Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 1

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЛИЗА В ПРИЛОЖЕНИИ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПОТОКА ТЕПЛА ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

УДК 533.72

А. А. Юшканов[1], С. А. Савков[2]

[1]**Московский педагогический университет, 107846 Москва**
[2]**Орловский государственный педагогический университет, 302015 Орел**

В настоящее время для решения задач кинетической теории газов широко используются различные варианты моментных методов, в том числе метод полупространственных моментов и метод Лиза. Общим в этих методах является то, что функция распределения ищется в виде суммы полиномов скорости, коэффициенты при которых определяются из решения системы моментных уравнений. Для составления последних кинетическое уравнение умножается на соответствующие полиномы и интегрируется по скорости.

В методе полупространственных моментов в качестве полиномов в функции распределения и при составлении моментных уравнений используется один и тот же набор разрывных функций скорости, что позволяет более корректно описывать характер изменения функции распределения в результате взаимодействия молекул газа между собой и находящимися в нем аэрозольными частицами и, кроме того, делает метод логически замкнутым. Однако для правильного описания поведения газа в ряде случаев приходится использовать слишком большое число моментов, что существенно усложняет решение задачи, а зачастую делает его просто невозможным.

В методе Лиза функция распределения также выражается через разрывные полиномы скорости, но для составления моментных уравнений используются непрерывные функции. Часть из них выбирается так, чтобы соответствующие им моментные уравнения представляли собой один из законов сохранения. Недостающие моменты приходится задавать искусственно. Тот факт, что в указанном методе законы сохранения удовлетворяются автоматически, позволяет при достаточно грубом выборе функции распределения получать удовлетворительные результаты. Однако реальная картина релаксации функции распределения существенно искажается, поскольку передача информации между конусами влияния частицы, т. е. перемешивание функций распределения для падающих и отраженных от ее поверхности молекул, происходит не только за счет интеграла столкновений, что свойственно методу полупространственных моментов, но и искусственно, посредством умножения этого интеграла на непрерывную функцию скорости. По той же причине метод Лиза не дает корректного описания распределения по конусам влияния потоков массы и тепла, что в ряде задач может представлять самостоятельный интерес.

В данной работе предлагается обратная методу Лиза процедура решения кинетического уравнения, сочетающая преимущества как метода полупространственных моментов, так и метода Лиза, а именно: функция распределения выражается через непрерывные функции скорости, которые в прямом методе используются для составления моментных уравнений, а кинетическое уравнение умножается на соответствующие разрывные функции. Такой подход, во-первых, дает возможность уменьшить число моментов и моментных уравнений, необходимое для автоматического выполнения законов сохранения, во-вторых, позволяет правильно описать характер изменения функции распределения в результате

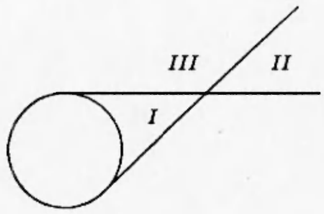

Рис. 1

взаимодействия молекул газа между собой и с поверхностью частицы.

В качестве примера рассмотрим задачу о вычислении потока тепла от равномерно нагретой до температуры T_ω сферической частицы радиуса R, находящейся в газе, в котором поддерживается постоянная на бесконечности температура T_0. Будем предполагать, что перепад температуры $\Delta T = T_\omega - T_0$ достаточно мал для того, чтобы линеаризовать задачу.

В каждой точке пространства с частицей связано три инвариантных «конуса», в которых лежит скорость молекул, летящих к частице, от нее и пролетающих мимо (области I–III на рис. 1). Границы конусов молекулы газа пересекают только за счет столкновений между собой. Поскольку при решении этой и ей подобных задач стандартным методом Лиза (см., например, [1–3]) области I и III объединяются, то естественно начать рассмотрение с данного случая.

Введем сферическую систему координат с началом в центре частицы. Состояние газа вокруг частицы описывается кинетическим уравнением Больцмана [4]:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla f = J_{st} \tag{1}$$

($\mathbf{V}$ — собственная скорость молекул газа, f — функция распределения молекул по скоростям, J_{st} — интеграл столкновений).

В дальнейшем ограничимся БГК-моделью интеграла столкновений [5]:

$$J_{st} = \frac{1}{\tau}(f_{eq} - f)\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}.$$

Здесь

$$\tau = \frac{3\lambda}{\sqrt{\pi}} = \frac{æ}{5n}\left(\frac{8m}{k^3T}\right)^{1/2}; \quad f_{eq} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

— локально-равновесная функция распределения; λ — средняя длина свободного пробега молекул газа; æ — его теплопроводность.

В силу линейности задачи функция распределения мало отличается от распределения на бесконечности:

$$f = f_0(1 + \Phi), \quad f_0 = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_0}\right)$$

(m и n — масса и концентрация молекул газа, k — постоянная Больцмана).

