

ТЕЧЕНИЕ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПО ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Ю. В. Мартынов

(Москва)

1. Безразмерные уравнения движения, уравнение неразрывности и граничные условия в системе координат y, z, φ ($z = z^0$ — осевая координата, $\varphi = \varphi^0$, $y = R - r^0$, начало координат находится на стыке полубесконечных труб, z^0, r^0, φ^0 — цилиндрическая система координат), вращающейся вокруг оси симметрии цилиндра с угловой скоростью вращения верхней полубесконечной трубы, имеют вид [1, 2]

$$(1.1) \quad \varepsilon \left(v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{v_\theta^2}{\eta + y} \right) + 2v_\theta = - \frac{\partial p}{\partial y} +$$

$$+ E \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \frac{1}{\eta + y} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{v_y}{(\eta + y)^2} \right],$$

$$\varepsilon \left(v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_y v_\theta}{\eta + y} \right) + 2v_y = E \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{1}{\eta + y} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{v_\theta}{(\eta + y)^2} \right],$$

$$\varepsilon \left(v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + E \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{\eta + y} \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \right) + \frac{1}{Fr},$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{v_y}{\eta + y} = 0, \quad v_y = -v_z;$$

$$y = 0, \quad z < 0, \quad v_y = v_z = v_\theta = 0,$$

$$z > 0, \quad v_y = v_z = 0, \quad v_\theta = \omega \eta;$$

$$(1.3) \quad y = h(z), \quad \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) (1 + h_z^2) + 4h_z \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$2E \frac{\partial v_y}{\partial y} (1 - h_z^2) - Eh_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \frac{\alpha}{(\eta + y)^2} [h^2 + (\eta + y)^2 h_{zz}] (1 + h_z^2) =$$

$$= p(1 + h_z^2), \quad v_y = h_z v_z, \quad \partial v_\theta / \partial y + v_\theta / (\eta + y) = 0.$$

Граничные условия при $z \rightarrow \pm \infty$ будут выписаны ниже. Задача (1.1) — (1.3) приведена к безразмерному виду с помощью замены переменных r, v, Ω, p их нормированными значениями $rh', vU', \Omega'_1 k, \rho' \Omega'_1 U' h' p$. Размерные величины приведены со штрихами

$$(1.4) \quad h' = (3Q'v'/g')^{1/3}, \quad Q' = Q'_0 / 2\pi R', \quad \eta = R' / h',$$

$$U' = Q' / h' = Q' (3Q'v'/g')^{-1/3}, \quad v_\lambda = v'_\lambda / U' \quad (\lambda = y, z, \theta),$$

$$p = (p' - p'_0) / (\rho' \Omega'_1 U' h'), \quad h = h'(z) / h',$$

$$\omega = \omega / \Omega'_1, \quad \Omega_2 = 1 + \omega,$$

где $E = v' / \Omega'_1 h'^2$ — число Экмана; $\varepsilon = U' / \Omega'_1 h'$ — число Россби; $Fr = \Omega'_1 U' / g'$ — число Фруда; $\alpha = \sigma' / (\rho' U' \Omega'_1 h')$; σ' — коэффициент поверхностного натяжения; v_θ, v_z, v_y — компоненты скорости вдоль осей θ, z, y соответственно; Ω'_1 — угловая скорость верхней полубесконечной трубы; ω — разница между угловыми скоростями верхней трубы Ω'_1 и нижней трубы Ω'_2 ; p'_0 — давление в газовой фазе; v' — кинематическая вязкость; g' — гравитационная постоянная; Q'_0 — расход жидкости.

Граничные условия (1.2) являются условиями прилипания на стенках верхней и нижней трубы. Граничные условия (1.3) приравнивают к нулю касательные напряжения на поверхности пленки, а нормальное напря-

жение — к давлению в газовой фазе. Граничные условия (1.3) выписаны с учетом кривизны пленки жидкости.

Исследование проведем для случая, когда влиянием инерционных сил (кроме сил Кариолиса) можно пренебречь, т. е. для случая, когда выполняются следующие соотношения: $\varepsilon/E \ll 1$, $\text{Fr}^{-1}/E \sim O(1)$, $E \sim O(1)$. Подставив в эти соотношения выражения (1.4), получим

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon/E &= Q'/v' \ll 1, \quad \text{Fr}^{-1}/E = 3 \sim O(1), \\ E &= v' (\Omega_1')^{-1} (3Q'v'/g')^{-2/3} \sim O(1). \end{aligned}$$

Если выполняются условия (1.5), то все члены в уравнениях (1.1) (за исключением инерционных) одного порядка, при этом для выполнения последнего соотношения необходимо, чтобы $\Omega_1' \sim v' (3Q'v'/g')^{-2/3}$; так как $Q'/v' \ll 1$, а $g' = 10^3 \text{ см}^2/\text{с}$, то $\Omega_1' \gg 1$. Подробный анализ сил, обуславливающий движение жидкости во вращающихся каналах, приведен в [1].

