ПМТФ, № 1, 1963

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛАЗМЕ

Ю. Л. Климонтович

(*Москва*)

Строится система уравнений для первых функций распределения и пространственной спектральной функции напряженности электрического поля для области излучения — температуры плазменных волн. Исходной служит система микроскопических уравнений для фазовой плотности заряженных частиц различных компонент плазмы и микроскопической напряженности электрического поля.

При указанных в работе условиях полученная система уравнений описывает развитие и распад однородной турбулентности в плазме. В гидродинамические уравнения входят декремент затухания плазменных волн и температура излучения.

Обозначения

N_a — фазовая плотность компоненты,
$\mathbf{E}^\circ$ — микроскопическая напряженность электрического поля,
$\mathbf{H}^\circ$ — микроскопическая напряженность магнитного поля,
$\langle\ \rangle$ — статистическое усреднение,
$\langle\ \rangle_{T,V}$ — усреднение по временному интервалу T и объему V,
$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}^\circ \rangle$, $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}^\circ \rangle$,
δN_a, $\delta\mathbf{H}$, $\delta\mathbf{E}$ — отклонения от средних значений,
f_a — первая функция распределения частиц компоненты a,
g_{ab} — корреляционная функция частиц компонент a, b,
$(\ )_\mathbf{k}$ — пространственная спектральная функция,
$(\ )_{\omega,\mathbf{k}}$ — пространственно временная спектральная функция,
n_a — средняя концентрация частиц,
$\rho_a(\mathbf{q}, t)$ — концентрация,
$\mathbf{U}_a(\mathbf{q}, t)$ — скорость,
T_a — температура частиц,
T^* — температура излучения,
e_a — заряд частицы,
m_a — масса частицы,
ω — частота,
$\mathbf{k}$ — волновой вектор,
$\omega_\mathbf{k}$ — частота плазменных колебаний с волновым вектором $\mathbf{k}$,
ω_L — частота Ленгмюра,
$\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ — диэлектрическая проницаемость,
ε', ε'' — действительная и мнимая части $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$,
$\gamma(\mathbf{k})$ — декремент затухания,
$\gamma_{\min}$ — минимальный декремент затухания,
τ_r — время релаксации,
τ_c — время корреляции,
$\tau_{\max}$ — максимальное время корреляции,
r_d — радиус Дебая,
$\varkappa$ — постоянная Больцмана,
D_{ij}^a — коэффициент диффузии,
A_i^a — коэффициент трения.

Индексы: нижние, а также верхние индексы a и b означают номера компонент плазмы; два индекса ab рядом означают, что функция относится к двум компонентам; индекс $\to$ означает, что функция относится к области больших значений k (область столкновений), индекс * — область малых значений k (область излучения): индекс плюс (минус) означает, что функция будет аналитической в верхней (нижней) полуплоскости комплексной частоты; индекс α означает номер корня уравнения $\varepsilon'(\omega_\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 0$; нижний индекс 1(2) у функций δN_a, $\delta\mathbf{j}$ означает, что они относятся к резонансной (нерезонансной) областям.

§ 1. К постановке задачи. Микроскопическое состояние плазмы в момент t можно считать заданным, если известны значения микроскопических фазовых плотностей

$$N_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N_a} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i(t))\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))$$

для каждой компоненты плазмы a и значения микроскопических напряженностей электрического и магнитного полей $\mathbf{E}^\circ(\mathbf{q}, t)$, $\mathbf{H}^\circ(\mathbf{q}, t)$. Для функций N_a, $\mathbf{E}^\circ$, $\mathbf{H}^\circ$ имеется замкнутая система уравнений [1-2]

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{q}} + e_a\left(\mathbf{E}^\circ + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}^\circ]\right)\frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{p}} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^\circ = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}^\circ}{\partial t} + 4\pi\sum_a e_a\int \mathbf{v}N_a\,d\mathbf{p}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}^\circ = 0 \qquad (1.2)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^\circ = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}^\circ}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}^\circ = 4\pi\sum_a e_a\int N_a\,d\mathbf{p} \qquad (1.3)$$

При таком подходе задача статистической теории неравновесных процессов в плазме сводится к определению моментов случайных функций N_a, $\mathbf{E}^\circ$, $\mathbf{H}^\circ$, через которые могут быть выражены любые характеристики плазмы. Простейшими будут первые моменты

$$\langle N_a\rangle = n_a f_a, \qquad \langle \mathbf{E}^\circ\rangle = \mathbf{E}, \qquad \langle \mathbf{H}^\circ\rangle = \mathbf{B}$$

Здесь $n_a = N_a/V$ — средняя концентрация частиц компоненты a, f_a — соответствующая первая функция распределения, усреднение производится по ансамблю.

При усреднении системы уравнений (1.3) не получается замкнутая система уравнений, так как в нее, кроме первых, входят вторые моменты $\langle \mathbf{E}^\circ N_a\rangle$, $\langle \mathbf{H}^\circ N_a\rangle$. В системе уравнений для вторых моментов, которая следует из (1.3), входят третьи моменты и т. д. Положение здесь аналогично тому, которое имеет место в методе Н. Н. Боголюбова [3] при получении цепочки уравнений для функций распределения, или в методе функций Грина [4].

Во многих случаях, однако, достаточно ограничиться вторыми моментами, пренебрегая всеми высшими центральными моментами, начиная с третьих. При этом получаем замкнутую систему уравнений для первых моментов $\langle N_a\rangle$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и вторых центральных моментов $\langle \delta N_a \delta N_b\rangle$, $\langle \delta E_i \delta E_j\rangle$ и т.д. [1,2,5,6]. Для кулоновской плазмы такое приближение приводит к уравнениям, эквивалентным системе уравнений для первых функций распределения f_a и корреляционных функций g_{ab} работы [3].

Однако полученная таким путем замкнутая приближенная система уравнений для первых и вторых моментов еще слишком сложна, поэтому возникает вопрос о том, при каких условиях и в какой степени возможно дальнейшее ее упрощение.