Таким образом, задача сводится к определению поправки Φ к равновесной функции распределения f_0.

В стандартном методе Лиза используется двухпоточная функция распределения

$$\Phi^{\pm} = a_1^{\pm} + C^2 a_2^{\pm},$$

где знак плюс относится к функции распределения для летящих от частицы молекул, вектор скорости которых лежит внутри области II (рис. 1), знак минус — к молекулам, вектор скорости которых лежит вне указанной области. Для удобства дальнейших рассуждений введем вспомогательную функцию

$$\eta^+ = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad C_r < C\sqrt{1-(R/r)^2}, \\ 0 & \text{при} \quad C_r > C\sqrt{1-(R/r)^2}, \end{cases} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{V}\sqrt{m/2kT}.$$

Тогда искомую функцию распределения можно записать в виде

$$\Phi = \Phi^+\eta^+ + \Phi^-(1-\eta^+). \tag{2}$$

Коэффициенты $a_i^{\pm}$ определяются из системы моментных уравнений, для составления которой кинетическое уравнение умножается на 1, C_r, C^2, C_rC^2 и интегрируется по скорости. Соответственно в обратной процедуре функцию распределения следует искать в виде

$$\Phi = a_1 + C_r a_2 + C^2 a_3 + C_r C^2 a_4, \tag{3}$$

а для составления моментных уравнений использовать η^+, $(1-\eta^+)$, $C^2\eta^+$ и $C^2(1-\eta^+)$.

Умножая кинетическое уравнение с функцией распределения (3) на перечисленные моменты и интегрируя по скорости, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{R^2}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}a_1 + a_3\right) + \left(1 \mp \left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4}a_2 + \frac{5}{8}a_4\right) + \\ + \frac{1}{r}\left(2 \mp 3\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2} \pm \left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{4}a_2 + \frac{5}{8}a_4\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{R^2}{r^2}\frac{a_4}{4\tau}, \\ \pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{R^2}{r^2}\frac{d}{dr}(a_1 + 3a_3) + \left(1 \mp \left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{5}{4}a_2 + \frac{35}{16}a_4\right) + \\ + \frac{1}{r}\left(2 \mp 3\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2} \pm \left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{5}{4}a_2 + \frac{35}{16}a_4\right) = \mp\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{R^2}{r^2}\frac{a_4}{2\tau}. \end{gathered} \tag{4}$$

Затухающее на бесконечности решение этой системы имеет вид

$$\begin{gathered} a_1 = K\left(-\frac{5}{2}\frac{R^2}{r\tau} - \frac{5}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{3}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \right.\right. \\ \left.\left. + 2\mathrm{Ln}\left(1+\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{3} - 2\mathrm{Ln}\,2\right)\right), \end{gathered} \tag{5}$$

$$a_2 = -\frac{5}{2}\frac{R^2}{r^2}K, \quad a_3 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{4}\frac{R^2}{r\tau}K, \quad a_4 = \frac{R^2}{r^2}K.$$

Постоянную интегрирования K определим из условия отражения молекул газа от поверхности частицы:

$$f^+ = \Omega f^- \qquad \text{при} \quad r = R. \tag{6}$$

Здесь f^- и f^+ — функции распределения для падающих и отраженных от частицы молекул; Ω — оператор, описывающий закон отражения.

Условие (6) также должно быть записано в моментной форме. Для этого его необходимо ввести в кинетическое уравнение (1). Тогда соответствующие моментные граничные условия будут получены при составлении моментных уравнений (4) автоматически. Формально это означает (см., например, [6]), что равенство (6) надо записать в виде $C_r f^+ = C_r \Omega f^-$, умножить последовательно на η^+ и $C^2\eta^+$ и проинтегрировать по скорости. В результате получим систему моментных условий на поверхности частицы:

$$\int \eta^+ C_r(a_1 + C_r a_2 + C^2 a_3 + C_r C^2 a_4)\exp(-C^2)\,d\mathbf{C} = \int \eta^+ C_r \Omega f^-\,d\mathbf{C},$$

$$\int \eta^+ C^2 C_r(a_1 + C_r a_2 + C^2 a_3 + C_r C^2 a_4)\exp(-C^2)\,d\mathbf{C} = \int \eta^+ C^2 C_r \Omega f^-\,d\mathbf{C}.$$

Следует отметить, что рассмотрение произвольного закона отражения молекул газа от поверхности частицы молекул оказывается возможным лишь при использовании для составления моментных уравнений разрывных функций скорости. По этой причине в стандартном методе Лиза рассматриваются только условия зеркально-диффузного отражения.

