

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОПОРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ ОРТОТРОПНЫХ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫМИ РЕБРАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ВЯЗКОУПРУГИМ ГРУНТОМ

Д. С. Ганиев

Азербайджанский архитектурно-строительный университет, AZ1073 Баку, Азербайджан
E-mail: qanidilqem@gmail.com

Исследуются собственные колебания опор, состоящих из трех цилиндрических панелей, подкрепленных кольцевыми элементами и грунтом. Система уравнений задачи строится с использованием принципа наименьшего действия по Гамильтону. Исследована зависимость частотных характеристик от геометрических параметров опоры.

Ключевые слова: мостовые опоры, собственные колебания, принцип наименьшего действия по Гамильтону.

DOI: 10.15372/PMTF20210607

При строительстве мостов над горными реками целесообразно использовать опоры, образованные тремя цилиндрическими панелями, заполненными грунтом. Эти опоры необходимо устанавливать таким образом, чтобы одна из контактных линий была ориентирована противоположно течению реки. Это позволяет уменьшить давление со стороны воды на опору. Под действием течения реки в исследуемой конструкции происходит колебательный процесс. Для экономии материала и увеличения жесткости такие конструкции подкрепляются продольными или поперечными стержнями.

В данной работе исследуются собственные колебания поперечно подкрепленных опор.

Работа [1] посвящена изучению динамической прочностной характеристики — частоты собственных колебаний подпорной стенки, состоящей из двух ортотропных цилиндрических оболочек, контактирующих с грунтом и усиленных дискретно распределенными кольцевыми стержнями. В [2] решена задача о собственных колебаниях подпорной стенки, состоящей из двух ортотропных цилиндрических оболочек, заполненных вязкоупругим грунтом и усиленных дискретно распределенными продольными стержнями. Работа [3] посвящена исследованию частоты собственных колебаний вертикальной опоры, состоящей из трех ортотропных цилиндрических панелей, заполненных грунтом и усиленных дискретно распределенными продольными стержнями. В работах [4, 5] изучаются вогнутые оболочки, соединенные с контурными конструкциями. Построены решения дифференциальных уравнений моментной теории вогнутых оболочек при произвольных граничных условиях, решены задачи статики для различных соединений. В [6] разработана методика статического расчета неподкрепленных цилиндрических оболочек из изотропного мате-

риала с учетом поведения грунта при сжатии и скольжении на контактной поверхности. Расчеты и исследования проведены на основе моментной теории цилиндрических оболочек.

Следует отметить, что рассмотренные ранее формы опор целесообразно использовать в случае их одностороннего обтекания. Однако в случае если поток обтекает подпорную стенку с двух сторон, как, например, при укреплении берегов на островах, для уменьшения давления воды на стенку целесообразно придавать этой стенке заостренную форму с сечением в виде криволинейного треугольника. В данной работе впервые рассматриваются подпорные стенки такой формы при поперечном расположении подкрепляющих ребер и решается задача определения частоты собственных колебаний указанной стенки, контактирующей с вязкоупругим грунтом. Для решения поставленной задачи применяется принцип Гамильтона — Остроградского.

Постановка задачи. Поскольку исследуемая система представляет собой вертикальную опору, состоящую из трех оболочек цилиндрической формы с незамкнутым контуром и кольцевыми подкрепляемыми элементами, заполненных грунтом, выражение для полной энергии системы можно записать в виде

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 (G_i + K_i + H_i + A_i), \quad (1)$$

где G_i , K_i — потенциальная и кинетическая энергия цилиндрических панелей; H_i — полная энергия колец, используемых при подкреплении; A_i — работа, совершаемая внешними силами, с учетом влияния грунта при смещении точек цилиндрических панелей. Формулы для вычисления этих величин приведены в работах [1, 3]. Кроме того, считается, что контакт цилиндрических панелей и стержней является жестким [7]. Схема опоры приведена на рис. 1.