В указанной работе Н. Н. Боголюбова [3] была поставлена задача отыскания таких решений уравнений для корреляционных функций g_{ab} (или для вторых моментов $\langle \delta N_a \delta N_b\rangle$) в случае кулоновской плазмы, при которых корреляционные функции зависят от времени не явно, а лишь посредством первых функций распределения $f_a(q, p, t)$. Успех в этом направлении для случая пространственно однородной плазмы был достигнут в недавних работах Балеску [7] и Ленарда [8] для классического и в работах В. П. Силина [9] и Балеску, Тэйлора [10] для квантового случаев.

Исключая при помощи полученного в этих работах решения корреляционные функции из уравнений (1.1) для $\langle N_a\rangle$ (или f_a), приходим к замкнутым уравнениям только для первых функций распределения f_a — кинетическим уравнениям.

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij}^{a\to}\frac{\partial f_a}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i}(A_i^{a\to} f_a) \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (1.4)$$

Здесь

$$D_{ij}^{a\to} = \sum_b 2e_a^2 e_b^2 n_b \int \frac{k_i k_j / k^4}{|\varepsilon(\mathbf{kv}, k)|^2}\,\delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}')\, f_b\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{p}' \qquad (1.5)$$

$$A_i^{a\to} = \sum_b 2e_a^2 e_b^2 n_b \int \frac{k_i k_j / k^4}{|\varepsilon(\mathbf{kv}, \mathbf{k})|^2}\,\delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}')\,\frac{\partial f_b}{\partial p_j'}\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{p}' \qquad (1.6)$$

соответствующие коэффициенты диффузии и систематического трения, обусловленные «столкновениями» заряженных частиц.

Уравнение (1.4) отличается от известного кинетического уравнения Ландау более точным учетом поляризации среды в интеграле столкновений. Приближение Ландау соответствует случаю, когда в выражениях (1.5), (1.6) диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ полагается равной единице, а интегрирование по k ограничивается условием $k > 1/r_d$, где r_d — радиус Дебая.

Кинетическое уравнение (1.4) описывает процесс установления равновесного состояния в плазме за счет столкновений. Обозначим соответствующее время релаксации через τ_r.

Кроме τ_r, в однородной плазме существует другое характерное время $\tau_c(\mathbf{k})$ — время корреляции случайных возмущений в плазме. Это время существенно зависит от полнового числа k. При уменьшении k время τ_c, вообще говоря, растет. В области значений k, при которых существуют плазменные волны, $\tau_c \sim 1/\gamma(\mathbf{k})$, где $\gamma(\mathbf{k})$ — декремент затухания плазменных волн.

Сформулируем условия, при которых возможно указанное выше решение уравнений для корреляционных функций g_{ab} (или $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle$) и при которых следовательно справедливы уравнения (1.4) с коэффициентами (1.5), (1.6).

1) Пространственный спектр функции g_{ab} ограничен со стороны малых k. Поэтому существует некоторое максимальное время корреляции

$$\tau_{\max} \sim 1/\gamma_{\min} \qquad (1.7).$$

2) Первые функции распределения f_a мало меняются за время $\tau_{\max}$. Это означает

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} \ll \frac{f_a}{\tau_{\max}} \quad \text{или} \quad \tau_r \gg \tau_{\max} \qquad (1.8)$$

Условие (1.8) означает, что в работах [5-10] учитывается вклад в интеграл столкновений только тех плазменных колебаний, декремент затухания которых достатчно велик по сравнению с $1/\tau_r$ (с частотой столкновений).

В работе [5] было показано, что при условиях (1.7, 8) через первые функции распределения f_a могут быть выражены не только одновременные, но и двухвременные (или более) корреляционные функции и соответствующие им пространственно временные спектральные функции фазовых плотностей, т. е. функции $(\delta N_a(\mathbf{p}) \delta N_b(\mathbf{p}'))_{\omega,\mathbf{k}}$. Используя эти выражения, можно найти пространственно временные спектральные функции для любых характеристик плазмы, например, зарядов, токов и т. д., некоторые из них рассматривались в работах [11-13]. Эти соотношения являются обобщением на случай неравновесной плазмы известных соотношений Найквиста, М. А. Леонтовича, С. М. Рытова [14-15].

В другой работе автора и В. П. Силина [6] была рассмотрена аналогичная задача для случая релятивистской плазмы. Полученные в этой работе соотношения позволяют при выполнении условий (1.8) выразить пространственно временные спектральные функции любых характеристик плазмы (как свободной, так и во внешнем магнитном поле) через первые функции распределения. Таким образом, и здесь задача может быть сведена к решению кинетических уравнений.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы обобщить результаты работ [5-10] на тот случай, когда или вследствие начальных условий, или кинетической неустойчивости возникает заметное возбуждение плазменных волн с малыми волновыми числами. Эта работа является развитием работы [16].

В работе [17] было показано, что если с самого начала исходить из модели, согласно которой состояние плазмы определяется переменными частиц и плазменных осцилляторов (использовать функцию Гамильтона, предложенную в работе Бома и Пайнса [18]), то корреляционные функции определяются не только первыми функциями распределения частиц, но и функцией распределения плазменных осцилляторов, т. е. нельзя получить замкнутых уравнений только для функций распределения частиц f_a.

При этом коэффициенты диффузии D_{ij}^a и трения A_i^a оказалось возможным представить в виде двух частей

$$D_{ij}^a = D_{ij}^{a\to} + D_{ij}^{a*}, \qquad A_i^a = A_i^{a\to} + A_i^{a*} \qquad (1.9)$$

Незамкнутость уравнений для функций распределения при этом проявляется в том, что коэффициент диффузии $D_{ij}^{a}*$, обусловленный излучением, содержит температуру плазменных осцилляторов $T^*(k)$, которая не может быть выражена через функции f_a.

В случае, когда температура плазменных осцилляторов $T^*(k)$ постоянна и практически не зависит от k (излучение квазиравновесно), для коэффициентов $D_{ij}^{a}*$, A_i^a* в работе [17] были получены следующие выражения:

$$D_{ij}^{a*} = \frac{e_a^2 \varkappa T^*}{2\pi} \int \frac{k_i k_j}{k^2} \delta(\omega_L - \mathbf{kv})\, d\mathbf{k}, \quad A_i^{a*} = \frac{e_a^2}{2\pi} \int \frac{k_i}{k^2} (\mathbf{kv})\, \delta(\omega_L - \mathbf{kv})\, d\mathbf{k} \qquad (1.10)$$

Учет столкновений в работе [17] соответствует приближению Ландау.