Для анализа ограничимся законом чисто диффузного отражения:

$$\Omega f^- = f_\omega \quad \left(f_\omega = f_0\left(1 + \frac{\Delta n}{n_0} + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\Delta T}{T_0}\right)\right).$$

В этом случае условия на поверхности частицы принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}a_1 + a_3\right) + \left(\frac{1}{4}a_2 + \frac{5}{8}a_4\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(2\frac{\Delta n}{n_0} + \frac{\Delta T}{T_0}\right),\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}(a_1 + 3a_3) + \left(\frac{5}{8}a_2 + \frac{35}{16}a_4\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Delta n}{n_0} + \frac{3}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right).\end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя (5) в условия (7) и решая составленную систему уравнений относительно K, получим

$$K = \frac{1}{\frac{R}{r} + \frac{5}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{4}{3} - \ln 2\right)}\frac{\Delta T}{T_0}.$$

Радиальную составляющую потока тепла найдем из соотношения

$$q_r = \int f\,\frac{mV^2}{2}V_r\,d\mathbf{V} = n\left(\frac{2k^3T^3}{m}\right)^{1/2}Q_r, \tag{8}$$

где

$$Q_r = \frac{1}{\frac{4}{5}\frac{R}{r} + \sqrt{\pi}\left(\frac{4}{3} - \ln 2\right)}\frac{R^2}{r^2}\frac{\Delta T}{T_0}.$$

Прямой метод Лиза для функции распределения (2) дает

$$Q_r = \frac{1}{\frac{4}{5}\frac{R}{r} + \sqrt{\pi}}\frac{R^2}{r^2}\frac{\Delta T}{T_0}. \tag{9}$$

В случае крупной частицы ($R/\tau \to \infty$) результаты прямого и обратного методов совпадают и приводят к известному газодинамическому решению [7]:

$$Q_r = \frac{5}{4}\,\tau\,\frac{R}{r^2}\,\Delta T, \quad q_r = æ\,\frac{R}{r^2}\,\Delta T. \tag{10}$$

Для умеренно крупной частицы поток тепла можно представить в виде

$$q_r = æ\,\frac{R}{r^2}\,\Delta T\,\frac{1}{1 + C_t\lambda/R}. \tag{11}$$

Здесь C_t — коэффициент скачка температуры, определенного соотношением

$$\delta T = \frac{\lambda}{R}\,C_t\,\frac{dT}{dr}.$$

Сравнивая (8) и (11), получим $C_t = \frac{5}{4}\,\frac{\tau}{\lambda}\sqrt{\pi}\left(\frac{4}{3} - \ln 2\right) = 2{,}401$, что на 9 % отличается от точного значения 2,19 [8], рассчитанного для этой модели интеграла столкновений, тогда как для прямого метода $C_t = 3{,}75$.

В свободномолекулярном режиме ($R/\tau \to 0$) обратный метод дает значение потока тепла в 1,5 раза большее, чем прямой. Последнее может быть обусловлено недостаточным количеством удерживаемых моментов как в прямом, так и в обратном методе.

Особый интерес представляет рассмотрение всех трех конусов влияния. В этом случае поправку к функции распределения следует искать в виде

$$\Phi = \left(\frac{3}{2} - C^2\right)a_1 + \left(\frac{5}{2} - C^2\right)\left(C_r a_2 + C_r^2 a_3\right) + \left(\frac{7}{2} - C^2\right)C_r^3 a_4, \tag{12}$$

а для составления моментных уравнений использовать

$$(2 - C^2)\eta^{\pm}, \quad \left(\frac{5}{2} - C^2\right)(1 - \eta^+ - \eta^-) \quad \text{и} \quad C_r\left(\frac{5}{2} - C^2\right)(1 - \eta^+ - \eta^-).$$

Здесь η^- — вспомогательная функция, описывающая летящие к частице молекулы, вектор скорости которых лежит внутри области I (рис. 1):

$$\eta^- = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad C_r < -C\sqrt{1 - (R/r)^2}, \\ 0 & \text{при} \quad C_r > -C\sqrt{1 - (R/r)^2}. \end{cases}$$

Умножая кинетическое уравнение на перечисленные моменты и интегрируя по скорости, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{R^2}{r^2}\,\frac{da_1}{dr} + \frac{5}{8}\left(1 - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}\right)\frac{da_2}{dr} \pm \frac{7}{4\sqrt{\pi}}\,\frac{R^2}{r^2}\left(2 - \frac{R^2}{r^2}\right)\frac{da_3}{dr} +$$
$$+\frac{21}{16}\left(1 - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{5/2}\right)\frac{da_4}{dr} + \frac{5}{8}\left(2 - 3\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}\right)\frac{a_2}{r} \pm$$
$$\pm\frac{7}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{R^4}{r^4}\,\frac{a_3}{r} + \frac{63}{16}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{5/2}\right)\frac{a_4}{r} =$$
$$= \frac{1}{\tau}\,\frac{R^2}{r^2}\left(\mp\frac{a_2}{\sqrt{\pi}} - \frac{5}{8}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2} a_3 \mp \frac{5}{4}\left(2 - \frac{R^2}{r^2}\right)\frac{a_4}{\sqrt{\pi}}\right), \tag{13}$$