Исследуем случай, когда разница между угловыми скоростями труб мала, т. е. $\omega \ll 1$. Свяжем малый параметр ε с ω зависимостью $\omega = \varepsilon\Omega_0$ ($\Omega_0 = \Omega_0'/\Omega_1'$), $\Omega_0 \sim O(1)$. Рассмотрим течение в трубе, радиус которой $\eta \sim O(\varepsilon^{-1/2})$. Для удобства оценки членов в уравнении (1.1) введем новый параметр $R = \varepsilon^{1/2}\eta$. В этом случае условие (1.2) примет вид

$$y = 0, \quad z > 0, \quad v_\theta = \varepsilon^{1/2}\Omega_0 R.$$

Для решения задачи (1.1)–(1.3) необходимо найти профили скоростей и распределение давления при $z \rightarrow \pm\infty$. Для этого рассмотрим отдельно течение в области I, находящейся на бесконечности ($z \rightarrow -\infty$) вверх по потоку и в области II, находящейся на бесконечности ($z \rightarrow +\infty$) вниз по потоку.

2. В областях I и II течение не зависит от z (производные по z равны нулю, радиальное течение отсутствует, толщина пленки постоянная). Кроме того, так как в областях I и II в осевой плоскости действуют одни и те же по величине силы, то профили осевой компоненты скорости и толщины пленок жидкости будут одинаковые. Задача (1.1)–(1.3) в областях I и II сводится к виду

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2v_\theta &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon^{1/2}}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial y} - \frac{v_\theta \varepsilon}{R^2} = 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + E \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon^{1/2}}{R} \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \frac{1}{\text{Fr}} &= 0; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad y = 0, \quad v_y = v_z = v_\theta = 0;$$

$$(2.3) \quad y = 0, \quad v_y = v_z = 0, \quad v_\theta = \varepsilon^{1/2}R\Omega_0;$$

$$(2.4) \quad y = 1, \quad \partial v_\theta / \partial y + v_\theta \varepsilon^{1/2}/R = 0, \quad \partial v_z / \partial y = 0, \quad \alpha \varepsilon / R^2 + p = 0.$$

Здесь условие (2.2) выписано для области I, а (2.3) — для области II. Решение задач (2.1), (2.2), (2.4) и (2.1), (2.3), (2.4) ищем в виде

$$(2.5) \quad \begin{aligned} v_\lambda &= v_\lambda^0 + \varepsilon^{1/2}v_\lambda^{(1)} + \varepsilon v_\lambda^{(2)} + \dots \quad (\lambda = z, \theta), \\ p &= p^0 + \varepsilon^{1/2}p^{(1)} + \varepsilon p^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Подставив (2.5) в (2.1)–(2.4), найдем решение задачи в областях I и II:

$$(2.6) \quad v_z = \frac{1}{E \text{Fr}} \left(-\frac{y^2}{2} + y \right) + \varepsilon^{1/2} \frac{1}{RE \text{Fr}} \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} \right);$$

$$(2.7) \quad p = 0, \quad v_\theta = 0, \quad h = 1;$$

$$(2.8) \quad \begin{aligned} p &= 2\varepsilon^{1/2}(y-1)\Omega_0 - 2\varepsilon[\Omega_0(y^2-1)/2 - \alpha/R^2], \\ v_\theta &= \varepsilon^{1/2}R\Omega_0 - \varepsilon y\Omega_0, \quad h = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи в области I имеет вид (2.6), (2.7), а в области II — (2.6), (2.8). Следовательно, решение задачи (1.1)–(1.3) для области стыка при $z \rightarrow -\infty$ должно стремиться к функциям (2.6), (2.7), а при $z \rightarrow \infty$ — к функциям (2.6), (2.8).