К выражению (1) добавляются контактные и граничные условия. Предполагается, что цилиндрические панели связаны упруго. В этом случае вдоль контактных линий выполняются условия

$$\begin{aligned} w_1(x)|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} &= w_2(x)|_{\theta_2=0}, & \vartheta_1(x)|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} &= \vartheta_2(x)|_{\theta_2=0}, \\ u_1(x)|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} &= u_2(x)|_{\theta_2=0}, & \frac{\partial w_1(x)}{\partial x}|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} &= \frac{\partial w_2(x)}{\partial x}|_{\theta_2=0}, \\ w_2(x)|_{\theta_2=\tilde{\theta}_2} &= w_3(x)|_{\theta_3=0}, & \vartheta_2(x)|_{\theta_2=\tilde{\theta}_2} &= \vartheta_3(x)|_{\theta_3=0}, \\ u_2(x)|_{\theta_2=\tilde{\theta}_2} &= u_3(x)|_{\theta_3=0}, & \frac{\partial w_2(x)}{\partial x}|_{\theta_2=\tilde{\theta}_2} &= \frac{\partial w_3(x)}{\partial x}|_{\theta_3=0}, \\ w_3(x)|_{\theta_3=\tilde{\theta}_3} &= w_1(x)|_{\theta_1=0}, & \vartheta_3(x)|_{\theta_3=\tilde{\theta}_3} &= \vartheta_1(x)|_{\theta_1=0}, \\ u_3(x)|_{\theta_3=\tilde{\theta}_3} &= u_1(x)|_{\theta_1=0}, & \frac{\partial w_3(x)}{\partial x}|_{\theta_3=\tilde{\theta}_3} &= \frac{\partial w_1(x)}{\partial x}|_{\theta_1=0}, \end{aligned} \quad (2)$$

где u_i , ϑ_i , w_i ($i = 1, 2, 3$) — смещения точек i -й цилиндрической панели. Считается, что на границах i -й цилиндрической панели, т. е. при $x = 0$ и $x = a$, выполняются граничные условия Навье [8]. Из условия стационарности Остроградского — Гамильтона $\delta W = 0$,

где $W = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$ — действие по Гамильтону, можно получить уравнение для частоты свободных колебаний исследуемой системы.

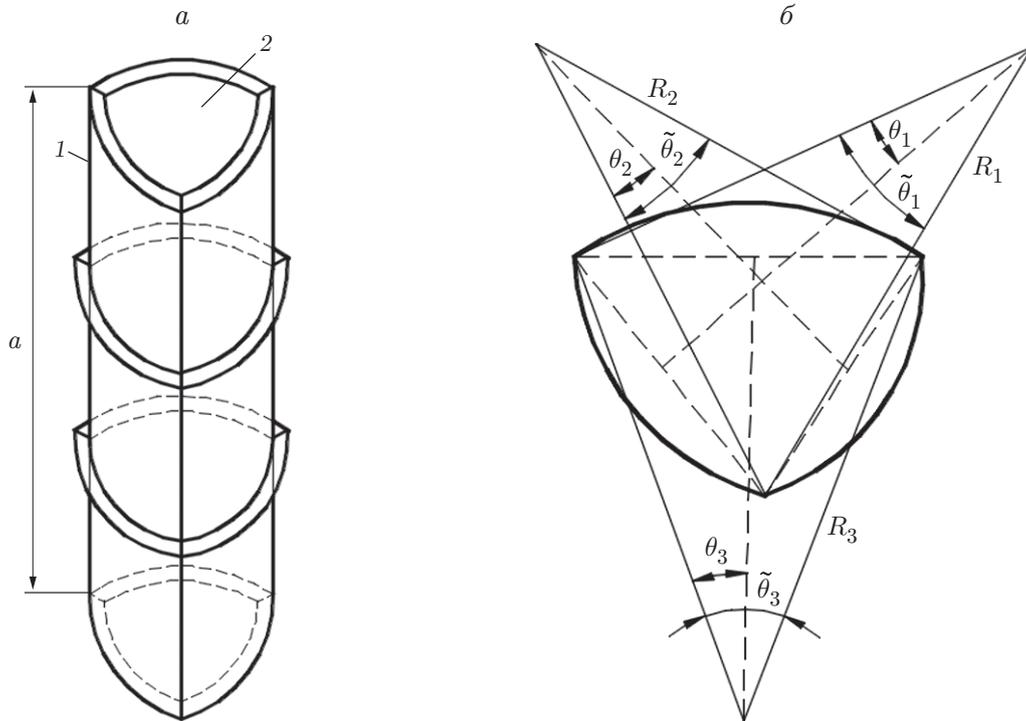


Рис. 1. Общий вид (а) и геометрия (б) вертикальной опоры, состоящей из трех ортотропных цилиндрических панелей:

