной работе предложен численный метод решения многоточечных краевых задач для линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Основная идея метода заключается в сведении решения задачи для уравнения третьего порядка к решению краевой задачи для уравнения второго порядка, которое решается методом прогонки [1]. В отличие от предложенных ранее методов [2] при использовании данного метода не требуется представление решения в виде комбинации частных решений. Кроме того, метод позволяет рассматривать более широкий класс задач, в том числе с малым параметром при старшей производной. Точность метода исследовалась на примере задачи о деформировании трехслойной опертой балки [2], решение которой представляет практический интерес.

1. Краевая задача для уравнения третьего порядка. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ рассматривается краевая задача для уравнения

$$L_3 y(x) \equiv y''' + u(x)y''(x) + v(x)y'(x) + w(x)y(x) = f(x), \qquad (1)$$

где $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $f(x)$ — кусочно-гладкие функции на отрезке $[0,1]$, причем $w(x) \geqslant w_0 > 0$.

Будем считать, что на левом и правом концах отрезка $[0,1]$ задано по одному условию, третье условие задано в некоторой точке x_*. Пусть для уравнения (1) краевые условия формулируются в виде

$$x = 0, \qquad \theta_0 y'(0) + \gamma_0 y(0) = \psi_0; \tag{2}$$

$$x = 1, \qquad \theta_1 y'(1) + \gamma_1 y(1) = \psi_1; \tag{3}$$

$$x = x_*, \qquad \theta_* y'(x_*) + \gamma_* y(x_*) = \psi_*, \tag{4}$$

где $x_* \in (0, 1)$.

Особенность двухточечной краевой задачи для уравнения третьего порядка заключается в том, что число граничных условий на левом и правом концах отрезка не совпадает.

Для построения дискретного аналога задачи (1)–(4) введем на отрезке $[0, 1]$ сетку с узлами $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_*} < \ldots < x_N = 1$. В общем случае шаг разностной сетки $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, N)$ может быть неравномерным.

Используя способ факторизации [1], представим оператор задачи (1) в виде произведения двух операторов

$$L_3 y = L_1 L_2 y, \tag{5}$$

где L_1, L_2 — операторы первого и второго порядков:

$$L_1 = D + c_1 E, \qquad L_2 = D^2 + b_2 D + c_2 E,$$

$D = d/dx$; E — тождественный оператор $(Ey(x) = y(x))$. В результате получаем систему уравнений для определения $c_1(x)$, $b_2(x)$, $c_2(x)$:

$$b_2 + c_1 = u; \tag{6}$$

$$b_2' + c_2 + c_1 b_2 = v; \tag{7}$$

$$c_2' + c_1 c_2 = w. \tag{8}$$

Начальные условия для уравнений (7), (8) определяются из граничных условий (2), (3).

Вводя в (5) обозначение

$$L_2 y = z(x), \tag{9}$$

получаем уравнение

$$L_1 z = f(x). \tag{10}$$

Пусть начальное условие для уравнения (10) задано в виде $z(0) = z_0$, причем неизвестный параметр z_0 определяется в ходе решения задачи. Уравнение (10) однозначно разрешимо:

$$z(x) = \frac{z_0}{\mu(x)} + q(x). \tag{11}$$

Здесь

$$\mu(x) = \exp\Big(\int_0^x c_1(t)\,dt\Big), \qquad q(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_0^x \mu(t) f(t)\,dt.$$

Определив коэффициенты оператора L_2 из системы уравнений (6)–(8), уравнение (9) можно решить с использованием изложенного ниже метода.

2. Формулировка разностной задачи для уравнения второго порядка. Рассматривается краевая задача для уравнения

$$L_2 y(x) \equiv -(\sigma y')' + v y' + w y = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{12}$$

где $\sigma(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $f(x)$ — заданные кусочно-гладкие функции. Согласно (9) $f(x) = z(x)$, причем $\sigma(x) \geqslant \sigma_{\min} > 0$, $\sigma'(x) > 0$, $w(x) \geqslant w_{\min} > 0$, $w(x) - v'(x) \geqslant 0$. Граничные условия для уравнения (12) формулируются в стандартном виде

$$\theta_0 y(0) - \eta_0 \sigma y'(0) = \psi_0; \tag{13}$$

$$\theta_1 y(1) + \eta_1 \sigma y'(1) = \psi_1, \tag{14}$$

где $\theta_r \geqslant 0$, $\eta_r \geqslant 0$ $(r = 0, 1)$ и $\theta_r + \eta_r \neq 0$ — коэффициенты.

