УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЕМ

Т. Л. Мартынович

(Львов)

Точное решение задачи об изгибе анизотропной пластинки, ослабленной отверстием, известно только для случаев, когда отверстие имеет форму круга или эллипса [1, 2]. Ни для каких иных форм отверстий точного решения не получено. Для определения изгибающих моментов в анизотропной пластинке возле отверстия, мало отличающегося от эллиптического или кругового, применяются приближенные методы [3—6], которые распространены и на случай многосвязных анизотропных пластинок [7].

1. Пусть тонкая анизотропная пластинка толщиной h, имеющая в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости xOy, занимает бесконечную область S с отверстием, ограниченным простым гладким замкнутым контуром L, который описывается уравнением $x+iy=R\left(e^{i\theta}-\sum\limits_{k=1}^{N}c_k e^{-ik\theta}\right)$. Рассмотрим первую основную задачу, когда к краю отверстия пластинки L приложены изгибающие моменты $m(s)$, а в удаленных от отверстия частях пластинки изгибающие и крутящие моменты ограничены: $M_x^\infty=M_1$, $M_y^\infty=M_2$, $H_{xy}^\infty=M_{12}$.

На основании формул теории изгиба анизотропных пластинок [1, 2] граничные условия запишем в дифференциальной форме

$$dV=-m(s)dt \quad (t\in L), \tag{1.1}$$

причем

$$V=\sum_{j=1}^{2}\left[\left(q_j+i\frac{p_j}{\mu_j}\right)\varphi_j(z_j)+\left(q_j+i\frac{\bar p_j}{\bar\mu_j}\right)\overline{\varphi_j(z_j)}\right], \tag{1.2}$$

$$\lim_{|z_j|\to\infty}\varphi_j'(z_j)=A^{(j)}\quad (j=1,2),$$

где $\varphi_j(z_j)$ — аналитические функции, описывающие напряженное состояние в пластинке; $z_j=x+\mu_j y$ $(j=1,\ 2)$ — обобщенные комплексные переменные, изменяющиеся в областях S_j, получаемых из области S соответствующими аффинными преобразованиями; $\mu_j=\alpha_j+i\beta_j$ — корни характеристического уравнения; p_j, q_j — известные постоянные величины [1, 2]; t — аффикс точки контура L; $A^{(j)}$ — постоянные, которые выражаются через изгибающие и скручивающие моменты в пластинке на бесконечности.

Контуры отверстий областей S_j переменных $z_j=x+\mu_j y$ обозначим через L_j, а аффиксы их точек — через t_j $(j=1,\ 2)$. Аффиксы точек контуров L_j и контура L находятся между собой в аффинном соответствии

$$t_j=\frac{1-i\mu_j}{2}t+\frac{1+i\mu_j}{2}\bar t\quad (j=1,2). \tag{1.3}$$

Граничные условия (1.1) преобразуем к интегральному виду [8]

$$\int_L F(t)\,dV=-\int_L F(t)\,m(t)\,dt, \tag{1.4}$$

$$\int_L \overline{F(t)}dV=-\int_L \overline{F(t)}m(t)\,dt,$$

где $F(t)$ — граничное значение произвольной функции $F(z)$ переменной $z = x + iy$, голоморфной в области пластинки S.

Пусть регулярная функция, совершающая конформное отображение внешности единичной окружности $\gamma(|\zeta| \geqslant 1)$ на внешность контура L области S, имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{k=1}^{N} c_k\zeta^{-k}\right)(\omega'(\zeta) \neq 0, |\zeta| \geqslant 1), \tag{1.5}$$

причем [9]

$$\sum_{k=1}^{N} k|c_k|^2 < 1.$$

Изменяя в соотношении (1.5) постоянные R, c_k и N, можно получить отверстия в форме круга, эллипса, овала, криволинейного треугольника, четырехугольника и др.