В коэффициент диффузии входит средняя энергия колебаний осцилляторов с волновым вектором $\mathbf{k}(\varkappa T^*)$. Поэтому, естественно, попытаться вместо системы уравнений для функций распределения частиц и осцилляторов получить более простую замкнутую систему уравнений для функций распределения частиц и функции $\varkappa T^*$.

Такая попытка была предпринята в работе Ю. А. Романова и Г. Филиппова [19]. Однако эта работа не содержит последовательной схемы вывода. Уравнение для $\varkappa T^*$ (ε_k в обозначениях [19]) по существу постулируется. Полученные уравнения не являются полными. Аналогичная задача рассматривается в работах [20–22] А. А. Веденова, Е. П. Велихова, Р. З. Сагдеева, У. Друммонда и Д. Пайнса [1].

В статьях [20–22] рассматриваются два различных приближения. Одно из них является квазилинейным приближением для кинетического уравнения с самосогласованным полем. Именно, уравнение с самосогласованным полем заменяется приближенной системой уравнений для усредненной по пространству и времени первой функции распределения и амплитуды электрического поля.

Второе приближение, рассмотренное в работах [20–22], соответствует использованию уравнения для плазмонов, которое по существу постулируется так же, как и в работе [19]. Полученная в работах [20–22] система уравнений, как будет видно из полученных ниже уравнений также не будет полной.

§ 2. Вывод уравнений для описания однородной турбулентности в случае кулоновской плазмы. В качестве исходной используем систему микроскопических уравнений [1–2] для случайных функций N_a, E°

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \boldsymbol{v} \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{q}} + e_a \mathbf{E}^\circ(\mathbf{q}, t) \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{p}} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}^\circ}{\partial t} + 4\pi \sum_a e_a \int \mathbf{v} N_a\, d\mathbf{p}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E}^\circ = 0 \qquad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^\circ = 4\pi \sum_a e_a \int N_a\, d\mathbf{p} \qquad (2.3)$$

Усредним уравнение (2.1). В пространственно однородной и изотропной плазме $\langle N_a \rangle = n_a f_a(\mathbf{p}, t)$, $\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}^\circ \rangle = 0$. Поэтому уравнение (2.1) после усреднения имеет вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial p} \langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle = -\frac{e_a}{(2\pi)^3 n_a} \frac{\partial}{\partial p_i} \int \frac{k_i}{k^2} \operatorname{Re} (\delta N_a (\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{k} \qquad (2.4)$$

Здесь $(\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}}$ — пространственная спектральная функция

$$\delta N_a = N_a - \langle N_a \rangle, \qquad \delta \mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ - \mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ$$

$$\langle \delta N_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\, \delta \mathbf{E}(\mathbf{q}', t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}}\, e^{ik(\mathbf{q}-\mathbf{q}')}\, d\mathbf{k}$$

Как и в работах [1,2,5,6], ограничиваемся вторыми моментами случайных функций N_a, E°, что является хорошим приближением для разреженной плазмы, когда число заряженных частиц в сфере с радиусом Дебая велико. В этом случае уравнения для δE_a, δE — линейны.

[1] Доклад на конференции по физике плазмы. Зальцбург, 1961.

Используя уравнения (2.1,2), для пространственных Фурье-компонент функций δN_a, $\delta\mathbf{E}$ получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \delta N_{a,\,\mathbf{k}}}{\partial t} + i\,(\mathbf{kv})\,\delta N_{a,\,\mathbf{k}} + e_a n_a \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -4\pi \sum_a e_a \int \mathbf{v}\,\delta N_{a,\,\mathbf{k}}\, d\mathbf{p} = -4\pi\delta \mathbf{j}_{\mathbf{k}} \tag{2.6}$$

Используя (2.2) для спектральной функции $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_k$, имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}} = -8\pi \sum_a e_a \int \frac{(\mathbf{kv})}{k^2} \operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{p} = -8\pi \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}} \tag{2.7}$$

В уравнения (2.4,7) входит одна и та же функция $(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}$. Покажем, что она может быть приближенно выражена через функции f_a, $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^*$, где $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^*$ — спектральная функция для значений k, соответствующих малым декрементам затухания. В результате можно получить замкнутую систему уравнений для функций f_a, $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_k^*$.

Сформулируем предположения, при которых это возможно.

Обозначим через ω_k — характерную частоту плазменных колебаний. Будем считать, что условия (1.8) не выполняются, а спектр таков, что возможно $\tau_r \sim \tau_{\max}$.

Теперь τ_r — время, за которое заметно меняется хотя бы одна из функций f_a, $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^*$. При этом условии существуют волны, декремент затухания которых $\gamma \sim 1/\tau_r$.

(1) Введем величину Δ так, что

$$\omega_k \gg \Delta \gg 1/\tau_r \sim 1/\tau_{\max} \tag{2.8}$$

Используя это неравенство, можем разбить область значений волновых чисел на две области: больших k, когда $\gamma(\mathbf{k}) \gg \Delta$, и малых k, когда $\gamma(\mathbf{k}) \ll \Delta$. Всем функциям, которые относятся к области больших k, будем приписывать верхний индекс $\rightarrow$, а относящимся к области малых k — верхний индекс*. Таким образом

$$\gamma^{\rightarrow}(\mathbf{k}) \gg \Delta \gg \gamma^*(\mathbf{k}) \tag{2.9}$$

Из условий (2.8), (2.9) следует, что

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} \sim \frac{f_a}{\tau_{\max}} \ll \Delta f_a, \qquad \frac{\partial(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_k^*}{\partial t} \sim \frac{(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^*}{\tau_{\max}} \ll \Delta\,(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* \tag{2.10}$$

(2) В области малых k функция $(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}}$ — медленно меняющаяся функция времени и

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}} \sim \frac{(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}}}{\tau_r} \ll \Delta\,(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}} \tag{2.11}$$

(3) Функции N_a, $\mathbf{E}^\circ$ не будут медленно меняющимися. Например, при малых k они могут заметно меняться за период плазменных колебаний $2\pi/\omega_k$. Поэтому моменты случайных функций N_a, $\mathbf{E}^\circ$, которые получаются усреднением по ансамблю, тоже могут быть быстро меняющимися функциями времени, т. е. процесс является существенно нестационарным.