3. Рассмотрим решение в области стыка. Решение задачи (1.1)–(1.3), (2.6), (2.8) ищем в виде

$$(3.1) \quad v_\lambda = v_\lambda^{(0)} + \varepsilon^{1/2} v_\lambda^{(1)} + \varepsilon v_\lambda^{(2)} + \dots \quad (\lambda = y, z, \theta), \\ p = p^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p^{(1)} + \varepsilon p^{(2)} + \dots, \quad h = 1 + \varepsilon^{1/2} h^{(1)} + \varepsilon h^{(2)} + \dots$$

Подставляя (3.1) в (1.1)–(1.3), (2.6), (2.8), получим

$$(3.2) \quad 2v_\theta^{(0)} = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial y} + E \left(\frac{\partial^2 v_y^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(0)}}{\partial z^2} \right), \quad 2v_y = E \left(\frac{\partial^2 v_\theta^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(0)}}{\partial z^2} \right), \\ 0 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} + E \left(\frac{\partial^2 v_z^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(0)}}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Fr}, \\ \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial y} = 0;$$

$$(3.3) \quad y = 0, \quad v_y^{(0)} = v_z^{(0)} = v_\theta^{(0)} = 0;$$

$$(3.4) \quad y = 1, \quad 2E \frac{\partial v_y}{\partial y} = p^{(0)}, \quad \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta^{(0)}}{\partial y} = 0;$$

$$(3.5) \quad z \rightarrow \pm \infty, \quad v_y^{(0)} \rightarrow 0, \quad v_z^{(0)} \rightarrow \frac{1}{E Fr} \left(-\frac{y^2}{2} + y \right), \quad v_\theta^{(0)} \rightarrow 0.$$

Представив осевую скорость в виде $v_z = \frac{1}{E Fr} \left(-\frac{y^2}{2} + y \right) + V_*$, сведем уравнения и граничные условия задачи (3.2)–(3.5) к однородным уравнениям и однородным граничным условиям для функций $p^{(0)}$, V_* , $v_y^{(0)}$, $v_\theta^{(0)}$. Решения этих уравнений с найденными граничными условиями тождественно равны нулю. Таким образом, решение задачи (3.2)–(3.5) имеет вид

$$(3.6) \quad v_z^{(0)} = \frac{1}{E Fr} \left(-\frac{y^2}{2} + y \right), \quad v_y^{(0)} = v_\theta^{(0)} = p^{(0)} = 0.$$

Найдем теперь первое приближение. Так как ε входит неявно в аргумент функции нулевого приближения в граничных условиях при $y = 1$, то необходимо, согласно [3, 4], предварительно разложить функции нулевого приближения в ряд Тейлора вблизи $y = 1$. Тогда уравнения (1.1)–(1.3) преобразуются к виду

$$(3.7) \quad 2v_\theta^{(1)} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y} + E \left(\frac{\partial^2 v_y^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial z^2} \right), \\ 2v_y^{(1)} = E \left(\frac{\partial^2 v_\theta^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial z^2} \right), \\ 0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} + E \left(\frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{R Fr} (-y + 1), \\ \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z} = 0;$$

$$(3.8) \quad y = 0, \quad z < 0, \quad v_y^{(1)} = v_z^{(1)} = v_\theta^{(1)} = 0, \\ z > 0, \quad v_y^{(1)} = v_z^{(1)} = 0, \quad v_\theta^{(1)} = \Omega_0 R;$$

$$(3.9) \quad y = 1, \quad 2E \left(\frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y} + h^{(1)} \frac{\partial^2 v_y^{(0)}}{\partial y^2} \right) + \alpha h_{zz}^{(1)} + h_z^{(1)} \left(\frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial y} \right) E = \\ = p^{(1)} + h^{(1)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial z} + h^{(1)} \left(\frac{\partial^2 v_z^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(0)}}{\partial z \partial y} \right) + 4h_z^{(1)} \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial y} = 0;$$

$$(3.10) \quad z \rightarrow -\infty, \quad v_y^{(1)} \rightarrow 0, \quad v_\theta^{(1)} \rightarrow 0, \quad v_z^{(1)} \rightarrow \frac{1}{RE Fr} \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} \right);$$

$$(3.11) \quad z \rightarrow \infty, \quad v_y^{(1)} \rightarrow 0, \quad v_\theta^{(1)} \rightarrow \Omega_0 R, \quad v_z^{(1)} \rightarrow \frac{1}{RE Fr} \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} \right).$$

Граничные условия (3.9) после подстановки в них выражения (3.6) примут вид

$$(3.12) \quad y = 1, \quad \frac{\partial v_\theta^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad v_y^{(1)} = h_z^{(1)} \frac{i}{2E Fr},$$

$$2E \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y} + \alpha h_{zz}^{(1)} = p^{(1)}, \quad \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial y} + h^{(1)} \left(-\frac{1}{E Fr} \right) = 0.$$

Сведем теперь систему уравнений (3.7) к одному уравнению в частных производных шестого порядка для радиальной компоненты скорости.