Для дифференциального оператора $L_2 y(x)$ существует сопряженный оператор $L_2^* \gamma(x)$ [2, 3], т. е. для уравнения (12) существует сопряженное уравнение, которое можно представить в форме [3]

$$L_2^* \gamma(x) \equiv (\sigma\gamma')' + (v\gamma)' - w\gamma = 0. \tag{15}$$

Исходную область $x \in [0, 1]$ разобьем на N элементарных отрезков с координатами концов x_i $(i = 0, \ldots, N)$:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i*} < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Определим на отрезке $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ скалярное произведение

$$(\gamma, L_2 y) \equiv \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma L_2 y \, dx,$$

при этом для сопряженного уравнения зададим граничные условия $\gamma(x_{i-1}) = 0$, $\gamma(x_i) = 1$. Тогда получаем

$$(\gamma, L_2 y) = -(\sigma y')_i + (\sigma\gamma' y)_i - (\sigma\gamma' y)_{i-1} + (vy)_i. \tag{16}$$

Аналогично определим на отрезке $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, N-1)$ решение $\bar\gamma(x)$ сопряженного уравнения (15) с граничными условиями $\bar\gamma(x_i) = 1$, $\bar\gamma(x_{i+1}) = 0$ и скалярное произведение

$$(\bar\gamma, L_2 y) = (\sigma y')_i + (\sigma\bar\gamma' y)_{i+1} - (\sigma\bar\gamma' y)_i - (vy)_i. \tag{17}$$

Складывая уравнения (16) и (17), получаем систему разностных уравнений второго порядка на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$-A_i y_{i-1} + B_i y_i - C_i y_{i+1} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma(x) f(x)\, dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \bar\gamma(x) f(x)\, dx. \tag{18}$$

Здесь

$$A_i = (\sigma\gamma')_{i-1}, \qquad B_i = (\sigma\gamma')_i - (\sigma\bar\gamma')_i, \qquad C_i = -(\sigma\bar\gamma')_{i+1}.$$

Замыкая систему уравнений (18) граничными условиями (13), (14), имеем

$$B_0 y_0 - C_0 y_1 = \varphi_0, \qquad -A_N y_{N-1} + B_N y_N = \varphi_N, \tag{19}$$

где

$$B_0 = \theta_0 - \eta_0((\sigma\bar\gamma')_0 + v_0), \qquad C_0 = -\eta_0 \sigma_1 \bar\gamma_1',$$

$$A_N = \eta_1 (\sigma\gamma')_{N-1}, \qquad B_N = \theta_1 + \eta_1((\sigma\gamma')_N + v_N),$$

$$\varphi_0 = \psi_0 + \eta_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} \bar\gamma(x) f(x)\, dx, \qquad \varphi_N = \psi_1 + \eta_1 \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} \gamma(x) f(x)\, dx.$$

Коэффициенты разностных уравнений (18) определяются через решения сопряженных уравнений для $\gamma(x)$ и $\bar{\gamma}(x)$, которые могут быть получены с помощью преобразования Риккати и задаются формулами [1]

$$\gamma(x) = \frac{1}{1-\delta_i}\,[(\mu^+(x_i))^{-1}\mu^+(x) - \delta_i\mu^-(x)],$$

$$\bar{\gamma}(x) = \frac{1}{1-\delta_{i+1}}\,[(\mu^-(x_i))^{-1}\mu^-(x) - \delta_{i+1}\mu^+(x)].$$

Здесь $\mu^+(x)$, $\mu^-(x)$ — решения уравнений

$$(\mu^\pm(x))' = \alpha^\pm\mu^\pm(x), \qquad \mu^+(x_{i-1}) = 1, \quad \mu^-(x_i) = 1,$$

$$\delta_i = \delta^+(x_i)\delta^-(x_{i-1}), \qquad \delta^+(x) = \exp\Big(-\int\limits_{x_{i-1}}^{x} \omega^+(t)\,dt\Big), \qquad \delta^-(x) = \exp\Big(\int\limits_{x}^{x_i} \omega^-(t)\,dt\Big),$$

$\omega^\pm = (\alpha^\pm + v)/\sigma$; $\alpha^+(x)$, $\alpha^-(x)$ — положительное и отрицательное решения уравнения Риккати

$$\alpha' + \frac{\alpha(\alpha+v)}{\sigma} = w - v' \tag{20}$$

с начальными условиями $\alpha(x_{i-1}) = \alpha^+_{i-1} > 0$, $\alpha(x_i) = \alpha^-_i < 0$.