1 — оболочка, 2 — вязкоупругий грунт

Решение задачи о собственных колебаниях оболочки. Смещение точек цилиндрических оболочек будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_i &= u_{0i} \cos(\chi \xi_i) (\cos(n\theta_i) + \sin(n\theta_i)) \sin(\omega_1 t_1), \\ \vartheta_i &= \vartheta_{0i} \sin(\chi \xi_i) (\cos(n\theta_i) + \sin(n\theta_i)) \sin(\omega_1 t_1), \\ w_i &= w_{0i} \sin(\chi \xi_i) (\cos(n\theta_i) + \sin(n\theta_i)) \sin(\omega_1 t_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь u_{0i} , ϑ_{0i} , w_{0i} — неизвестные постоянные; $\xi_i = x_i/a$; $t_1 = \omega_{01}t$; χ , n — волновые числа в цилиндрической оболочке в направлении образующей и в окружном направлении; $0 \leq \theta_1 \leq \tilde{\theta}_1$; $0 \leq \theta_2 \leq \tilde{\theta}_2$; $0 \leq \theta_3 \leq \tilde{\theta}_3$; $\omega_1 = \omega/\omega_{01}$; $\omega_{01} = \sqrt{E_{11}/[(1-\nu_{11}^2)\rho_1 R_1^2]}$; ω — искомая частота.

Решения (3) и контактные условия (2) позволяют выразить постоянные u_{02} , ϑ_{02} , w_{02} и u_{03} , ϑ_{03} , w_{03} через постоянные u_{01} , ϑ_{01} , w_{01} :

$$\begin{aligned} u_{02} &= u_{01}(\cos(n\tilde{\theta}_1) + \sin(n\tilde{\theta}_1)), & \vartheta_{02} &= \vartheta_{01}(\cos(n\tilde{\theta}_1) + \sin(n\tilde{\theta}_1)), \\ w_{02} &= w_{01}(\cos(n\tilde{\theta}_1) + \sin(n\tilde{\theta}_1)), \\ u_{03} &= u_{01}(\cos(n\tilde{\theta}_1) + \sin(n\tilde{\theta}_1))(\cos(n\tilde{\theta}_2) + \sin(n\tilde{\theta}_2)), \\ \vartheta_{03} &= \vartheta_{01}(\cos(n\tilde{\theta}_1) + \sin(n\tilde{\theta}_1))(\cos(n\tilde{\theta}_2) + \sin(n\tilde{\theta}_2)), \\ w_{03} &= w_{03}(\cos(n\tilde{\theta}_1) + \sin(n\tilde{\theta}_1))(\cos(n\tilde{\theta}_2) + \sin(n\tilde{\theta}_2)). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что при этом должны выполняться условия

$$(\cos(n\tilde{\theta}_1) + \sin(n\tilde{\theta}_1))(\cos(n\tilde{\theta}_2) + \sin(n\tilde{\theta}_2))(\cos(n\tilde{\theta}_3) + \sin(n\tilde{\theta}_3)) = 1.$$

С учетом (3), (4) выражение для полной энергии (1) представляется в виде полинома второго порядка относительно u_{01} , v_{01} , w_{01} :

$$\Pi = \varphi_{11}u_{01}^2 + \varphi_{22}v_{01}^2 + \varphi_{33}w_{01}^2 + \varphi_{44}u_{01}v_{01} + \varphi_{55}u_{01}w_{01} + \varphi_{66}v_{01}w_{01}.$$