После преобразований получаем

$$(3.13) \quad 4 \frac{\partial^2 v_y^{(1)}}{\partial z^2} = E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta v_y^{(1)} + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{\partial}{\partial y \partial z^2} \right) \Delta \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y} \right\}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применив преобразование Фурье [5] к уравнению (3.13), получим

$$(3.14) \quad \frac{d^6 V_y}{dy^6} - 3\xi^2 \frac{d^4 V_y}{dy^4} + 3\xi^4 \frac{d^2 V_y}{dy^2} + (4E^{-1}\xi^2 - \xi^6) V_y = 0,$$

$$V_y = \int_{-\infty}^{\infty} v_y^{(1)}(z, y) \exp(iz\xi) dz;$$

$$(3.15) \quad V_y = C_1 e^{\alpha_1 y} + C_2 e^{\alpha_2 y} + C_3 e^{\alpha_3 y} + C_4 e^{\alpha_4 y} + C_5 e^{\alpha_5 y} + C_6 e^{\alpha_6 y},$$

$$\alpha_{1,2} = \pm [\xi^2 - (2E^{-1/2}\xi)^{2/3}]^{1/2},$$

$$\alpha_{3,4} = \{2\xi^2 + (2E^{-1/2}\xi)^{2/3} \pm \sqrt{8\xi^2(2E^{-1/2}\xi)^{2/3} - 3(2E^{-1/2}\xi)^{4/3}}\}/2,$$

$$\alpha_{5,6} = -\{2\xi^2 + (2E^{-1/2}\xi)^{2/3} \pm \sqrt{8\xi^2(2E^{-1/2}\xi)^{2/3} - 3(2E^{-1/2}\xi)^{4/3}}\}/2.$$

Константы C_i ($i = 1, 6$) найдем из граничных условий (3.8), (3.10)–(3.12). Представим осевую, азимутальную компоненты скорости и давления в виде

$$v_z^{(1)} = \frac{1}{E Fr R} \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} \right) + V_*, \quad v_\theta^{(1)} = v_\theta^* + \theta_0, \quad p^{(1)} = p_* + \theta,$$

где $\theta_0 = 0$, если $z < 0$; $\theta_0 = 2\Omega_0 R$, если $z > 0$; $v_\theta^* = 0$, если $z < 0$; $v_\theta^* = R(y - 1)\Omega_0$, если $z > 0$. Подставив их в граничные условия (3.8), (3.10), (3.12) и применив преобразование Фурье, получим

$$(3.16) \quad y = 0, \quad V_y = 0, \quad \frac{dV_y}{dy} = 0,$$

$$2V_\theta = -\frac{dp_*}{dy} + E \left(\frac{d^2 V_y}{dy^2} - \xi^2 V_y \right) = 0,$$

$$y = 1, \quad V_y = (-i\xi) H / (2E Fr), \quad 2E dV_y/dy - \alpha \xi^2 H = p_*,$$

$$\xi^2 V_y + d^2 V_y/dy^2 + i\xi H / (E Fr) = 0,$$

$$\frac{dV_\theta}{dy} = -\frac{dp_*}{dy^2} + E \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy} V_y - \xi^2 V_y \right) = 0,$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} h^{(1)}(z) e^{i\xi z} dz, \quad p_* = \int_{-\infty}^{\infty} p_* e^{i\xi z} dz.$$

Исключим из системы уравнений (3.16) p_* и H . Из второго уравнения системы (3.7) с учетом того, что $dp^{(1)}/dz = dp_*/dz + 2\delta(z)\Omega_0 R$ ($\delta(z)$ — дельта-функция), и третьего уравнения системы (3.16) следует

$$(3.17) \quad p_* = \frac{2\Omega_0 R}{i\xi} + \frac{E}{\xi^2} \left(\frac{d^3 V_y}{dy^3} - \xi^2 \frac{dV_y}{dy} \right), \quad H = 2E Fr V_y / (-i\xi).$$