Чтобы удовлетворить условиям (2.10,11) предполагаем, что знак $\langle\ \rangle$ означает усреднение не только по ансамблю систем, но и по интервалу времени $T \sim \Delta^{-1} \gg 2\pi/\omega_k$.

(4) При больших k практически для всех значений скорости

$$\mathbf{kv} \gg \Delta \tag{2.12}$$

При малых k возможны две области.

а) Область, в которой $|\omega_k - \mathbf{kv}| \ll \Delta$. Следуя работе Друммонда и Пайнса будем называть эту область резонансной, так как в ней возможно выполнение условия $\mathbf{kv} \sim \omega_k$.

б) Область, в которой $\mathbf{kv} \ll \Delta$. Эту область будем называть «нерезонансной». В ней $|\omega_k - \mathbf{kv}| \gg \Delta$

(5) Число резонансных частиц мало.

(6) Каждому значению k в области излучения соответствуют два одинаковых значения ω_k.

Вернемся к уравнениям (2.5,6). Используя одностороннее преобразование Фурье по времени

$$\delta N_{a,\,\omega,\,\mathbf{k}} = \int_0^\infty e^{-\Delta t + i\omega t} \delta N_{a,\,\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)\, dt \tag{2.13}$$

запишем уравнения для $\delta N_{a,\,\omega,\,\mathbf{k}}$, $\delta \mathbf{E}_{\omega,\,\mathbf{k}}$ в виде

$$\delta N_{a,\,\omega,\,\mathbf{k}} = \frac{i}{\omega - \mathbf{kv} + i\Delta} \left\{ \delta N_{a,\,\mathbf{k}}(\mathbf{p}, 0) - e_a n_a \delta \mathbf{E}_{\omega,\,\mathbf{k}} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \right\} \tag{2.14}$$

$$\delta \mathbf{E}_{\omega,\,\mathbf{k}} = -i \frac{4\pi}{\omega} \delta \mathbf{j}_{\omega,\,\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(0) \tag{2.15}$$

Из (2.14,15) находим

$$\delta \mathbf{E}_{\omega,\,\mathbf{k}} = \frac{1}{\varepsilon^+(\omega, \mathbf{k})} \left\{ \frac{4\pi}{\omega + i\Delta} \sum_a e_a \int \frac{\mathbf{v}' \delta N_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}', 0)}{\omega - \mathbf{kv}' + i\Delta} d\mathbf{p}' + i \frac{\delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(0)}{\omega + i\Delta} \right\} \tag{2.16}$$

Здесь введено обозначение для диэлектрической проницаемости[1]

$$\varepsilon^{\pm} = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{(\omega + i\Delta) k^2} \int \frac{(\mathbf{kv})(\mathbf{k}\partial f_a / \partial \mathbf{p})}{\omega - \mathbf{kv} \pm i\Delta} d\mathbf{p} = \varepsilon' \pm i\varepsilon'' \tag{2.17}$$

Ниже будут использованы следующие формулы, позволяющие находить пространственно временные и пространственные спектральные функции

$$\lim_{\Delta \to 0} 2\Delta \langle A_{\omega,\,\mathbf{k}} \overline{A}_{\omega,\,\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (AB)_{\omega,\,\mathbf{k}} \tag{2.18}$$

$$\langle A_{\omega,\,\mathbf{k}} \overline{B}_{\mathbf{k}'}(0) \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (AB)^+_{\omega,\,\mathbf{k}}, \quad (AB)_{\omega,\,\mathbf{k}} = (AB)^+_{\omega,\,\mathbf{k}} - (AB)^-_{\omega,\,\mathbf{k}} \tag{2.19}$$

$$\langle A_{\mathbf{k}}(t) \overline{B}_{\mathbf{k}'}(t) \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (AB)_{\mathbf{k}} \tag{2.20}$$

Подчеркнем, что согласно (2.8) предельный переход $\Delta \to 0$ означает, что $\Delta \ll \omega_{\mathbf{k}}$, но вместе с тем $\Delta \gg 1/\tau_r$. Поэтому спектральные функции $(AB)_{\omega,\,\mathbf{k}}$, $(AB)_{\mathbf{k}}$ могут быть медленно меняющимися функциями времени. Из (2.16), используя формулы (2.19,20), получим

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})^*_{\omega,\,k} = -\frac{8\pi^2}{k^2 \omega} \left(\frac{H^+}{\varepsilon^+} - \frac{H^-}{\varepsilon^-} \right)_{\omega,\,\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^+} - \frac{1}{\varepsilon^-} \right)_{\omega,\,k} (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})^*_{\mathbf{k}} \tag{2.21}$$

Здесь введены обозначения, соответствующие работам [5–10]

$$iH_1^{\pm}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_a e_a \int \frac{(\mathbf{kv})(\delta N_a(\mathbf{k}\delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}}}{\omega - \mathbf{kv} \pm i\Delta} d\mathbf{p}, \qquad H_2^{\mp} = -\overline{H}_1^{\pm} \tag{2.22}$$

В области излучения при $\gamma = \varepsilon'' \Big/ \left| \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right| \ll \Delta$

$$\lim_{\Delta \to 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^+(\omega, \mathbf{k})} - \frac{1}{\varepsilon^-(\omega, \mathbf{k})} \right\} = -2\pi i \operatorname{sign} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \delta(\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})) = -2\pi i B(\omega, \mathbf{k}) \tag{2.23}$$

[1] Здесь в выражении для ε не учтен вклад от столкновений.