Здесь φ_{11} , φ_{22} , φ_{33} , φ_{44} , φ_{55} , φ_{66} — коэффициенты:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} = & \left(\frac{h_1 R_1 b_{111} \chi^2 q_0 q_{21}}{2} + \frac{\rho_1 h_1 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_1}{2R_1(1-\nu_1^2)} + b_{661} \frac{n^2}{R_1^2} q_1 q_{31} + \right. \\ & + \frac{R_1}{2} \sum_{j=1}^{k_1} \frac{1}{R_1^4} (E_{j1} J_{zj1} n^4 q_{21} + G_{j1} J_{\text{кр}j1} q_{31} n^2) \cos^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{k_1} \rho_{j1} F_{j1} R_1 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{21} \cos^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} \right) P + \\ & + \left(\frac{h_2 R_2 b_{112} \chi^2 q_0 q_{22}}{2} + \frac{\rho_2 h_2 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_1}{2R_2(1-\nu_2^2)} + b_{662} \frac{n^2}{R_2^2} q_1 q_{32} + \right. \\ & + \frac{R_2}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \frac{1}{R_2^4} (E_{j2} J_{zj2} n^4 q_{22} + G_{j2} J_{\text{кр}j2} q_{32} n^2) \cos^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{k_2} \rho_{j2} F_{j2} R_2 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{22} \cos^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} \right) S + \\ & + \left(\frac{h_3 R_3 b_{113} \chi^2 q_0 q_{23}}{2} + \frac{\rho_3 h_3 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_1}{2R_3(1-\nu_3^2)} + b_{663} \frac{n^2}{R_3^2} q_1 q_{33} + \right. \\ & + \frac{R_3}{2} \sum_{j=1}^{k_3} \frac{1}{R_3^4} (E_{j3} J_{zj3} n^4 q_{23} + G_{j3} J_{\text{кр}j3} q_{33} n^2) \cos^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{k_3} \rho_{j3} F_{j3} R_3 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{23} \cos^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} \right) Q, \\ \varphi_{22} = & \left(\frac{b_{221} n^2 q_0 q_{31}}{R_1^2} + \frac{\rho_1 h_1 \omega_1^2 q_0}{2R_1(1-\nu_1^2)} + \frac{1}{2} R_1 \sum_{j=1}^{k_1} E_{j1} F_{j1} q_{31} \sin^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{k_1} \rho_{j1} F_{j1} \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{21} \sin^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} \right) P + \\ & + \left(\frac{b_{222} n^2 q_0 q_{32}}{R_2^2} + \frac{\rho_2 h_2 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_0}{2R_2(1-\nu_2^2)} + \frac{1}{2} R_2 \sum_{j=1}^{k_2} E_{j2} F_{j2} q_{32} \sin^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{k_2} \rho_{j2} F_{j2} \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{22} \sin^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} \right) S + \left(\frac{b_{223} n^2 q_0 q_{33}}{R_3^2} + \frac{\rho_3 h_3 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_0}{2R_3(1-\nu_3^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} R_3 \sum_{j=1}^{k_3} E_{j3} F_{j3} q_{33} \sin^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} + \sum_{j=1}^{k_3} \rho_{j3} F_{j3} \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{23} \sin^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} \right) Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{33} = & \left[\frac{h_1 a}{2R_1} (b_{111} + 2b_{121} + b_{221}) q_0 q_{21} + \frac{\rho_1 h_1 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_0}{2R_1 (1 - \nu_1^2)} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_1} \frac{1}{R_1} \left(E_{j1} F_{j1} \sin^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} q_{21} + \frac{1}{R_1^2} E_{j1} J_{xj1} q_{21} (1 - n^2)^2 \right) \sin^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} + \\
& + G_{j1} J_{\text{кр}j1} q_{31} \frac{\chi^2 n^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} + E_{j1} J_{zj1} q_{21} \frac{\chi^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} + \\
& + \left. \sum_{j=1}^{k_1} \rho_{j1} F_{j1} R_1 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{21} \left(\sin^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} + \frac{J_{\text{кр}j1}}{F_{j1}} \frac{\chi^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} + a q_0 q_{21} \frac{A\psi}{\psi^2 + \omega^2} \right) \right] P + \\
& + a q_0 q_{21} \left(p_1 + \frac{\chi^2}{a^2} k_{s1} + \frac{n^2}{R_1^2} k_{s1} \right) (t'_1 - t_0) + \\
& + a q_0 q_{21} \frac{A}{(\psi^2 + \omega^2)^2} [-\psi \omega (e^{-\psi t'_1} \cos(\omega t'_1) - e^{-\psi t_0} \cos(\omega t_0)) - \\
& - \psi^2 (e^{-\psi t'_1} \sin(\omega t'_1) - e^{-\psi t_0} \sin(\omega t_0))] + \\