Подставив выражения (3.17), (3.15) в систему уравнений (3.16), получим систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad C_6 &= \frac{2\Omega_0 R}{Ei\xi} \left\{ \Phi \left[(W_3 A_4 + W_4) \frac{(A_5 - B_5)}{(B_4 - A_4)} + W_3 A_5 + W_5 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_6 - B_6}{B_4 - A_4} (W_3 A_4 + W_4) + W_3 A_6 + W_6 \right\}^{-1}, \quad C_5 = \Phi C_6, \\
 C_4 &= (A_5 - B_5) C_5 / (B_4 - A_4) + (A_6 - B_6) C_6 / (B_4 - A_4), \\
 C_3 &= A_4 C_4 + A_5 C_5 + A_6 C_6, \\
 C_2 &= \{(\alpha_1 - \alpha_3) C_3 + (\alpha_1 - \alpha_4) C_4 + (\alpha_1 - \alpha_5) C_5 + \\
 &\quad + (\alpha_1 - \alpha_6) C_6\} (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}, \quad C_1 = -C_2 - C_3 - C_4 - C_5 - C_6, \\
 B_i &= -\{[(\xi^2 + \alpha_2 - 2) e^{\alpha_2} - (\xi^2 + \alpha_1 - 2) e^{\alpha_1}] (\alpha_1 - \alpha_i) (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} + \\
 &\quad + (\xi^2 + \alpha_i - 2) e^{\alpha_i} - (\xi^2 + \alpha_1 - 2) e^{\alpha_1}\} \{[(\xi^2 + \alpha_2 - 2) e^{\alpha_2} - \\
 &\quad - (\xi^2 + \alpha_1 - 2) e^{\alpha_1}] (\alpha_1 - \alpha_3) (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} + (\xi^2 + \alpha_3 - 2) e^{\alpha_3} - \\
 &\quad - (\xi^2 + \alpha_1 - 2) e^{\alpha_1}\}^{-1}, \\
 A_i &= \{[(\alpha_2^4 - \alpha_1^4) (\alpha_i - \alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} + \alpha_1^4 - \alpha_i^4] [\alpha_3^4 - \alpha_1^4 + \\
 &\quad + (\alpha_2^4 - \alpha_1^4) (\alpha_1 - \alpha_3) (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}]\}^{-1}, \\
 D_i &= \{[(\alpha_2^5 - \xi^4 \alpha_2) e^{\alpha_2} - (\alpha_1^5 - \xi^4 \alpha_1) e^{\alpha_1}] (\alpha_1 - \alpha_i) (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} + \\
 &\quad + (\alpha_i^5 - \xi^4 \alpha_i) e^{\alpha_i} - (\alpha_1^5 - \xi^4 \alpha_1) e^{\alpha_1}\} \{[(\alpha_2^5 - \xi^4 \alpha_2) e^{\alpha_2} - (\alpha_1^5 - \xi^4 \alpha_1) e^{\alpha_1}] + \\
 &\quad + [(\alpha_2^5 - \xi^4 \alpha_2) e^{\alpha_2} - (\alpha_1^5 - \xi^4 \alpha_1) e^{\alpha_1}] (\alpha_1 - \alpha_3) (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}\}^{-1}, \quad i = 3, 4, 5, 6, \\
 W_i &= [(3\alpha_2 - \alpha_2/\xi^2 - 2i\alpha\xi \text{Fr}) e^{\alpha_2} - (3\alpha_1 - \alpha_1/\xi - 2\alpha i\xi \text{Fr}) e^{\alpha_1}] \times \\
 &\quad \times (\alpha_1 - \alpha_i) (\alpha_2 - \alpha_1) + (3\alpha_i - \alpha_i/\xi - 2\alpha i\xi \text{Fr}) e^{\alpha_i} - \\
 &\quad - (3\alpha_1 - \alpha_1/\xi^2 - 2\alpha i\xi \text{Fr}) e^{\alpha_1}, \quad i = 3, 4, 5, 6, \\
 \Phi &= -\frac{(A_6 - D_6)/(D_4 - A_4) + (A_6 - B_6)/(B_4 - A_4)}{(A_5 - D_5)/(D_4 - A_4) - (A_5 - B_5)/(B_4 - A_4)}.
 \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, найдем $v_{\lambda}^{(1)}, p^{(1)}, h^{(1)}(\lambda = y, z, \theta)$ с учетом того, что выражение $\sqrt{s}$ следует принимать как однозначную функцию, совпадающую на верхнем берегу разреза вдоль вещественной положительной полуоси с арифметическим значением корня. Распределения функций $v_z^{(1)}, v_z^{(1)}, R^{(1)}, v_\theta^{(1)}$, определяющиеся обратным преобразованием Фурье

$$(3.19) \quad \theta(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-sz} g(y, s) ds, \quad s = i\xi,$$

имеют разный вид в областях $z < 0$ и $z > 0$.

4. Из анализа поведения подынтегрального выражения (3.19) найдем, что при $z < 0$.