Используя предположение (6)

$$\frac{B(\omega, \mathbf{k})}{\omega} = \frac{1}{\omega} \operatorname{sign} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \delta(\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})) = \frac{\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}})}{2} \tag{2.24}$$

С другой стороны, при предположении (6)

$$(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} = 2\pi \frac{\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}})}{2} (\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* = 2\pi \frac{B(\omega, \mathbf{k})}{\omega} (\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* \tag{2.25}$$

Используя формулы (2.23—25), из (2.21) находим

$$\left(\frac{H_1^+}{\varepsilon^+} - \frac{H_1^-}{\varepsilon^-}\right)_{\omega, \mathbf{k}} = 0, \qquad H_1^{\pm} = H_2^{\pm} \tag{2.26}$$

Это условие равенства нулю в области излучения скачка функций $H^{\pm} / \varepsilon^{\pm}$ будет использовано ниже.

Приступим теперь к выходу уравнений для функций f_a, $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^*$.

Представим функцию $\operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}$, через которую выражаются правые части уравнений (2.4,7), в виде

$$\operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}} = \operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^{\rightarrow} + \operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^*$$

Выражение для «столкновительной» части может быть получено известным путем [5-10]. Оно имеет вид

$$e_a \operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^{\rightarrow} = -\frac{4\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2} \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \sum_b 4\pi e_b^2 n_b \int \frac{\delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}') f_b(\mathbf{p}')}{|\varepsilon(\mathbf{kv}, \mathbf{k})|^2} d\mathbf{p}' +$$

$$+ 4\pi^2 e_a^2 n_a f_a \sum_b \frac{4\pi e_b^2 n_b}{k^2} \int \frac{\delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}')}{|\varepsilon(\mathbf{kv}, \mathbf{k})|^2} \mathbf{k} \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} d\mathbf{p}' \tag{2.27}$$

Из (2.27)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^{\rightarrow} = -4\pi(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^{\rightarrow} = 0 \tag{2.28}$$

Функцию $\operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^*$ представим в виде суммы двух частей, соответствующих резонансной и нерезонансной областям (предположение (4))

$$\operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^* = \operatorname{Re}(\delta N_{a,1}(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^* + \operatorname{Re}(\delta N_{a,2}(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^* \tag{2.29}$$

Соответственно этому

$$\operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* = \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}_1\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* + \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}_2\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* \tag{2.30}$$

Из уравнений (2.14,15) для нерезонансной области, используя (2.18,19), находим

$$\operatorname{Re}(\delta N_{a,2}(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\omega,\mathbf{k}}^* = \frac{e_a n_a}{\omega(\omega - \mathbf{kv})} \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\omega,\mathbf{k}}^* \tag{2.31}$$

и соответствующее выражение

$$\operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}_2\delta\mathbf{E})_{\omega,\mathbf{k}}^* = (\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) - 1) \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\omega,\mathbf{k}}^* \tag{2.32}$$

Проинтегрируем (2.32) по ω. Используя (2.30) и учитывая, что $\varepsilon'(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = 0$, получим

$$\operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}_2\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}_1\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^*, \quad \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}_1\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* \tag{2.33}$$

Аналогичным путем из (2.31)

$$\operatorname{Re}(\delta N_{a,2}(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^* = \sum_\alpha \frac{e_a n_a}{4\omega_{\mathbf{k},\alpha}(\omega_{\mathbf{k},\alpha} - \mathbf{kv})} \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}_1\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^* \quad (\alpha = 1, 2) \tag{2.34}$$

Таким образом, нерезонансные части функций (2.29,30) выражаются через резонансную часть функции $(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}}$.

Осталось найти выражения для резонансных частей функций (2.29,30). Для этого, используя уравнения (2.1,2), запишем интегральное уравнение для искомой функции $(\delta N_{a,1}(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))^*_{\mathbf{k}}$. При сделанных предположениях оно может быть записано в виде

$$\varepsilon^-(\mathbf{kv},\mathbf{k})\,(\delta N_{a,1}(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))^*_{\mathbf{k}} = i2\pi i\,\frac{4\pi e_a n_a}{(\mathbf{kv}-i\Delta)k^2}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_a}{\partial\mathbf{p}}\right)H_2^-(\mathbf{kv},\mathbf{k}) + \\ + \frac{ie_a n_a}{\mathbf{kv}-i\Delta}(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_a}{\partial\mathbf{p}}\right) + i4\pi e_a n_a f_a, \qquad \mathbf{kv}\gg\Delta \tag{2.35}$$

По форме это уравнение совпадает с соответствующим уравнением для функции $(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}^{\rightarrow}$.

Если использовать формулы (2.23,26), то оказывается возможным сразу выразить искомую функцию $\mathrm{Re}\,(\delta N_{a,1}(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))^*_{\mathbf{k}}$ через функции f_a, $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}}$. Соответствующее выражение имеет вид

$$e_a\,\mathrm{Re}\,(\delta N_{a,1}(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))^*_{\mathbf{k}} = -4\pi^2 e_a^2 n_a \frac{B(\mathbf{kv},\mathbf{k})}{\mathbf{kv}}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_a}{\partial\mathbf{p}}\frac{(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}}}{4\pi} + (\mathbf{kv})f_a\right) \tag{2.36}$$

Из этого выражения находим

$$\mathrm{Re}\,(\delta\mathbf{j}_1\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}} = -\sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2}\int\left(\mathbf{k}\frac{\partial f_a}{\partial\mathbf{p}}\frac{(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}}}{4\pi} + (\mathbf{kv})f_a\right)B(\mathbf{kv},\mathbf{k})\,d\mathbf{p} \tag{2.37}$$

Выражения (2.36, 37, 34, 33, 27) определяют искомые функции $\mathrm{Re}\,(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}$, $\mathrm{Re}\,(\delta N_a(\mathbf{k}\delta\mathbf{E}))_{\mathbf{k}}$, которые входят в уравнения (2.4,7) для функций f_a, $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}$. Учитывая, что $(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^{\rightarrow} = 0$, эти уравнения запишем в виде

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}(D_{ij}^{a\rightarrow} + D_{ij}^{a*})\frac{\partial f_a}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i}(A_i^{a\rightarrow} + A_i^{a*})f_a \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}} = -4\pi\,\mathrm{Re}\,(\delta\mathbf{j}_1\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}} \tag{2.39}$$

Правая часть последнего уравнения определяется выражением (2.37).