Соотношения (1.3) с учетом отображающей функции (1.5) примут вид

$$t_j = \frac{R_j}{R}\left[\omega(\sigma) + m_j\overline{\omega(\sigma)}\right] \quad (t_j \in L_j, \sigma \in \gamma), \tag{1.6}$$

где $$R_j = \frac{R(1 - i\mu_j)}{2}; \quad m_j = \frac{1 + i\mu_j}{1 - i\mu_j} \quad (j = 1, 2).$$

Выражения (1.6) представляют собой граничные значения функций

$$z_j = \omega_j(\zeta_j) = \frac{R_j}{R}\left[\omega(\zeta_j) + m_j\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta_j}\right)\right](z_j \in S_j, |\zeta_j| \geqslant 1),$$

регулярных в областях $|\zeta_j| \geqslant 1$, кроме точек $\zeta_j = \infty$, где они имеют полюс порядка N. Функции $\omega_j(\zeta_j)$ и $\omega_j'(\zeta_j)$ имеют нули, расположенные вне единичной окружности $\gamma(|\zeta_j| \geqslant 1)$, число которых равно $N - 1$ [9].

Только при $N = 0$ (круговое отверстие) и $N = 1$ ($|c_1| < 1$) (эллиптическое отверстие) $\omega_j(\zeta_j) \neq 0$ и $\omega_j'(\zeta_j) \neq 0$ вне γ.

При больших $|z_j|$ функции $\varphi_j(z_j)$ имеют вид [1, 2]

$$\varphi_j(z_j) = D^{(j)}\ln z_j + A^{(j)}z_j + A_0'^{(j)} + O\left(\frac{1}{z_j}\right) \quad (j = 1, 2).$$

Постоянные $D^{(j)}$ выражаются через компоненты главного момента внешних усилий, приложенных к границе L по известным формулам (главный вектор $P_z = 0$) [2].

Вводя обозначения $\varphi_j[\omega_j(\zeta_j)] = \varphi_{*j}(\zeta_j)$, находим

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)} \quad (j = 1, 2), \tag{1.7}$$

где

$$\omega_j'(\zeta_j) = \frac{R_j}{R}\left[\omega'(\zeta_j) - \frac{m_j}{\zeta_j^2}\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta_j}\right)\right]. \tag{1.8}$$

Функции $\varphi_{*j}(\zeta_j)$ ограничены в областях $1 \leqslant |\zeta_j| < \infty$, а в точках $\zeta_j = \infty$ имеют полюс порядка N. Последние утверждения вытекают из условий (1.2), налагаемых на функции $\varphi_j(z_j)$ на бесконечности

$$\lim_{|z_j|\to\infty} \varphi_j'(z_j) = \lim_{|\zeta_j|\to\infty} \frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)} = A^{(j)} \quad (j = 1, 2), \tag{1.9}$$

и ограниченности выражения

$$2\frac{\partial W}{\partial \bar z} = \sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\mu_j)\,\varphi_{*j}(\zeta_j) + (1+i\bar\mu_j)\,\overline{\varphi_{*j}(\zeta_j)}\right] \quad (1 \leqslant |\zeta_j| < \infty),$$

где W — прогиб пластинки.

Следовательно, функции $\varphi_{*j}(\zeta_j)$, ограниченные в области $1 \leqslant |\zeta_j| < \infty$, при достаточно больших $|\zeta_j|$ можно представить в виде рядов (неограниченные слагаемые отброшены)

$$(1.10) \qquad \varphi_{*j}(\zeta_j) = D^{(j)}\ln\zeta_j + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(j)}\zeta_j^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(j)}\zeta_j^{-k} \quad (j=1,\ 2).$$

Однозначные функции (1.7) не имеют других особых точек, кроме полюсов, совпадающих с нулями функции $\omega_j'(\zeta_j)$. Следовательно, они являются мероморфными функциями переменных ζ_j. В рассматриваемом случае в силу представлений (1.5), (1.10) — дробно-рациональными функциями.

При надлежащем определении функций $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ можно достичь того, что функции (1.7) будут ограниченными вне единичной окружности γ. Для этого достаточно потребовать, чтобы нули функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ совпадали вне γ с нулями функции $\omega_j'(\zeta_j)$.