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad v_z(z, y) &= \frac{\varepsilon^{1/2}}{E \text{Fr} R} \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} \right) + \frac{1}{E \text{Fr}} \left(-\frac{y^2}{2} + y \right) + \\
 &\quad + \varepsilon^{1/2} \sum_{n=1}^N T_n e^{\lambda_n z} R_n(y), \\
 v_y(z, y) &= \varepsilon^{1/2} \sum_{n=1}^N e^{\lambda_n z} T_n R_n^0(y), \\
 v_\theta(z, y) &= \varepsilon^{1/2} \sum_{n=1}^N T_n \lambda_n e^{\lambda_n z} R_n^*(y) + \theta_0,
 \end{aligned}$$

$$h(z) = 1 - \varepsilon^{1/2} \sum_{n=1}^N T_n e^{\lambda_n z} R_n(1),$$

$$R_n(y) = \sum_{k=1}^6 C_k e^{\alpha_k(\lambda_n)y} \alpha_k(y) H_1(\lambda_n),$$

$$R_n^0(y) = \sum_{k=1}^6 C_k e^{\alpha_k(\lambda_n)y} H_1(\lambda_n),$$

$$R_n^*(y) = \sum_{k=1}^6 (\alpha_k^4(\lambda_n) + \lambda_n^4) C_k e^{\alpha_k(\lambda_n)y} H_1(\lambda_n),$$

$$T_n = -\lambda_n^{-1} (\partial H / \partial x)_{x=\lambda_n}^{-1},$$

$$H_1 = (W_3^* A_4^* - W_4^* \Delta) [(A_5^* \delta - B_5^* \Delta) \Phi + (A_6^* \delta - B_6^* \Delta) \Phi_0],$$

$$A_i^* = A_i \Delta, \quad B_i^* = B_i \delta, \quad D_i^* = D_i \theta,$$

$$\Phi^* = (A_5^* \delta - B_5^* \Delta) (D_4^* \Delta - A_4^* \delta) - (A_6^* \theta - D_6^* \Delta) (B_4^* \Delta - A_4^* \delta), \quad W_i^* = W_i \tau,$$

$$\Phi_0 = (A_5^* \theta - D_5^* \Delta) (B_4^* \Delta - A_4^* \delta) - (A_6^* \delta - B_6^* \Delta) (D_4^* \Delta - A_4^* \theta),$$

$$\Delta = (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_1) [(\alpha_3^2 + \alpha_1^2) (\alpha_3 + \alpha_1) - (\alpha_2^2 + \alpha_1^2) (\alpha_2 + \alpha_1)],$$

$$\tau = x^2 (\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\theta = [(\alpha_2^5 - x^4 \alpha_2) e^{\alpha_2} - (\alpha_1^5 - x^4 \alpha_1) e^{\alpha_1}] (\alpha_1 - \alpha_3) + [(\alpha_3^5 - x^4 \alpha_3) e^{\alpha_3} - (\alpha_1^5 - x^4 \alpha_1) e^{\alpha_1}] (\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\delta = (x^2 - \alpha_4 + 2) e^{\alpha_4} (\alpha_1 - \alpha_2) + (x^2 + \alpha_2 - 2) e^{\alpha_2} (\alpha_4 - \alpha_1) - (x^2 - \alpha_1 - 2) e^{\alpha_1} (\alpha_4 - \alpha_2),$$

$$H_1(\lambda_n) = (W_3^* A_4^* - W_4^* \Delta) [\Phi^* (A_5^* \delta - B_4^* \Delta) + (A_6^* \delta - B_6^* \Delta) \Phi_0] + (B_4^* \Delta - A_4^* \delta) [(W_3^* A_5^* - W_5^* \Delta) \Phi^* + \Phi_0 (W_3^* A_6^* - W_6^* \Delta)], \quad \alpha_{1,2} =$$

$$= \pm [x^2 - (2xE^{-1/2})^{2/3}]^{1/2},$$

$$\alpha_{3,4} = \{2x^2 + (2xE^{-1/2})^{2/3} \pm [8x^2(2xE^{-1/2})^{2/3} - 3(2xE^{-1/2})^{4/3}]^{1/2}\}/2,$$

$$\alpha_{5,6} = -\{2x^2 + (2xE^{-1/2})^{2/3} \pm [8x^2(2xE^{-1/2})^{2/3} - 3(2xE^{-1/2})^{4/3}]^{1/2}\}/2.$$

Здесь W_i , A_i , B_i , D_i ($i = 3, 4, 5, 6$) задаются формулами (3.18), а выражения $f(\lambda_n)$ означают, что вместо x в формулах нужно подставить значения корней λ_n уравнений $H(\lambda_n) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Аналогично из (3.18), (3.19) следует, что при $z > 0$ функции v_z , v_y , v_θ , h определяются формулами (4.1), в которых функции α_i ($i = 1, \dots, 6$) заменены на функции