В уравнении (2.38) коэффициенты $D_{ij}^{a\rightarrow}$, $A_i^{a\rightarrow}$ определяются выражениями (1.5,6), в которых интегрирование производится по области непрозрачности $(\gamma\gg 1/\tau_r)$. Для области излучения

$$D_{ij}^{a*} = \frac{e_a^2}{2\pi}\int\frac{k_i k_j}{k^2}\frac{B(\mathbf{kv},\mathbf{k})}{kv}\frac{(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}}}{4\pi}d\mathbf{k} + \frac{e_a^2}{4(2\pi)^3}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\frac{k_i k_j\partial(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_{\mathbf{k}}/\partial t}{k^2\omega_{\mathbf{k},\alpha}(\omega_{\mathbf{k},\alpha}-\mathbf{kv})}d\mathbf{k} \tag{2.40}$$

$$A_i^{a*} = \frac{e_a^2}{2\pi}\int\frac{k_i}{k^2}B(\mathbf{kv},\mathbf{k})\,d\mathbf{k}$$

Коэффициент D_{ij}^{a*} состоит из двух частей, соответствующих резонансной (первый член) и нерезонансной области значений $\mathbf{kv}$.

Замкнутая система уравнений для функций f_a, $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^*$ может служить для описания некоторых случаев однородной турбулентности плазмы не связанных с гидродинамической неустойчивостью. Если корни уравнения $\varepsilon'(\omega,\mathbf{k}) = 0$ близки к ω_L, то система уравнений совпадает с полученной в работе [16].

Если два корня уравнения $\varepsilon'(\omega_{\mathbf{k}},\mathbf{k})$ не равны по величине, то вместо уравнения для $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}}^*$ будет два уравнения для двух функций, соответствующих разным корням. Число уравнений также увеличивается, когда число существенных корней уравнения $\varepsilon'(\omega,\mathbf{k}) = 0$ больше двух.

В заключение отметим, что соответствующие уравнения могут быть получены и в том случае, когда важен учет поперечного поля. В этом случае появляется еще дополнительное уравнение для спектральной функции напряженностей поперечного поля. Соответствующие уравнения приведены в работе [23].

Сравнение полученных уравнений с соответствующими результатами работ [19–22] показывает, что уравнения, полученные в этих работах не являются полными.

§ 3. Анализ полученных уравнений. Система уравнений (2.50, 47) имеет решение, соответствующее равновесному состоянию

$$f_a = (2\pi m_a \varkappa T)^{-3/2} \exp \frac{-p^2}{2m_a \varkappa T}, \qquad (\delta E \delta E)^*_{\mathbf{k}} / 4\pi = \varkappa T \tag{3.1}$$

При этом существенно, что распределение Максвелла обращает в нуль по отдельности члены правой части (2.50), описывающие столкновения заряженных частиц и излучение плазменных волн.

Таким образом, имеются два процесса, приводящие к установлению распределения Максвелла: столкновения и излучение плазменных волн. Оба эти процесса могут иметь разные времена релаксации.

При учете лишь столкновений из кинетического уравнения (1.4) вытекают три закона сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_a n_a \int \varphi_a(\mathbf{p}) f_a dp = 0, \qquad \varphi_a(\mathbf{p}) = 1, \mathbf{p}, p^2 / 2m_a \tag{3.2}$$

т. е. законы сохранения плотности числа частиц, плотности импульса и плотности кинетической энергии.

При учете излучения плазменных волн закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a d\mathbf{p} + \frac{1}{8\pi} \langle(\delta E \delta E)^*\rangle\Big) = 0 \quad \Big((\delta E \delta E)^* = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\delta E \delta E)^*_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}\Big) \tag{3.3}$$

В силу того что $\partial(\delta E \delta E)^{\to} / \partial t = 0$ в выражении (3.3) можно заменить $(\delta E \delta E)^*$ на $(\delta E \delta E)$.

Из уравнений (1.4) следует закон возрастания энтропии. Можно показать, что он, разумеется, остается в силе и при учете излучения. Для этого удобно использовать соответствующее рассматриваемому приближению уравнение для функции распределения плазменных колебаний.

Используя результаты предлагаемой работы, можно получить выражения для пространственно временных спектральных функций, т. е. обобщить результаты работы [5].

В рассматриваемом приближении пространственно временные спектральные функции также выражаются через f_a, $(\delta E \delta E)_{\mathbf{k}}^*$. Например, для спектральной функции $(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}$ имеем

$$(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{2\pi\delta(\omega - kv) f_a}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} dp + 2\pi \frac{B(\omega, \mathbf{k})}{\omega} (\delta E \delta E)^*_{\mathbf{k}} \tag{3.4}$$

Первый член относится к области непрозрачности $\gamma \gg 1 / \tau_r$, а второй к области излучения. В равновесном случае они объединяются и дают известное выражение [15]

$$(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi}{\omega} \frac{\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \varkappa T \tag{3.5}$$

Для получения гидродинамических уравнений при учете только столкновений можно исходить из уравнения (1.4) и использовать, например, метод Грэда [23], в котором функции f_a аппроксимируются конечным числом членов разложения по полиномам Чебышева — Эрмита. Первый член этого разложения соответствует локальному распределению Максвелла, которое характеризуется для каждой компоненты плазмы тремя гидродинамическими функциями ρ_a, $\mathbf{U}_a$, T_a — плотностью, скоростью и температурой. В этом приближении необратимость в уравнениях гидродинамики обусловлена процессами взаимного трения (возникает вследствие разности скоростей отдельных компонент) и теплообмена (возникает вследствие разности температур отдельных компонент). Если все температуры и скорости одинаковы, то получаем уравнения «идеальной жидкости», т. е. без диссипативных членов.