Таким образом, функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ должны удовлетворять условиям

$$(1.11) \qquad \varphi_{*j}'\left(\zeta_j^{(n)}\right) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, N-1), \quad (j = 1, 2),$$

где $\zeta_j^{(n)}$ — корни уравнений

$$\omega_j'(\zeta_j) = 0 \quad (j = 1,\ 2)$$

по модулю больше единицы ($|\zeta_j^{(n)}| > 1$).

На основании выражений (1.5), (1.8) и (1.10) функции (1.7) принимают вид

$$(1.12) \qquad \varphi_j'(z_j) = \frac{D^{(j)} + \sum\limits_{k=1}^{N} k a_k^{(j)}\zeta_j^k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} k A^{(j)}\zeta_j^{-k}}{R_j\left[\left(\zeta_j - \sum\limits_{k=1}^{N} k c_k \zeta_j^{-k}\right) - \frac{m_j \bar R}{R}\left(\zeta_j^{-1} - \sum\limits_{k=1}^{N} k\bar c_k \zeta_j^k\right)\right]}.$$

Условия (1.9), (1.11) с учетом разложений (1.10) запишутся в виде

$$(1.13) \qquad \sum_{k=0}^{N} kA_k^{(j)}\left(\zeta_j^{(n)}\right)^{-k} - \sum_{k=1}^{N-1} k a_k^{(j)}\left(\zeta_j^{(n)}\right)^k = N a_N^{(j)}\left(\zeta_j^{(n)}\right)^N + D^{(j)} -$$

$$- \sum_{k=N+1}^{\infty} kA_k^{(j)}\left(\zeta_j^{(n)}\right)^{-k} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N-1), \quad (j = 1, 2),$$

причем

$$a_N^{(j)} = R_j m_j \bar c_N \bar R R^{-1} A^{(j)} \ (N > 1).$$

Здесь $\zeta_j^{(n)}$ —корни уравнений

$$(1.14) \qquad \zeta_j - \sum_{k=1}^{N} k c_k \zeta_j^{-k} - \frac{m_j \bar R}{R}\left(\zeta_j^{-1} - \sum_{k=1}^{N} k\bar c_k \zeta_j^k\right) = 0 \quad (j = 1,\ 2)$$

по модулю больше единицы $\left(|\zeta_j^{(n)}| > 1\right)$.

В преобразованной области граничные условия (1.4) примут вид

$$\int_\gamma F_*(\sigma)\,dV = -\int_\gamma F_*(\sigma)\,m(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma, \tag{1.15}$$

$$\int_\gamma \overline{F_*(\sigma)}dV = -\int_\gamma \overline{F_*(\sigma)}\,m(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma,$$

где $F_*(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ — произвольная функция, голоморфная вне γ.

Граничное значение функции V на γ, согласно формулам (1.2), (1.10), равно

$$V = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\left(q_j + i\frac{p_j}{\mu_j}\right)a_k^{(j)}\sigma^k + \left(\bar{q}_j + i\frac{\bar{p}_j}{\bar{\mu}_j}\right)\bar{a}_k^{(j)}\sigma^{-k}\right] + \tag{1.16}$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(q_j + i\frac{p_j}{\mu_j}\right)A_k^{(j)}\sigma^{-k} + \left(\bar{q}_j + i\frac{\bar{p}_j}{\bar{\mu}_j}\right)\bar{A}_k^{(j)}\sigma^k\right] + D^*\ln\sigma,$$

причем

$$D^* = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} m(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma = -\frac{M_x^* + iM_y^*}{2\pi i}.$$

Произвольную функцию $F_*(\zeta)$ представим в виде ряда

$$F_*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\zeta^{-n}. \tag{1.17}$$

Внесем выражения (1.16), (1.17) в граничные условия (1.15) и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура γ. Полагая при этом все E_j, кроме E_n, равными нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций (1.10) вида

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\left(q_j + i\frac{p_j}{\mu_j}\right)A_n^{(j)} + \left(\bar{q}_j + i\frac{\bar{p}_j}{\bar{\mu}_j}\right)\bar{a}_n^{(j)}\right] = f_n, \tag{1.18}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\left(\bar{q}_j + i\frac{\bar{p}_j}{\bar{\mu}_j}\right)\bar{A}_n^{(j)} + \left(q_j + i\frac{p_j}{\mu_j}\right)a_n^{(j)}\right] = g_n \quad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