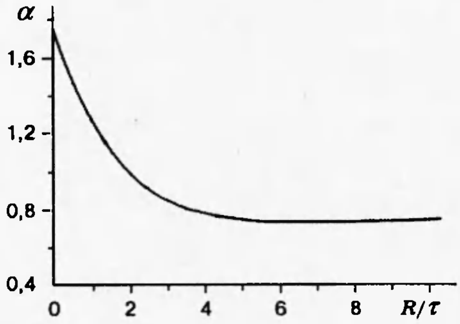

Рис. 2

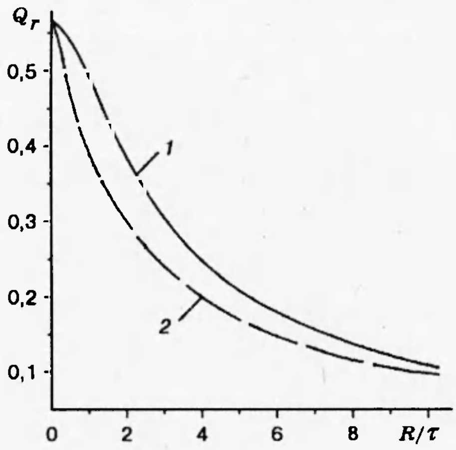

Рис. 3

$$\frac{5}{4}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}\frac{da_2}{dr}+\frac{5}{4}\left(3\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}\right)\frac{a_2}{r}+$$
$$+\frac{21}{8}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{5/2}\frac{da_4}{dr}+\frac{63}{8}\left(\frac{5}{3}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2}-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{5/2}\right)\frac{a_4}{r}=\frac{1}{\tau}\frac{R^2}{r^2}\frac{5}{8}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2}a_3,$$
$$\frac{5}{4}\frac{da_1}{dr}+\frac{27}{8}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{da_3}{dr}+\frac{9}{2}\left(1+\frac{3}{2}\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{a_3}{r}=-\frac{5}{4}\frac{a_2}{\tau}-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{21}{8}\frac{a_4}{\tau}.$$

Для этой системы моментное граничное условие на поверхности частицы имеет вид

$$\frac{a_1}{\sqrt{\pi}}+\frac{5}{8}a_2+\frac{7}{4}\frac{a_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{21}{16}a_4=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Delta T}{T_0}. \qquad (14)$$

Система дифференциальных уравнений (13) с условием (14) на поверхности частицы решалась численно. Начальные значения a_i подбирались методом стрельбы так, чтобы отсеять экспоненциально растущее на бесконечности решение. В результате получено выражение для потока тепла:

$$Q_r=\frac{1}{\frac{4}{5}\frac{R}{\tau}+\alpha}\frac{R^2}{r^2}\frac{\Delta T}{T_0}. \qquad (15)$$

Зависимость параметра α от размеров частицы представлена на рис. 2. Для сопоставления на рис. 3 приведены значения обезразмеренного потока тепла Q_r, рассчитанные для функции распределения (12) (кривая *1*), и результаты стандартного метода Лиза (кривая *2*).

В случае мелкой частицы ($R/\tau\to 0$) значение α стремится к $\sqrt{\pi}$, что совпадает с результатами прямого метода для функции распределения (2).

В газодинамическом режиме ($R/\tau\to\infty$) формула (15) приводит к результату (10). В этом пределе $\alpha=\sqrt{\pi}/2$. Соответственно $C_t=1{,}875$, что совпадает с известным максвелловским значением и на 14 % отличается от точного.

Полученные результаты свидетельствуют о достаточной надежности изложенного метода и позволяют надеяться на то, что его можно применять для решения более сложных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lees L., Liu Chung-Yen.** Kinetic theory description of conductive heat transfer from a fine wire // Phys. Fluids. 1962. V. 5, N 10. P. 1137–1148.
2. **Смирнов Л. П., Чекалов В. В.** Медленное вращение сферы в ограниченном объеме разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 117–124.
3. **Яламов Ю. И., Ивченко И. Н.** Теория испарения сферических частиц при произвольных числах Кнудсена // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 5. С. 1106–1110.
4. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
5. **Bhathagar P. L., Gross E. P., Krook M. A.** A model for collision processes in gases // Phys. Rev. 1954. V. 94, N 3. P. 511–525.
6. **Савков С. А., Юшканов А. А.** О зависимости коэффициентов скольжения от характера взаимодействия газа с твердой поверхностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 149–152.
7. **Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1967.
8. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.

Поступила в редакцию 19/VII 1994 г.,
в окончательном варианте — 12/I 1995 г.