& + \left[\frac{h_2 a}{2R_2} (b_{112} + 2b_{122} + b_{222}) q_0 q_{22} + \frac{\rho_2 h_2 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_0}{2R_2 (1 - \nu_2^2)} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \frac{1}{R_2} \left(E_{j2} F_{j2} \sin^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} q_{22} + \frac{1}{R_2^2} E_{j2} J_{xj2} q_{22} (1 - n^2)^2 \right) \sin^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} + \\
& + G_{j2} J_{\text{кр}j2} q_{32} \frac{\chi^2 n^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} + E_{j2} J_{zj2} q_{22} \frac{\chi^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} + \\
& + \left. \sum_{j=1}^{k_2} \rho_{j2} F_{j2} R_2 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{22} \left(\sin^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} + \frac{J_{\text{кр}j2}}{F_{j2}} \frac{\chi^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} \right) + a q_0 q_{21} \frac{A\psi}{\psi^2 + \omega^2} \right] S + \\
& + a q_0 q_{21} \left(p_1 + \frac{\chi^2}{a^2} k_{s1} + \frac{n^2}{R_1^2} k_{s1} \right) (t'_1 - t_0) + \\
& + a q_0 q_{21} \frac{A}{(\psi^2 + \omega^2)^2} [-\psi \omega (e^{-\psi t'_1} \cos(\omega t'_1) - e^{-\psi t_0} \cos(\omega t_0)) - \\
& - \psi^2 (e^{-\psi t'_1} \sin(\omega t'_1) - e^{-\psi t_0} \sin(\omega t_0))] + \\
& + \left[\frac{h_3 a}{2R_3} (b_{113} + 2b_{123} + b_{223}) q_0 q_{23} + \frac{\rho_3 h_3 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_0}{2R_3 (1 - \nu_3^2)} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_3} \frac{1}{R_3} \left(E_{j3} F_{j3} \sin^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} q_{23} + \frac{1}{R_3^2} E_{j3} J_{xj3} q_{23} (1 - n^2)^2 \right) \sin^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} + \\
& + G_{j3} J_{\text{кр}j3} q_{33} \frac{\chi^2 n^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} + E_{j3} J_{zj3} q_{23} \frac{\chi^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} + \\
& + \left. \sum_{j=1}^{k_3} \rho_{j3} F_{j3} R_3 \omega_1^2 \omega_{01}^2 q_{23} \left(\sin^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} + \frac{J_{\text{кр}j3}}{F_{j3}} \frac{\chi^2}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} \right) + a q_0 q_{21} \frac{A\psi}{\psi^2 + \omega^2} \right] Q +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + aq_0q_{21} \left(p_1 + \frac{\chi^2}{a^2} k_{s1} + \frac{n^2}{R_1^2} k_{s1} \right) (t'_1 - t_0) + \\
& + aq_0q_{21} \frac{A}{(\psi^2 + \omega^2)^2} [-\psi\omega(e^{-\psi t'_1} \cos(\omega t'_1) - e^{-\psi t_0} \cos(\omega t_0)) - \\
& - \psi^2(e^{-\psi t'_1} \sin(\omega t'_1) - e^{-\psi t_0} \sin(\omega t_0))](1 + \sin(2n\tilde{\theta}_1))(1 + \sin(2n\tilde{\theta}_2)), \\
\varphi_{44} = & \left(\frac{2b_{121}}{aR_1^2} \chi n q_0 q_{41} + \frac{b_{66i} \chi n}{aR_1} q_1 q_{31} \right) \left(\frac{1}{2} (t'_1 - t_0) + \frac{\sin(2\omega t_0) - \sin(2\omega t'_1)}{4\omega} \right) + \\
& + \left(\frac{2b_{122}}{aR_2^2} \chi n q_0 q_{42} + \frac{b_{662} \chi n}{aR_2} q_1 q_{32} \right) S + \left(\frac{2b_{123}}{aR_3^2} \chi n q_0 q_{43} + \frac{b_{663} \chi n}{aR_3} q_1 q_{33} \right) Q, \\
\varphi_{55} = & \left[-h_1 a R_1 (b_{111} + b_{12i}) q_0 q_{21} + \sum_{j=1}^{k_1} \frac{1}{2R_1} (E_{j1} J_{zj1} q_{21} + \right. \\
& + G_{j1} J_{\text{кр}j1} q_{31} \frac{2n^2 \chi}{aR_1} \cos^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a}) \left. \right] P + \left[-h_2 a R_2 (b_{112} + b_{122}) q_0 q_{22} - \right. \\
& - \sum_{j=1}^{k_2} \frac{1}{2R_2} (E_{j2} J_{zj2} q_{22} + G_{j2} J_{\text{кр}j2} q_{32} \frac{2n^2 \chi}{aR_2} \cos^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a}) \left. \right] S + \\
& + \left[-h_3 a R_3 (b_{113} + b_{123}) q_0 q_{23} - \sum_{j=1}^{k_3} \frac{1}{2R_3} (E_{j3} J_{zj3} q_{23} + \right. \\
& \left. + G_{j3} J_{\text{кр}j3} q_{33} \frac{2n^2 \chi}{aR_3} \cos^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a}) \right] Q, \\
\varphi_{66} = & \left[\left(-\frac{h_1 a}{R_1} (b_{121} + b_{221}) n q_0 q_{41} - \sum_{j=1}^{k_1} \frac{n E_{j1} F_{j1}}{R_1^4} \sin^2 \frac{2\pi R_1 \chi}{a} q_{41} \right) P + \right. \\
& + \left(-\frac{h_2 a}{R_2} (b_{122} + b_{222}) n q_0 q_{42} - \sum_{j=1}^{k_2} \frac{n E_{j2} F_{j2}}{R_2^4} \sin^2 \frac{2\pi R_2 \chi}{a} q_{42} \right) \vartheta_{02} w_{02} \left. \right] S + \\
& + \left(-\frac{h_3 a}{R_3} (b_{123} + b_{223}) n q_0 q_{43} - \sum_{j=1}^{k_3} \frac{n E_{j3} F_{j3}}{R_3^4} \sin^2 \frac{2\pi R_3 \chi}{a} q_{43} \right) Q, \\
P = & \frac{t'_1 - t_0}{2} + \frac{\sin(2\omega t_0) - \sin(2\omega t'_1)}{4\omega}, \quad S = P(1 + \sin(2n\tilde{\theta}_1)), \quad Q = S(1 + \sin(2n\tilde{\theta}_2)),
\end{aligned}$$