причем $a_n^{(j)} = 0$ при $n > N$;

$$f_n = \frac{1}{2\pi i n}\int_{\gamma^+}\sigma^n m(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma, \quad g_n = -\frac{1}{2\pi i n}\int_{\gamma^+}\sigma^{-n} m(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma.$$

Из системы (1.18) при $n > N$ находим

$$A_n^{(1)} = \frac{q_2 - i\dfrac{p_2}{\mu_2}}{2i\left(q_2\dfrac{p_1}{\mu_1} - q_1\dfrac{p_2}{\mu_2}\right)}f_n - \frac{q_2 + i\dfrac{p_2}{\mu_2}}{2i\left(q_2\dfrac{p_1}{\mu_1} - q_1\dfrac{p_2}{\mu_2}\right)}\bar{g}_n,$$

$$A_n^{(2)} = \frac{q_1 + i\dfrac{p_1}{\mu_1}}{2i\left(q_2\dfrac{p_1}{\mu_1} - q_1\dfrac{p_2}{\mu_2}\right)}\bar{g}_n - \frac{q_1 - i\dfrac{p_1}{\mu_1}}{2i\left(q_2\dfrac{p_1}{\mu_1} - q_1\dfrac{p_2}{\mu_2}\right)}f_n \quad (n > N).$$

Присоединив к системе (1.18) ($n = 1, 2, \ldots, N$) равенства (1.13), получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений порядка $4N - 2$ (N — наибольшая отрицательная степень в разложении отображающей функции (1.5)) для определения остальных коэффициентов разложения функций (1.10).

В случае второй основной задачи, когда заданы значения прогиба W и нормальной производной $\partial W/\partial n$ точек контура L области S, а изгибающие и крутящие моменты в пластинке на бесконечности ограничены, система уравнений (1.18) заменяется следующей:

$$(1.19)\qquad \sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\mu_j)A_n^{(j)}+(1+i\bar{\mu}_j)\bar{a}_n^{(j)}\right]=f_n^*,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\bar{\mu}_j)\bar{A}_n^{(j)}+(1+i\mu_j)a_n^{(j)}\right]=g_n^*\qquad (n=1, 2,\ldots,\infty),$$

причем $a_n^{(j)}=0$ при $n>N$;

$$f_n^*=-\frac{2}{2\pi i n}\int_{\gamma+}\sigma^n d\left[\frac{\partial W}{\partial t}\right],\quad g_n^*=\frac{2}{2\pi i n}\int_{\gamma+}\sigma^{-n} d\left[\frac{\partial W}{\partial \bar{t}}\right].$$

Если главный момент внешних усилий, вызвавших заданный прогиб W и угол наклона изогнутой поверхности $\partial W/\partial n$ в точках контура L, равен нулю, то постоянные $D^{(j)} = 0$. Решив систему (1.19) при $n > N$, находим

$$A_n^{(1)}=\frac{1-i\mu_2}{2i(\mu_1-\mu_2)}f_n^*-\frac{1+i\mu_2}{2i(\mu_1-\mu_2)}\bar{g}_n^*,$$

$$A_n^{(2)}=\frac{1+i\mu_1}{2i(\mu_1-\mu_2)}\bar{g}_n^*-\frac{1-i\mu_1}{2i(\mu_1-\mu_2)}f_n^*\qquad (n>N).$$

Приписав к системе (1.19) ($n = 1, 2, \ldots, N$) равенства (1.13), получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений порядка $4N - 2$ для определения остальных коэффициентов разложения функций (1.10).

В случае, когда в отверстие пластинки L впаяно абсолютно жесткое ядро, $W = 2\,\mathrm{Re}\,(\varepsilon_0 t) + W_0 (t \in L)$, где ε_0 — комплексная величина, и, следовательно, $f_n^* = 0$, $g_n^* = 0$.