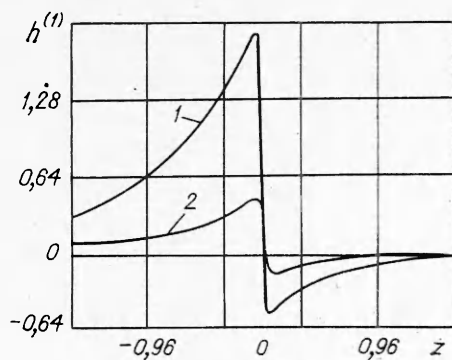
$$(4.2) \quad \alpha_{1,2} = \pm [-x^2 + (2xE^{-1/2})^{2/3}]^{1/2},$$

$$\alpha_{3,4} = [-2x^2 - (2xE^{-1/2})^{2/3} \pm \sqrt{8x^2(2xE^{-1/2})^{2/3} - 3(2xE^{-1/2})^{4/3}}]/2,$$

$$\alpha_{5,6} = -[-2x^2 - (2xE^{-1/2})^{2/3} \pm \sqrt{8x^2(2xE^{-1/2})^{2/3} - 3(2xE^{-1/2})^{4/3}}]/2.$$

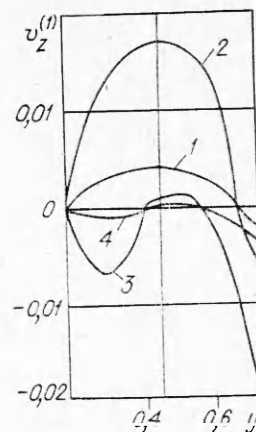
Соответственно изменяются функции H и корни λ_n . Соотношения (4.1), (4.2), (3.18) определяют аналитическое решение задачи о распределении поля скоростей и форме свободной поверхности пленки жидкости.

5. По формулам (4.1), (4.2), (3.18) было численно рассчитано течение пленки жидкости по внутренней поверхности вращающегося цилиндра для случая, когда $Fr = 0,6$, $E = 0,3$, $R = 5$, $\alpha = 7,3$, а Ω_n принимает разные значения. Сначала были найдены корни λ_n функции H для области $z < 0$ и корни соответствующих функций для области $z > 0$. Корни были определены по итерационному методу Мюллера для решений алгебраических уравнений высоких степеней [6]. После нахождения корней были численно рассчитаны комплексные выражения (4.1), (4.2) и выделены действительные части.



Ф и г. 1

Ф и г. 2

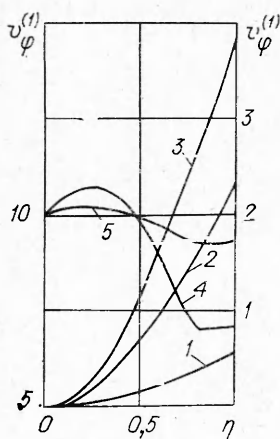


На фиг. 1 изображено изменение толщины пленки вдоль оси z для двух значений Ω_0 : кривая 1 соответствует $\Omega_0 = 2$, 2 — $\Omega_0 = 0,5$. Как видно из фиг. 1, толщина пленки резко возрастает в области $z < 0$, вблизи нуля, образуя горб, затем резко убывает, и в области $z > 0$ появляется небольшая впадина. Образование горба связано с тем фактом, что давление в жидкости различно при $z < 0$ и $z > 0$ согласно формулам (2.7), (2.8), т. е. в жидкости вблизи поверхности цилиндра в точке $z = 0$ наблюдается скачок давления, обусловленный разными скоростями вращения цилиндров. Если угловая скорость вращения нижнего цилиндра больше, чем верхнего ($\Omega_2 > \Omega_1$, $\Omega_0 > 0$), то давление при $z \rightarrow +0$ будет больше, чем при $z \rightarrow -0$, т. е. на линии стыка появится дополнительная сила, которая будет препятствовать движению жидкости, что приводит к образованию горба. Чем больше скачок угловой скорости, тем больше градиент давления, тем больше высота горба, что согласуется с расчетом, представленным на фиг. 1. В области $z > 0$ наблюдается небольшое ускорение течения жидкости, что приводит, как это следует из фиг. 1, к образованию небольшой впадины. Горб и впадина наблюдаются только на небольшом отрезке вдоль оси z порядка одной или двух толщин пленки по обе стороны от плоскости $z = 0$, а в других точках поверхность практически не возмущена, так как градиент давления отличен от нуля только вблизи $z = 0$. Толщины пленки вдали от плоскости $z = 0$ одинаковые, так как течение в этих областях определяется только силами гравитации и вязкости, а они одинаковые.

