РАСПРОСТРАНЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

М. Т. Жумартбаев (Алма-Ата)

Задача о распространении малого начального импульса в нерелятивистской магнитной гидродинамике с конечной проводимостью полностью решена в работе Г. С. Голицина [1]. Она оказалась сравнительно легко разрешимой, так как в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения (ток смещения, как будет видно ниже, порядка $\sim 1/c^2$ по сравнению с остальными членами). Малость тока смещения позволяет выразить электрическое поле через магнитное и, тем самым, свести число необходимых уравнений до минимума. При этом альфвеновские и магнитозвуковые волны описываются двумя независимыми системами уравнений, что свидетельствует о их распространении без взаимодействия и при конечной проводимости.

В релятивистской магнитной гидродинамике ток смещения одного порядка с остальными членами, и поэтому его нельзя опускать. Для решения указанной задачи необходимо рассмотреть полную систему релятивистских магнитогидродинамических уравнений и уравнений Максвелла, где одновременно будут фигурировать как электрическое, так и магнитное поля. В общем релятивистском случае альфвеновские и магнитозвуковые волны не разделяются.

Рассмотрим уравнения Максвелла с релятивистским током в правой части [2-4]

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\gamma\lambda\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right), \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2}\gamma\lambda(\mathbf{vE}), \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{1}$$

Здесь принято, что свободные заряды отсутствуют, а $\varepsilon = \mu = 1$.

Уравнения Максвелла в форме (1) не пригодны для линеаризации уравнений магнитной гидродинамики. Поэтому перепишем уравнения (1) в виде, аналогичном уравнениям теории скин-эффекта в электродинамике. Применяя операцию rot к обеим частям первого и третьего уравнений системы (1), необходимую систему уравнений окончательно можно записать в виде

$$nu_k\frac{\partial(wu_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{i\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial T_{i4}}{\partial x_4} = 0$$
$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{-H_\alpha H_\beta - E_\alpha E_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + H^2)\right\}$$
$$T_{\alpha 4} = \frac{i}{4\pi}[\mathbf{EH}]_\alpha, \quad T_{44} = -\frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)\quad \frac{\partial(nu_k)}{\partial x_k} = 0 \tag{2}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$
$$\nu_m\left(\Delta\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}\right) - \gamma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\gamma\mathbf{v}\times\mathbf{H}) - c\,[\mathbf{E}\operatorname{grad}\gamma] = 0 \qquad \left(\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\lambda}\right)$$
$$\nu_m\left(\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\right) - \operatorname{grad}\gamma(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t}\gamma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) = 0$$

Здесь T_{ik} — тензор электромагнитного поля, ν_m — магнитная вязкость среды, w — тепловая функция на одну частицу, n — число частиц на единицу объема.

Система уравнений (2) совместно с уравнением состояния является замкнутой системой. Заметим, что не все уравнения в системе (2) не независимы, поскольку компоненты rot **H** и rot **E** связаны соотношениями $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$.

Для линеаризованной задачи в случае покоящейся среды ($v_a = 0$) система уравнений (2) приобретает вид

$$\frac{nw}{c^2}\frac{\partial\delta v_\alpha}{\partial t} + w\frac{c_0^2}{c^2}\frac{\partial\delta n}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{4\pi}\left\{-H_\alpha\frac{\partial h_\beta}{\partial x_\beta} - H_\beta\frac{\partial h_\alpha}{\partial x_\beta} - E_\alpha\frac{\partial e_\beta}{\partial x_\beta} - E_\beta\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\beta} + E_\beta\frac{\partial e_\beta}{\partial x_\alpha} + \right.$$
$$\left. + H_\beta\frac{\partial h_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c}\left(\mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}\right)_\alpha + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right)_\alpha\right\} = 0, \qquad n\frac{\partial\delta v_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial\delta n}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial h_\beta}{\partial x_\beta} = 0, \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{e}, \quad \nu_m\left(\Delta\mathbf{h} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{h}}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\delta\mathbf{v}\times\mathbf{H}) = 0 \tag{3}$$
$$\nu_m\left(\Delta\mathbf{e} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{e}}{\partial t^2}\right) - \operatorname{grad}(\delta\mathbf{v}\mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{e} + \frac{1}{c}\delta\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) = 0$$

Здесь

$$\frac{\partial \delta p}{\partial x_\alpha} = w\frac{c_0^2}{c^2}\frac{\partial \delta n}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{c_0^2}{c^2} = \frac{\gamma_0 p}{\varepsilon}\frac{1}{1+p/\varepsilon}$$

(так как для малых возмущений можно пренебречь джоулевыми потерями), ε — плотность внутренней энергии на единицу объема, γ_0 — показатель адиабаты.