Все вышесказанное с очевидными незначительными изменениями приложимо к случаю конечной области S, отображаемой на круг $|\zeta| \leqslant 1$ функцией вида

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{k=2}^{N}c_k\zeta^k\right).$$

2. Рассмотрим изгиб ортотропной пластинки с треугольным отверстием. Оси координат x и y направим параллельно главным направлениям упругости. На бесконечности пластинка изгибается моментами $M_x^\infty = M_1$, $M_y^\infty = M_2$, $H_{xy}^\infty = 0$. Край отверстия пластинки L не нагружен ($m = 0$).

В данном случае $N = 2$, $c_1 = 0$, $c_2 = \bar{c}_2$, $D^{(j)} = 0$, $f_n = 0$, $g_n = 0$, $R = \bar{R}$, $\mu_2 = -\bar{\mu}_1$, $m_2 = \bar{m}_1$, $R_2 = \bar{R}_1$, $p_2 = \bar{p}_1$, $q_2 = \bar{q}_1$, $r_2 = -\bar{r}_1$, $A_n^{(2)} = \bar{A}_n^{(1)}$, $a_n^{(2)} = \bar{a}_n^{(1)}$. Система алгебраических уравнений (1.13), (1.18) будет шестого порядка следующего вида (коэффициенты $A_n^{(j)}$, $a_n^{(j)}$ — величины комплексные):

$$\mathrm{Re}\left[\left(q_1-i\frac{p_1}{\mu_1}\right)A_n^{(1)}+\left(q_1+i\frac{p_1}{\mu_1}\right)a_n^{(1)}\right]=0,$$

$$\operatorname{Re}\left[\left(q_1 + i\frac{p_1}{\mu_1}\right)A_n^{(1)} + \left(q_1 - i\frac{p_1}{\mu_1}\right)a_n^{(1)}\right] = 0,$$

$$2A_2^{(1)} + A_1^{(1)}\zeta_1^{(1)} - a_1^{(1)}\left(\zeta_1^{(1)}\right)^3 = 2a_2^{(1)}\left(\zeta_1^{(1)}\right)^4 \quad (n = 1,2),$$

где

$$a_2^{(1)} = \frac{R_1 m_1 c_2\left(\bar{q}_1 M_x^\infty - \bar{p}_1 M_y^\infty\right)}{2(\bar{p}_1 q_1 - p_1\bar{q}_1)}; \quad a_2^{(2)} = \bar{a}_2^{(1)}.$$

Здесь $\zeta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)} = \bar{\zeta}_1^{(1)}\right)$ — корень уравнения (1.14)

$$2c_2 m_1\zeta_1^4 + \zeta_1^3 - m_1\zeta_1 - 2c_2 = 0 \tag{2.1}$$

по модулю больше единицы $\left(\left|\zeta_1^{(1)}\right| > 1\right)$.

Функции напряжений, согласно (1.12), имеют вид

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{2a_2^{(j)}\zeta_j^4 + a_1^{(j)}\zeta_j^3 - A_1^{(j)}\zeta_j - 2A_2^{(j)}}{R_j\left[\left(\zeta_j^3 - 2c_2\right) + m_j\left(2c_2\zeta_j^4 - \zeta_j\right)\right]} \quad (j = 1,2).$$

В табл. 1 приведены численные значения изгибающих моментов M_θ (в долях M) в некоторых точках контура треугольного отверстия ($c_2 = 0{,}25$) фанерной пластинки, имеющей следующие значения комплексных параметров $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = -\bar{\mu}_1$ [1]:

$$\alpha = 1{,}04,\ \beta = 1{,}55,\ \nu_1 = 0{,}31,\ \nu_2 = 0{,}026, \text{ если} \tag{2.2}$$

$$E_x = E_{\max}, \text{ и } \alpha = 0{,}299,\ \beta = 0{,}444,\ \nu_1 = 0{,}026,\ \nu_2 = 0{,}31,$$

$$\text{если } E_x = E_{\min}.$$

Корни $\zeta_1^{(1)}$ уравнения (2.1) по модулю больше единицы $\left(\left|\zeta_1^{(1)}\right| > 1\right)$ соответственно равны ($c_2 = 0{,}25$):

$$\zeta_1^{(1)} = 3{,}603 + i2{,}938,\quad \zeta_2^{(1)} = \bar{\zeta}_1^{(1)}, \text{ если } E_x = E_{\max}, \text{ и } \zeta_1^{(1)} = -3{,}570 +$$

$$+ i3{,}068,\quad \zeta_2^{(1)} = \bar{\zeta}_1^{(1)}, \text{ если } E_x = E_{\min}.$$