E_{1i}, E_{2i} — модули упругости материала i -й панели в направлениях осей координат x_i и θ_i соответственно; ν_{1i}, ν_{2i} — коэффициенты Пуассона; $b_{11i} = E_{1i}/(1 - \nu_{1i}\nu_{2i})$; $b_{22i} = E_{2i}/(1 - \nu_{1i}\nu_{2i})$; $b_{12i} = \nu_{2i}E_{1i}/(1 - \nu_{1i}\nu_{2i}) = \nu_{1i}E_{2i}/(1 - \nu_{1i}\nu_{2i})$; E_{ji}, F_{ji} — модуль упругости j -го стержня i -й панели и площадь его поперечного сечения; J_{xji}, J_{zji} — главные центральные моменты инерции; $J_{\text{кр}ji}$ — момент инерции при кручении j -го стержня; t — время; k_i — количество стержней i -й панели.

Варьируя выражение для Π относительно констант $u_{01}, \vartheta_{01}, w_{01}$, получаем систему однородных алгебраических уравнений. Приравнявая главный определитель к нулю, находим частотное уравнение для собственной частоты рассмотренной системы, которое имеет вид

$$4\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} + \varphi_{44}\varphi_{55}\varphi_{66} - \varphi_{55}^2\varphi_{22} - \varphi_{66}^2\varphi_{11} - \varphi_{44}^2\varphi_{33} = 0. \quad (5)$$