§ 4. Гидродинамические уравнения для плазмы при учете излучения плазменных волн. При учете излучения функция распределения, описывающая локальное состояние равновесия является более сложной. Именно, в этом случае имеет место распределение гаусса не только по скоростям, но и по переменным поля. Она характеризуется, кроме ρ_a, $\mathbf{u}_a$, T_a, еще двумя функциями для каждого значения волнового вектора $\mathbf{k}$ в области излучения: средней напряженностью электрического поля $\mathbf{E}_\mathbf{k}$ и соответствующим средним квадратичным отклонением$(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_\mathbf{k}$.

Рассмотрим здесь простейший случай, когда плотности всех компонент равны, $\mathbf{u}_a = 0$, $T_a = T$, $\mathbf{E} = 0$. Таким образом, гидродинамическое состояние характеризуем тремя функциями

$$\rho = \sum_a \rho_a,\ T,\ (\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})^*_\mathbf{k} = 4\pi\varkappa T^*_\mathbf{k}$$

Рассматриваем случай однородной плазмы, когда все эти функции зависят лишь от времени.

Таким образом, имеем две температуры, одна из которых характеризует среднюю кинетическую энергию частиц, а вторая интенсивность плазменных колебаний. Используя уравнения (2.47, 50), для функций ρ_0, T, $T_\mathbf{k}^*$ получаем уравнения

$$\partial\rho / \partial t = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{3}{2}\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{8\pi^3}\int\gamma(\mathbf{k}, T)(T_\mathbf{k}^* - T)\,d\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial T_k^*}{\partial t} = -2\gamma(\mathbf{k}, T)(T_\mathbf{k}^* - T) \tag{4.2}$$

Здесь, как и выше, γ — декремент затухания плазменных колебаний.

Система (4.2) описывает теплообмен между частицами и плазменным излучением. Состояние равновесия наступает при $T_\mathbf{k}^* = T$.

В рассмотренном примере состояние плазмы устойчиво в том смысле, что декремент затухания γ при всех значениях $T_\mathbf{k}^*$, T положителен.

Исходные уравнения для f_a, $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_\mathbf{k}^*$ могут описать и возникновение турбулентности, если имеет место кинетическая неустойчивость плазмы. Турбулентность может возникнуть и в том случае, если полный декремент $\gamma > 0$, а декременты отдельных компонент отрицательны. Это имеет место, например, в изотермической плазме при наличии в ней относительного движения электронов и ионов. В рамках сделанных предположений развитие турбулентности, как и в работах [19-22], ограничивается изменением функций f_a. В результате происходит распад турбулентности и установление равновесного состояния, когда f_a — распределение Максвелла. $T_\mathbf{k}^* = T$. Чтобы описать процесс возникновения турбулентности в рамках гидродинамических уравнений, следует также использовать аппроксимацию функций f_a через гидродинамические функции.

В предыдущих параграфах получены уравнения, позволяющие описывать турбулентное состояние пространственно однородной плазмы.

Возможен другой крайний случай, когда плазма неоднородна, но корреляционными функциями можно пренебречь. В этом случае в качестве исходных можно взять систему самосогласованных уравнений Власова.

Уравнения квазилинейного приближения [20-22] могут быть при определенных предположениях получены из уравнений с самосогласованным полем. Укажем здесь коротко на возможный вывод этих уравнений.

§ 5. Учет пространственной неоднородности плазмы. Уравнения «квазилинейного приближения». Исходной будет служить система уравнений для статистических средних

$$\langle N_a\rangle = n_a f_a, \qquad \langle \mathbf{E}^\circ\rangle = \mathbf{E} \tag{5.1}$$

Подчеркнем, что в однородной плазме (§ 2—4) $\mathbf{E} = 0$, т. е. самосогласованное приближение не имеет места. Функции f_a, $\mathbf{E}$ представим в виде

$$f_a = \langle f_a\rangle_{T_0 V} + \delta f_a, \qquad \mathbf{E} = \delta\mathbf{E}, \qquad \langle\mathbf{E}\rangle_{T,V} = 0 \tag{5.2}$$

Усреднение производится по объему системы V и по интервалу такому, что $\gamma \ll 1/T \sim \Delta \ll \omega_\mathbf{k}$. Если функция $\langle f_a\rangle_{T,V} = 0$ на границе, то уравнение для $\langle f_a\rangle_{T,V}$ имеет вид

$$\frac{\partial\langle b_a\rangle_{T,V}}{\partial t} = -e_a\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\langle\delta\mathbf{E}\delta f_a\rangle_{T,V} \equiv \frac{\partial}{\partial p_i}D_{ij}^a\frac{\partial\langle f_a\rangle_{T,V}}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i}A_i^a\langle f_a\rangle_{T,V} \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) похоже на (2.4), однако смысл правых частей различен.

Если существенны лишь два одинаковых корня уравнения $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 0$, то выражение для Фурье-компоненты $\mathbf{E_k}(t)$ средней напряженности поля можно представить в виде

$$\mathbf{E_k}(t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, t)\, e^{-i\omega_\mathbf{k} t} + \overline{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}, t)\, e^{i\omega_\mathbf{k} t} \tag{5.4}$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$ — медленно меняющаяся функция.

Методом, аналогичным изложенному в § 61 книги Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [14] и в § 4 книги В. П. Силина и А. А. Рухадзе [15], находим уравнение для $\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\omega_\mathbf{k}}(\omega_\mathbf{k}\varepsilon^+(\omega_\mathbf{k}, \mathbf{k}))\,\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)\right] = i\omega_\mathbf{k}\varepsilon^+(\omega_\mathbf{k}, \mathbf{k})\,\mathbf{E}(\mathbf{k}, t) + $$
$$+ 4\pi\sum_a e_a n_a\int \mathbf{v}\,\delta f_a(0, \mathbf{k}, \mathbf{p})\,d\mathbf{p} \tag{5.5}$$
$$|\omega_\mathbf{k} - \mathbf{kv}| \ll \omega_\mathbf{k}$$

Эта система уравнений позволяет найти амплитуду $\langle\delta\mathbf{E_k}\delta\overline{\mathbf{E}}_\mathbf{k}\rangle_T$ и фазу. Если начальная функция

$$\int\mathbf{v}\,\delta f_a(0, \mathbf{k}, \mathbf{p})\,d\mathbf{p} \quad \text{при } |\omega_\mathbf{k} - \mathbf{kv}| \ll \omega_\mathbf{k}$$