3. Рассмотрим изгиб ортотропной пластинки с квадратным отверстием. За направление осей x и y примем главные направления упругости. На бесконечности пластинка изгибается моментами $M_x^\infty = M$, $M_y^\infty = M$, $H_{xy}^\infty = 0$. Край отверстия пластинки L не нагружен ($m = 0$).

В рассматриваемом случае $N = 3$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = \bar{c}_3$, $R = \bar{R}$, $D^{(j)} = 0$, $f_n = 0$, $g_n = 0$, $\mu_2 = -\bar{\mu}_1$, $m_2 = \bar{m}_1$, $R_2 = \bar{R}_1$, $p_2 = \bar{p}_1$, $q_2 = \bar{q}_1$, $r_2 = -\bar{r}_1$, $A_n^{(2)} = \bar{A}_n^{(1)}$, $a_n^{(2)} = \bar{a}_n^{(1)}$, причем с четными индексами n равны нулю. При положительном c_3 вершины квадрата лежат на осях x и y, а при отрицательном c_3 стороны квадрата параллельны осям координат.

Система алгебраических уравнений (1.13), (1.18) с учетом симметрии задачи будет шестого порядка следующего вида:

$$\operatorname{Re}\left[\left(q_1 - i\frac{p_1}{\mu_1}\right)A_n^{(1)} + \left(q_1 + i\frac{p_1}{\mu_1}\right)a_n^{(1)}\right] = 0,$$

$$\operatorname{Re}\left[\left(q_1 + i\frac{p_1}{\mu_1}\right)A_n^{(1)} + \left(q_1 - i\frac{p_1}{\mu_1}\right)a_n^{(1)}\right] = 0,$$

$$3A_3^{(1)} + A_1^{(1)}\left(\zeta_1^{(k)}\right)^2 - a_1^{(1)}\left(\zeta_1^{(k)}\right)^4 = 3a_3^{(1)}\left(\zeta_1^{(k)}\right)^6$$

$$(n = 1, 3),\ (k = 1, 2),$$

где

$$a_3^{(1)} = \frac{R_1 m_1 c_3\left(\bar{q}_1 M_x^\infty - \bar{p}_1 M_y^\infty\right)}{2(\bar{p}_1 q_1 - p_1\bar{q}_1)}; \quad a_3^{(2)} = \bar{a}_3^{(1)}.$$

Т а б л и ц а 1

θ, рад	$M_x^\infty = M,\ M_y^\infty = 0$		$M_x^\infty = 0,\ M_y^\infty = M$		θ, рад	$M_x^\infty = M,\ M_y^\infty = 0$		$M_x^\infty = 0,\ M_y^\infty = M$	
	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$		$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$
0	0,231	1,327	2,720	6,715	19π/36	1,981	1,384	1,372	0,085
π/36	0,216	0,385	2,410	4,913	21π/36	3,923	1,839	2,824	0,098
π/18	0,189	0,061	1,661	1,967	22π/36	5,142	2,120	2,999	0,124
π/9	0,210	0,514	0,311	0,531	23π/36	5,536	2,279	1,016	0,176
π/6	0,313	0,695	—0,049	0,309	2π/3	2,862	1,882	—0,269	0,320
2π/9	0,420	0,775	0,031	0,236	13π/18	0,416	—1,447	1,433	1,785
5π/18	0,518	0,827	0,184	0,195	27π/36	0,289	—0,876	1,475	2,336
π/3	0,623	0,876	0,326	0,165	28π/36	0,239	0,316	1,429	2,329
7π/18	0,764	0,941	0,462	0,138	31π/36	0,199	1,664	1,279	1,868
4π/9	1,002	1,047	0,638	0,112	17π/18	0,194	1,805	1,211	1,635
π/2	1,499	1,235	0,999	0,091	π	0,194	1,811	1,199	1,595