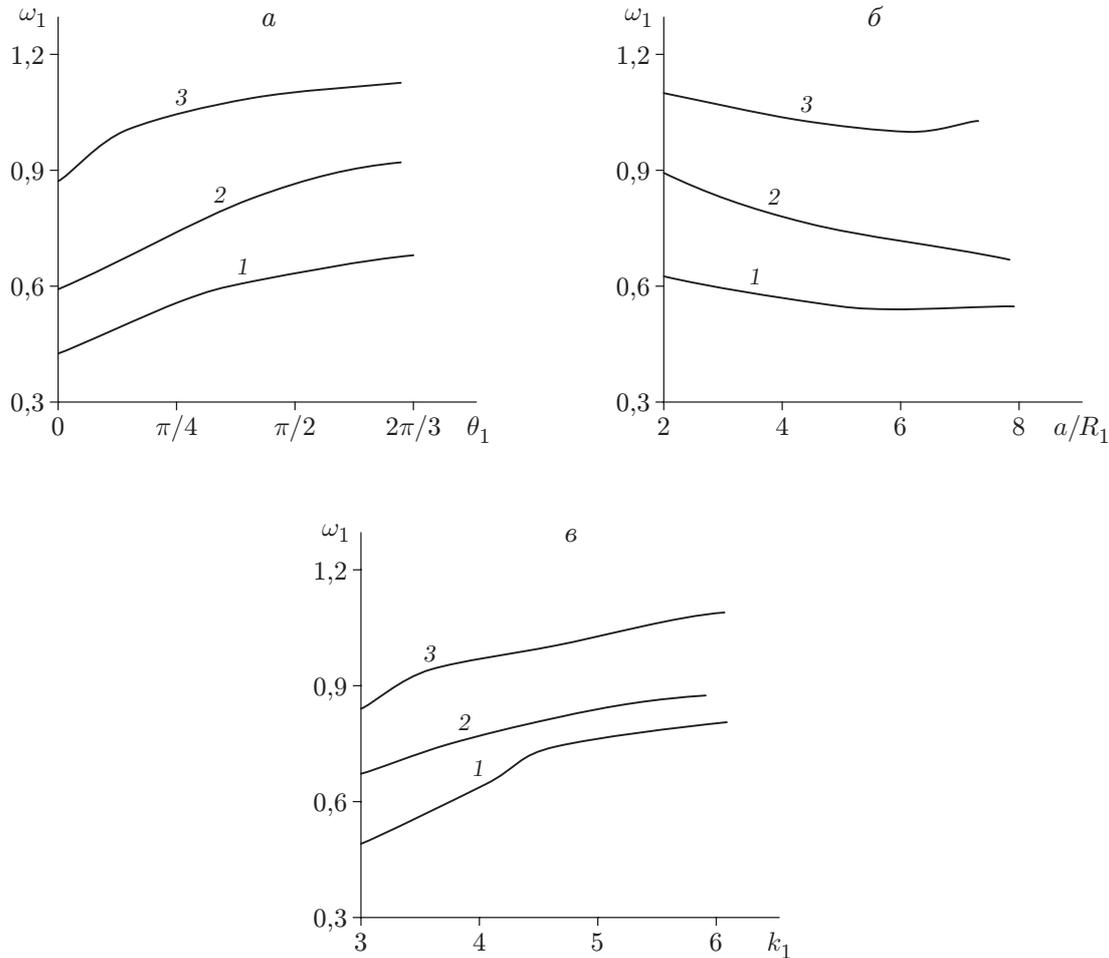


Рис. 2. Зависимости частотного параметра ω_1 от угла θ_1 (а), отношения a/R_1 (б) и количества поперечных стержней k_1 (в):
 а — $a/R_1 = 4$, $k_1 = k_2 = k_3 = 4$; б — $\theta_1 = 2\pi/3$, $k_1 = k_2 = k_3 = 4$; в — $a/R_1 = 4$, $\theta_1 = 2\pi/3$