Отметим следующие важные свойства данных решений. Во-первых, производные этих решений знакопостоянны ($\gamma'(x) > 0$, $\bar{\gamma}'(x) < 0$), во-вторых, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ и $0 \leqslant \bar{\gamma} \leqslant 1$, т. е. в матрице системы разностных уравнений (18) преобладают диагональные элементы и она не вырождена. Тогда система уравнений (18) может быть решена методом прогонки.

Разностная задача (18) является точным дискретным аналогом краевой задачи для дифференциального уравнения (12). Оценка числа обусловленности для таких задач получена в [1]:

$$\|A^{-1}\| \leqslant CN$$

(A — матрица разностных уравнений (18); $C > 0$ — константа).

3. Метод прогонки для решения системы разностных уравнений второго порядка (18). Разностные уравнения (18) представим следующим образом:

$$-A_i y_{i-1} + B_i y_i - C_i y_{i+1} = D_i z_0 + \Phi_i. \tag{21}$$

Здесь коэффициенты D_i, Φ_i с учетом представления (11) находятся из соотношений

$$D_i = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\gamma(x)}{\mu(x)}\,dx - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\bar{\gamma}(x)}{\mu(x)}\,dx,$$

$$\Phi_i = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma(x)q(x)\,dx - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{\gamma}(x)q(x)\,dx.$$

Поскольку значение z_0 неизвестно, для решения уравнений (21) применим метод параметрической прогонки [4]. Решение уравнения (21) будем искать в виде

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i + z_0\omega_i, \qquad i = 1,\dots,N-1. \tag{22}$$

С учетом граничных условий (19) прогоночные коэффициенты α_i, β_i, ω_i вычисляются по рекуррентным формулам

$$\alpha_0 = \frac{C_0}{B_0}, \qquad \beta_0 = \frac{\varphi_0}{B_0}, \qquad \omega_0 = 0,$$
$$\alpha_i = \frac{C_i}{B_i - A_i\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\Phi_i + A_i\beta_{i-1}}{B_i - A_i\alpha_{i-1}}, \quad \omega_i = \frac{D_i + A_i\omega_{i-1}}{B_i - A_i\alpha_{i-1}} \quad (i = 1, \ldots, N-1). \tag{23}$$

Наряду с прогонкой (22) проведем "встречную" прогонку. Предположим, что существуют числа $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j$ и $\bar{\omega}_j$, при которых в уравнении (21)

$$y_j = \bar{\alpha}_j y_{j-1} + \bar{\beta}_j + z_0\bar{\omega}_j, \qquad j = N, \ldots, 1. \tag{24}$$

При этом для коэффициентов $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j$, $\bar{\omega}_j$ выполняются соотношения

$$\bar{\alpha}_N = \frac{A_N}{B_N}, \qquad \bar{\beta}_N = \frac{\varphi_N}{B_N}, \qquad \bar{\omega}_N = 0,$$
$$\bar{\alpha}_j = \frac{A_j}{B_j - C_j\bar{\alpha}_{j+1}}, \quad \bar{\beta}_j = \frac{\Phi_j + C_j\bar{\beta}_{j+1}}{B_j - C_j\bar{\alpha}_{j+1}}, \quad \bar{\omega}_j = \frac{D_j + C_j\bar{\omega}_{j+1}}{B_j - C_j\bar{\alpha}_{j+1}} \quad (j = N-1, \ldots, 1). \tag{25}$$

Из представлений (22), (24) при $i = i_*$, $j = i_* + 1$ находим неизвестный параметр z_0:

$$z_0 = \frac{1 - \alpha_{i*}\bar{\alpha}_{i*+1}}{\omega_{i*} + \alpha_{i*}\bar{\omega}_{i*+1}}\, y_{i*} - \frac{\beta_{i*} + \alpha_{i*}\bar{\beta}_{i*+1}}{\omega_{i*} + \alpha_{i*}\bar{\omega}_{i*+1}} \tag{26}$$

и затем вычисляем y_i $(i = N, \ldots, 0)$:

$$y_N = \frac{\varphi_N + A_N(\beta_{N-1} + z_0\omega_{N-1})}{B_N - A_N\alpha_{N-1}},$$
$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i + z_0\omega_i, \qquad i = N-1, \ldots, 0. \tag{27}$$