несущественна, то выбирая $\omega_\mathbf{k}$ так, что $\varepsilon'(\omega_k, k) = 0$, при условиях

$$\gamma(\mathbf{k}) \ll \omega_\mathbf{k}, \qquad \partial\omega_\mathbf{k}/\partial t \ll \gamma(\mathbf{k})\,\omega_\mathbf{k}$$

получаем уравнение для квадрата амплитуды

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\delta\mathbf{E_k}\delta\overline{\mathbf{E}}_\mathbf{k}\rangle_T = -2\gamma(\omega_\mathbf{k}, \mathbf{k})\,\langle\delta\mathbf{E_k}\delta\overline{\mathbf{E}}_\mathbf{k}\rangle_T \tag{5.6}$$

В том же приближении в уравнении (5.3) коэффициент диффузии

$$D_{ij}^a = \frac{\pi e_a^2}{V}\int\delta(\omega_\mathbf{k} - \mathbf{kv})\frac{k_i k_j}{k^2}\langle\delta\mathbf{E_k}\delta\overline{\mathbf{E}}_\mathbf{k}\rangle_T\,d\mathbf{k} + $$
$$+ \frac{e_a^2}{4V}\sum_\alpha\int\frac{k_i k_j}{k^2}\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k},\alpha} - \mathbf{kv})^2}\frac{\partial}{\partial t}\langle\delta\mathbf{E_k}\delta\overline{\mathbf{E}}_\mathbf{k}\rangle_T\,d\mathbf{k}, \qquad A_i^a = 0 \tag{5.7}$$

В работах [20-22] второй член в коэффициенте (5.7) отсутствует.

Замкнутая система уравнений (5.4,6) справедлива, когда уравнение

$\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 0$ имеет два одинаковых корня. Если существенных корней больше, то число уравнений для амплитуд соответственно увеличивается.

Чтобы учесть одновременно вклад и самосогласованного поля, и корреляционных эффектов, можно объединить правые части уравнений (2.38, 5.3).

В этом случае получаем замкнутую систему уравнений для функций $\langle f_a \rangle_{T,V}$, корреляционной функции $(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}}{}^*$ и квадрата амплитуды среднего поля $\langle \delta \mathbf{E}_k \delta \bar{\mathbf{E}}_k \rangle_T$, при помощи которой можно описать турбулентное состояние и в пространственно неоднородной плазме.

Следует помнить, что такой способ учета неоднородности плазмы является грубым. Он, в частности, не позволяет учесть граничные эффекты.

Пользуюсь случаем, чтобы поблагодарить В. П. Силина и А. А. Веденова за обсуждение вопросов, связанных с работой.

Поступила 15 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю. Л. О пространственно временных корреляционных функциях системы частиц с электромагнитным взаимодействием. ЖЭТФ, 1958, т. 34, стр. 172.
2. Климонтович Ю. Л. Релятивистские кинетические уравнения для плазмы I, II. ЖЭТФ, 1959, т. 37, стр. 735; 1960, т. 37, стр. 1212.
3. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, 1946.
4. Зубарев Д. Н. Двухвременные функции Грина в статистической физике. УФН, 1960, т. 71, вып. 1.
5. Климонтович Ю. Л., Силин В. П. К теории флуктуаций распределений частиц в плазме. ЖЭТФ, 1962, т. 42, стр. 286.
6. Климонтович Ю. Л., Силин В. П. О флуктуациях в плазме без столкновений. ДАН СССР, 1962, т. 145, № 4.
7. Bolescu R. Irreversible Processes in Ionized Gases. Phys. of fluids, 1960, vol. 3, P. 52.
8. Lenard A. On Bogolubov's Kinetic Equation for a spatially Homogeneous plasma. Ann. of Phys., 1960, vol. 10, p. 390.
9. Силин В. П. Об интеграле столкновений заряженных частиц. ЖЭТФ, 1961, т. 40, стр. 1768.
10. Balescu R., Taylor H. Binary Correlations in Ionized Gases. Phys. of fluids, 1961, vol. 4, p. 85.
11. Rostoker N. Fluctuations of a plasma. Ядерный синтез. Женева, 1961, т. I, стр. 101.
12. Силин В. П. К теории электромагнитных флуктуаций в плазме. ЖЭТФ, 1961, т. 41, стр. 969.
13. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Ситенко А. Г. К теории флуктуаций в плазме. ЖЭТФ, 1961, т. 41, стр. 644.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
15. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы. Атомиздат, 1961.
16. Климонтович Ю. Л. О кинетическом описании квазиравновесных турбулентных процессов в плазме. ДАН СССР, 1962, т. 144, № 5.
17. Климонтович Ю. Л. Потери энергии заряженных частиц на возбуждение колебаний в плазме. ЖЭТФ, 1959, т. 36, стр. 1405.
18. Bhom D., Pines D. Collective Description of Electron. Interactions. Phys. Rev., 1952, vol. 85, p. 338.
19. Романов Ю. А., Филиппов Г. Ф. Взаимодействие потоков быстрых электронов с продольными плазменными волнами. ЖЭТФ, 1961, т. 40, стр. 123.
20. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы. УФН, 1961, т. 73, стр. 701.
21. Веденов А. А., Велихов Е. П. Квазилинейное приближение в кинетике разреженной плазмы. ЖЭТФ, 1962, т. 43, стр. 963.
22. Веденов А. А. Квазилинейная теория плазмы (теория слаботурбулентной плазмы). Атомиздат, Атомная энергия, 1962, т. 13, стр. 5.
23. Grade H. Kinetical theory of a gases. Comm. Pure a Appl. Mathem., 1949, vol. 2, p. 361. (Русск. пер.: О кинетической теории газов. ИЛ, Сб. пер. Механика, 1952, вып. 4 (14) и 5 (15).
24. Климонтович Ю. Л. К статистической теории однородной, изотропной турбулентности в релятивистской плазме. ДАН СССР, 1962, т. 147, № 5.