Уравнение (5) решено численно при значениях параметров $p_1 = p_2 = 7 \cdot 10^8$ Н/м², $k_{si} = 11 \cdot 10^6$ Н/м², $a/R_i = 3$, $\nu_{1i} = \nu_{2i} = 0,35$, $R_i = 160$ мм, $b_{11} = 18,3$ ГПа, $b_{12} = 2,77$ ГПа, $b_{22} = 25,2$ ГПа, $b_{66} = 3,5$ ГПа, $\rho_i = \rho_{ji} = 1850$ кг/м³, $E_{ji} = 6,67 \cdot 10^9$ Н/м², $\chi = 1$, $n = 8$, $h_{ji} = 1,39$ мм, $A = 0,1462$, $I_{крji} = 0,48$ мм⁴, $I_{xji} = 19,9$ мм⁴, $F_{ji} = 0,45$ мм², $h_i = 0,45$ мм, $\psi = 0,05$.

На рис. 2 представлены зависимости частотного параметра ω_1 от угла θ_1 , длины цилиндрических панелей a/R_1 и количества поперечных стержней на поверхности первого цилиндра соответственно. При увеличении угла θ_1 и количества поперечных стержней параметр частоты ω_1 увеличивается (см. рис. 2, а, в), при увеличении длины цилиндрических панелей a — уменьшается (см. рис. 2, б). Из рис. 2 следует, что с увеличением степени ортотропии материала цилиндрической панели значение частотного параметра ω_1 увеличивается.

Сравнение результатов работы [3] и настоящей работы при одинаковых количествах продольных и поперечных ребер показывает, что значение частотного параметра ω_1 в случае поперечного подкрепления приблизительно на 5 % больше, чем в случае продольного подкрепления. Поэтому при использовании рассмотренных опор целесообразно использовать кольцевые подкрепления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Латифов Ф. С., Ганиев Д. С.** Свободные колебания подпорных стенок, состоящих из подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, контактирующих с грунтом // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 5. С. 161–167.
2. **Latifov F. S., Ganiyev D. S.** Free vibrations of lightweight retaining walls comprised of visco-elastik soil contacting orthotropic cylindrical shells // Proc. of the 15th Intern. conf. “Technical and physical problems of electrical engineering”, Istanbul (Turkey), Oct. 14–15, 2019. Fredrikstad: Norway Ostfold Univ. College, 2019. P. 199–202.
3. **Ganiyev D. S.** Forced vibrations of visco-elastik heterogeneous medium-contacting vertical retaining wall consisting of three orthotropic cylindrical panels // Intern. J. Tech. Phys. Problems Engng. 2020. Iss. 42, v. 12, N 1. P. 63–67.
4. **Сейфуллаев Х. Р.** К расчету пологих оболочек с большим прямоугольным отверстием, открытых на упругий контур // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. 1978. № 4. С. 60–66.
5. **Сейфуллаев Х. Р.** Об одном методе исследования несущей способности пологих оболочек при больших прогибах // Сб. науч. тр. по механике. 1994. № 4. С. 4–7.
6. **Ганиев Д. С.** Решение задачи подпорных стен, состоящих из цилиндрических оболочек, лежащих на упругом основании // Теорет. и прикл. механика. 2007. № 1. С. 103–107.
7. **Амиро И. Я.** Ребристые цилиндрические оболочки / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий, П. С. Поляков. Киев: Наук. думка, 1973.
8. **Босяков С. М., Чживэй В.** Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стекловолокна при граничных условиях Навье // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 3. С. 24–27.

*Поступила в редакцию 16/XII 2019 г.,
после доработки — 18/VIII 2020 г.
Принята к публикации 31/VIII 2020 г.*