Распределение давления также имеет резкий пик в области $z = 0$ вблизи линии раздела труб. Следует отметить, что подобный вид изменения давления наблюдается и при других типах резкого изменения граничных условий, например при обтекании одиночного выступа [7].

На фиг. 2 представлено распределение вдоль оси y третьего слагаемого скорости в формуле (4.1) при $\Omega_0 = 2$, а $z = -1,62; -0,42; 0,42; 1,62$ (кривые 1—4 соответственно). Из фиг. 3 видно, что в области $z < 0$ ($\Omega_0 = 2$) от распределения осевой скорости, определяемой первыми двумя слагаемыми формулы (4.1), следует отнять значение поправки, задаваемой третьим слагаемым формулы (4.1). Отсюда следует, что осевые скорости, согласно фиг. 3, будут уменьшаться при приближении к $z \rightarrow -0$ в диапазоне по y от 0 до 0,9, а в области $0,9 \leq y \leq 1$ будут несколько больше, чем скорость в этом диапазоне на бесконечности. В целом течение замедляется, и образуется горб при $z < 0$, что согласуется с фиг. 1. При $z > 0$ значение поправки V_* к осевой скорости больше нуля при $0 \leq y \leq 0,4$, при $0,4 \leq y \leq 0,72$ учет поправки приводит к замедлению потока в этом диапазоне, и при $0,72 \leq y \leq 1$ поправка опять вносит положительный вклад. Как видно из фиг. 3, в целом учет третьего члена в формуле (4.1) приводит к ускорению потока, что согласуется с фиг. 1.

На фиг. 3 приведено распределение азимутальной составляющей скорости вдоль оси y при $\Omega_0 = 2$ и при $z = -1,62; -0,42; -0,02; 0,82; 1,62$



Ф и г. 3

(кривые 1—5 соответственно). Из фиг. 3 видно, что с ростом z (в области $z < 0$) происходит непрерывное возрастание азимутальной скорости. Вязкие напряжения, возникающие вследствие разницы угловых скоростей полубесконечных труб, передаются вверх по потоку и приводят в азимутальное движение жидкость в области $z > 0$ вблизи линии стыка. Наличие неподвижной стенки в области $z < 0$ (стенка неподвижна во вращающейся системе координат) препятствует вращению жидкости. Поэтому азимутальная скорость убывает при приближении к стенке цилиндра. В области $z > 0$ скорость вращения жидкости должна совпадать со скоростью вращения полубесконечной трубы, поэтому с ростом z происходит выравнивание величины азимутальной компоненты скорости вдоль толщины слоя, что согласуется с фиг. 3.

Следует отметить, что эффект «запирания» потока (образование областей замкнутых циркуляций), частично обнаруженный в рассмотренном течении (образование горба на свободной поверхности), также наблюдается при течении жидкости в трубе, состоящей из двух плотно состыкованных труб, вращающихся с разными угловыми скоростями [8], а также в предельном случае, когда одна труба покоится, а другая вращается [9]. Замкнутые циркуляционные зоны образуются также во вращающихся каналах переменного сечения [10].

Поступила 4 V 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981.
2. Гринспен Х. Теория вращающейся жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1978.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
5. Снеддон Х. Преобразование Фурье. М.: ИЛ, 1959.
6. Ланс Дж. Н. Числовые методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: ИЛ, 1962.
7. Sykes R. I. On three-dimensional boundary layer flow over surface irregularities.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1980, vol. 375, N 1754.
8. Lavan Z., Nielson H., Fijer A. A. Separation and flow in swirling flow in circular ducts.— Phys. Fluids, 1969, vol. 12, N 9.
9. Бодунов Н. Ф. О некоторых закрученных течениях несжимаемой жидкости.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1977, вып. 3.
10. Симуни Л. М. Исследование движения вязкой жидкости между поверхностями вращения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6.

УДК 532.526

РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ СО ВДУВОМ

В. М. Ерошенко, Л. И. Зайчик, В. Б. Рабовский
(Москва)

В [1] проведено экспериментальное исследование перехода ламинарного режима течения в турбулентный для потока в круглой трубе, организованного за счет вдува через пористую боковую поверхность при заглушенном переднем торце трубы. В результате было установлено, что вдув приводит к повышению устойчивости ламинарного режима течения и увеличивает число Рейнольдса перехода до 10 000 вместо значения 2300, характерного для течения в круглой трубе с непроницаемыми стенками. Аналогичный эффект был обнаружен в [2], где также получено, что число Рейнольдса потери устойчивости под действием вдува может принимать значения, существенно большие, чем в трубах с непроницаемыми стенками. В [3, 4] при относительно невы-