Представим малые возмущения скорости, плотности, компонент электрического и магнитного полей в виде суперпозиции бегущих волн

$$\delta n\,(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta n^\circ\,(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk, \ldots \tag{4}$$

где $\delta n^\circ\,(k)$, $\delta v^\circ\,(k)$ и т. д. заданы в начальный момент времени. Тогда из третьего уравнения системы (3) имеем

$$h_\beta^\circ k_\beta = 0 \tag{5}$$

Поэтому можно выбрать систему координат, в которой компоненты возмущений магнитного поля и волновой вектор имеют вид $h_\beta^\circ\,(0, h_y^\circ, h_z^\circ)$, $k_\beta = (k, 0, 0)$.

В выбранной системе, исходя из четвертого уравнения системы (3), имеем

$$e_y^\circ = \frac{\omega}{kc}h_z^\circ, \qquad e_z^\circ = -\frac{\omega}{kc}h_y^\circ \tag{6}$$

Компонента e_x° остается произвольной. Подставляя (4) в (3) и учитывая условия (5), (6), получим для амплитуд Фурье δv_x°, δv_y° и δv_z° однородную систему

$$\begin{gathered}
\{(4\pi W)(\Omega^2 - a^2)\,[\Omega + \beta'(1-\Omega^2)] - \Omega\,(1-\Omega^2)(H_y^2 + H_z^2) + \Omega E_x^2\}\,\delta v_x^\circ + \\
+ \Omega\,\{(1-\Omega^2)\,H_xH_y + E_x\,(E_y - \Omega H_z)\,\delta v_y^\circ + \Omega\,\{(1-\Omega^2)\,H_xH_z + E_x\,(E_z + \Omega H_y)\}\,\delta v_z^\circ = 0 \\
\{(1-\Omega^2)\,H_xH_y + E_x\,(E_y - \Omega H_z)\}\,\delta v_x^\circ + \{(4\pi W)\,\Omega\,[\Omega + \beta'(1-\Omega^2)] - \\
- (1-\Omega^2)\,H_x^2 + (E_y - \Omega H_z)^2\}\,\delta v_y^\circ + (E_y - \Omega H_z)(E_z + \Omega H_y)\,\delta v_z^\circ = 0 \\
\{(1-\Omega^2)\,H_xH_z + E_x\,(E_z + \Omega H_y)\}\,\delta v_x^\circ + (E_y - \Omega H_z)(E_z + \Omega H_y)\,\delta v_y^\circ + \\
+ \{(4\pi W)\,\Omega\,[\Omega + \beta'(1-\Omega^2)] - (1-\Omega^2)\,H_x^2 + (E_z + \Omega H_y)^2\}\,\delta v_z^\circ = 0
\end{gathered} \tag{7}$$

Амплитуды e_x°, h_y°, h_z° связаны с δv_x°, δv_y°, δv_z° формулами

$$\begin{gathered}
e_x^\circ = \frac{1}{c\,[\Omega + \beta'(1-\Omega^2)]}\,[E_x\delta v_x^\circ + (E_y - \Omega H_z)\,\delta v_y^\circ + (E_z + \Omega H_y)\,\delta v_z^\circ] \\
h_y^\circ = \frac{H_y\delta v_x^\circ - H_x\delta v_y^\circ}{c\,[\Omega + \beta'(1-\Omega^2)]}, \qquad h_z^\circ = \frac{H_z\delta v_x^\circ - H_x\delta v_z^\circ}{c\,[\Omega + \beta'(1-\Omega^2)]}
\end{gathered} \tag{8}$$

В формулах (7), (8) введены обозначения

$$a^2 = \frac{c_0^2}{c^2}, \qquad W = nw, \qquad \Omega = \frac{\omega}{kc}, \qquad \beta' = i\beta = i\frac{\nu_m k}{c}$$

Здесь Ω — безразмерная частота, β — безразмерная магнитная вязкость. Требование существования нетривиального решения системы уравнений (7) приводит к дисперсионному уравнению десятой степени относительно Ω

$$a_1\Omega^{10} + a_2\Omega^9 + \ldots + a_{10}\Omega + a_{11} = 0 \tag{9}$$

Здесь коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ — функции от напряженностей электрического и магнитного полей и от a^2 и β'. В случае бесконечной проводимости, как и следовало ожидать, дисперсионное уравнение (9) распадается на два[1]

$$\Omega^2\left(1 + \frac{H^2}{4\pi W}\right) - \frac{H_x^2}{4\pi W} = 0, \qquad \Omega^4\left(1 + \frac{H^2}{4\pi W}\right) - \Omega^2\left[\frac{H^2}{4\pi W} + a^2\left(1 + \frac{H_x^2}{4\pi W}\right)\right] + a^2\frac{H_x^2}{4\pi W} = 0 \tag{10}$$

Эти уравнения описывают альфвеновские и магнитозвуковые волны. Для $\beta \ll 1$ эти волны приближенно разделяются, и фазовые скорости имеют вид:

для альфвеновских волн

$$\begin{gathered}
\Omega_{1,2} = \pm\frac{H_x}{\sqrt{4\pi W}\,\sqrt{1 + H^2/4\pi W}} + \frac{[EH]_x}{4\pi W} - i\beta\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{H^2}{4\pi W}\right) + \right. \\
\left. + \frac{(1 + a^2H^2/4\pi W)\,H_x^2/4\pi W}{2\,(a^2 - 1)(1 + H^2/4\pi W)}\right\}
\end{gathered}$$

---

[1] Уравнения (10) являются частным случаем более общих дисперсионных уравнений для движущейся среды [3].