4. Пример расчета. В качестве примера рассматривалась краевая задача для уравнения трехслойной балки [2]

$$y''' - k^2 y' + a = 0 \tag{28}$$

с граничными условиями

$$y'(0) = y'(1) = 0, \qquad y(1/2) = 0, \tag{29}$$

где k^2, a — заданные параметры. Точное решение этой задачи задается формулой [2]

$$y(x) = \frac{a}{k^2}\Big(x - \frac{1}{2}\Big) + \frac{a}{k^3}\Big[\operatorname{sh}\Big(\frac{k}{2}\Big) - \operatorname{sh}(kx) + \operatorname{th}\Big(\frac{k}{2}\Big)\Big(\operatorname{ch}(kx) - \operatorname{ch}\Big(\frac{k}{2}\Big)\Big)\Big]. \tag{30}$$

Для решения уравнения (28) с граничными условиями (29) использовался предлагаемый подход. Для данной задачи оператор (5) принимает вид

$$L_3 y = L_1 L_2 y = D(D^2 - k^2 E)y.$$

Тогда функция

$$z(x) = -ax + z_0$$

является решением задачи

$$L_1 z = -a, \qquad z(0) = z_0.$$

Для определения z_0 используется третье из условий (29) при $x = 1/2$ и в (26) следует положить $y_{i*} = 0$.

Решение разностного уравнения y_i и точное решение y

h_i	x	y_i	y
0,1	0	−0,010 013	−0,012 107
	1	0,010 013	0,012 107
0,01	0	−0,011 911	−0,012 107
	1	0,011 911	0,012 107
0,001	0	−0,012 088	−0,012 107
	1	0,012 088	0,012 107
0,0001	0	−0,012 105	−0,012 107
	1	0,012 105	0,012 107

С использованием метода факторизации уравнения второго порядка

$$L_2 y = z(x), \qquad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

можно показать, что уравнение (20) имеет два решения: $\alpha^+ = k > 0$, $\alpha^- = -k < 0$.

Коэффициенты уравнений (21) вычисляются следующим образом:

$$A_i = \frac{2k\sqrt{\delta_i}}{1-\delta_i}, \quad B_i = \frac{2k(1-\delta_i\delta_{i+1})}{(1-\delta_i)(1-\delta_{i+1})}, \quad C_i = \frac{2k\sqrt{\delta_{i+1}}}{1-\delta_{i+1}},$$

$$D_i = -\frac{1-\sqrt{\delta_i}}{k(1+\sqrt{\delta_i}\,)} - \frac{1-\sqrt{\delta_{i+1}}}{k(1+\sqrt{\delta_{i+1}}\,)},$$

$$\Phi_i = \frac{2a}{k(1-\delta_i)(1-\delta_{i+1})}\big((1-\delta_i\delta_{i+1})x_i - \sqrt{\delta_i}\,(1-\delta_{i+1})x_{i-1} - \sqrt{\delta_{i+1}}\,(1-\delta_i)x_{i+1}\big).$$

Здесь

$$\delta_i = \exp\left(-2k(x_i - x_{i-1})\right), \qquad \delta_{i+1} = \exp\left(-2k(x_{i+1} - x_i)\right).$$

Далее по формулам (23), (25) находим прогоночные коэффициенты, после чего с использованием (26) определяем z_0 и, наконец, по формулам (27) вычисляем значения y_i $(i = 0, \ldots, N)$ в узлах сетки.

В таблице приведены результаты численного решения задачи (28), (29) с использованием предлагаемого метода для значений параметров $a = 1$, $k = 5$ и различных шагов сетки $h_i = x_i - x_{i-1}$. Значения y_i, полученные этим методом, хорошо согласуются с соответствующими значениями y, вычисленными по точной формуле (30).

Заключение. Основная особенность предлагаемого в работе подхода к построению дискретной (разностной) формы краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения заключается в том, что разностная задача строится без использования аппроксимации дифференциальных операторов. Такой подход позволяет эффективно решать сингулярно возмущенные задачи [1]. Кроме того, точность решения дискретной задачи определяется не величиной шага разностной сетки $h_i = x_i - x_{i-1}$, а точностью вычисления интегралов в правой части системы (18) разностной задачи, которые могут быть вычислены независимо с любой требуемой точностью. Метод обобщается на решение краевых задач для уравнений более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воеводин А. Ф.** Метод сопряженных операторов для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 251–260.

2. **На Ц.** Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982.
3. **Коллатц Л.** Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.
4. **Воеводин А. Ф.** Методы решения одномерных эволюционных систем / А. Ф. Воеводин, С. М. Шугрин. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.

Поступила в редакцию 28/VIII 2020 г.,
после доработки — 14/X 2020 г.
Принята к публикации 30/XI 2020 г.