для магнитозвуковых волн

$$\Omega = \pm\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{H^2/4\pi W + a^2(1 + H_x^2/4\pi W)}{1 + H^2/4\pi W} + \frac{aH_x/\sqrt{\pi W}}{\sqrt{1 + H^2/4\pi W}}\right)^{1/2} \pm\right.$$

$$\left.\pm\left(\frac{H^2/4\pi W + a^2(1 + H^2/4\pi W)}{1 + H^2/4\pi W} - \frac{aHx/\sqrt{\pi W}}{\sqrt{1 + H^2/4\pi W}}\right)^{1/2} - i\beta B_{1,2}(E, H)\right.$$

Рассмотрим случай малой проводимости ($\beta \gg 1$). Решение дисперсионного уравнения (9) ищем в виде

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{\beta'}\Omega_1$$

где Ω_0 и Ω_1 удовлетворяют уравнениям

$$\Omega_0\{\Omega_0^6 - (a^2\theta + 2)\Omega_0^4 + (2a^2\theta + 1)\Omega_0^2 - a^2\theta\} = 0 \tag{13}$$

$$\theta = 1 - \frac{E_x^2}{E^2}, \qquad \Omega_1 = \frac{b_0\Omega_0^{10} + b_1\Omega_0^8 + b_2\Omega_0^6 + b_3\Omega_0^4 + b_4\Omega_0^2 + b_5}{c_0\Omega_0^6 + c_1\Omega_0^4 + c_2\Omega_0^2 + c_3} \tag{14}$$

Здесь $b_0, \ldots, b_5, c_0, \ldots, c_5$ — функции от E, H, a^2. Для одного из корней уравнения (13) ($\Omega_0 = 0$) имеем волну

$$\Omega^{(1)} = -\frac{i}{\beta}\frac{H_x^2}{4\pi W}$$

которая быстро затухает со временем. Остальные шесть корней находятся как решения уравнения

$$\chi'^3 + 3p\chi' + 2q = 0 \tag{15}$$

Здесь

$$\Omega_0 = \pm\sqrt{\chi}, \qquad \chi = \chi' + {}^1/_3(a^2\theta + 2)$$

$$p = -{}^1/_9(1 - a^2\theta)^2, \qquad q = -{}^1/_{27}\{4a^6\theta^3 + 15a^4\theta^2 + {}^{105}/_2 a^2\theta + 23\}$$

Волны, описываемые этим уравнением, также будут иметь вид

$$\Omega = P - \frac{i}{\beta}Q$$

где P, Q зависят от значения корней уравнения (15) и величин напряженностей электрического и магнитного полей. Из этих волн должны быть отобраны лишь те, амплитуда которых падает со временем. Для рассмотренного предельного случая ($\beta \gg 1$) разделение волн на альфвеновские и магнитозвуковые теряет смысл.

Представляет интерес рассмотреть тривиальное решение системы (7), когда в начальный момент $\delta v_x{}^\circ = \delta v_y{}^\circ = \delta v_z{}^\circ = 0$. Для того чтобы возмущения электрического и магнитного полей были конечны, необходимо положить

$$\Omega + \beta'(1 - \Omega^2) = 0 \tag{16}$$

Очевидно, что уравнение (16) описывает обычное скиновое поглощение электромагнитных волн с частотой

$$\Omega = -i/\beta \quad \text{для } \beta \ll 1, \qquad \Omega = \pm 1 - {}^1/_2 i/\beta \quad \text{для } \beta \gg 1$$

Если в уравнении (16) положить $\beta \to \infty$, то имеем $\Omega \to \pm 1$, что соответствует распространению электромагнитных волн в диэлектрике с $\varepsilon = \mu = 1$.

В общем случае ε и μ не равны единице и не постоянны во времени, и для скорости распространения волн должна получиться формула

$$\omega/k = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

В заключение автор благодарит К. П. Станюковича за интерес к работе.

Поступила 24 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Голицын Г. С. Распространение начального импульса в магнитной гидродинамике с произвольной проводимостью. ПМТФ, 1962, № 2.
2. Станюкович К. П. Основные уравнения релятивистской магнитогазодинамики. Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», Изд. АН Латв. ССР, 1962.
3. Жумартбаев М. Т. Об устойчивости магнитных тангенциальных разрывов в релятивистской гидродинамике. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 40, № 5.
4. Дойч Р. В. К теории ударных волн в релятивистской магнитной гидродинамике. ПМТФ, 1963, № 1.