Т а б л и ц а 2

$M_x^\infty = M,\quad M_y^\infty = 0,\quad H_{xy}^\infty = 0$									
θ, рад	$c_3 = -\frac{1}{9}$		$c_3 = \frac{1}{9}$		θ, рад	$c_3 = -\frac{1}{9}$		$c_3 = \frac{1}{9}$	
	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$		$E_x = E_{\max}$	$E_x = F_{\min}$	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$
0	0,133	1,482	0,260	3,218	11π/36	2,192	1,596	0,466	0,596
π/36	0,132	1,477	0,251	2,347	π/3	2,341	1,593	0,551	0,643
π/18	0,132	1,455	0,231	1,056	13π/36	2,178	1,531	0,690	0,739
π/9	0,131	1,224	0,225	0,527	7π/18	1,986	1,466	0,955	0,914
π/6	0,146	0,004	0,269	0,544	4π/9	1,726	1,377	2,865	1,553
2π/9	0,270	—0,933	0,330	0,561	17π/36	1,664	1,356	5,001	1,882
5π/18	1,366	1,372	0,409	0,575	π/2	1,644	1,349	5,944	2,019

Здесь $\zeta_1^{(k)}\left(\zeta_2^{(k)}=\bar{\zeta}_1^{(k)}\right)$ — корни уравнения (1.14)

$$3c_3m_1\zeta_1^6+\zeta_1^4-m_1\zeta_1^2-3c_3=0 \tag{3.1}$$

по модулю больше единицы $\left(|\zeta_1^{(k)}|>1\right)$.

Функции напряжений, согласно (1.12), имеют вид

$$\varphi_j'(z_j)=\frac{3a_3^{(j)}\zeta_j^6+a_1^{(j)}\zeta_j^4-A_1^{(j)}\zeta_j^2-3A_3^{(j)}}{R_j\left[\left(\zeta_j^4-3c_3\right)-m_j\left(\zeta_j^2-3c_3\zeta_j^6\right)\right]}\quad (j=1,2).$$

В табл. 2 помещены численные значения изгибающих моментов M_θ (в долях M) в некоторых точках контура квадратного отверстия ($c_3=\pm 1/9$) фанерной пластинки с комплексными параметрами (2.2). Корни уравнения (3.1) по модулю больше единицы $\left(|\zeta_1^{(k)}|>1\right)$ соответственно равны:

$$\left(\zeta_1^{(k)}\right)^2=-5{,}103-i4{,}767,\quad \zeta_2^{(k)}=\bar{\zeta}_1^{(k)},\ \text{если } E_x=E_{\max},\ c_3=-\frac{1}{9},$$

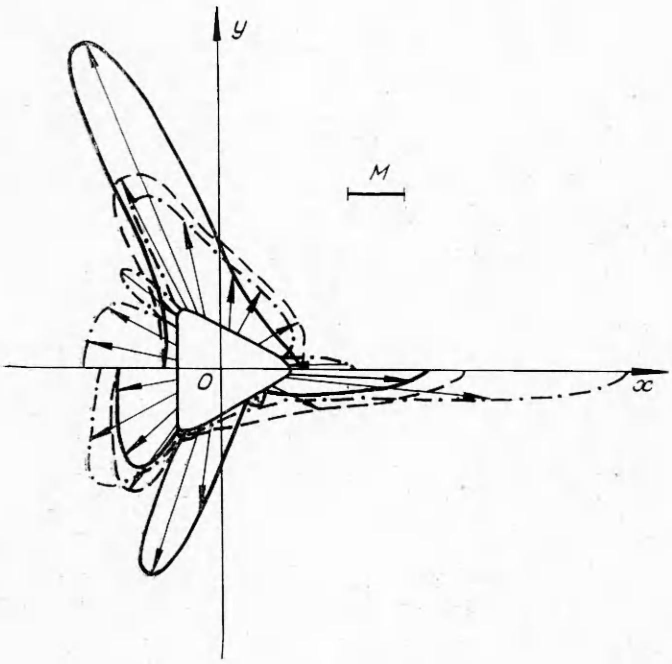
$$\left(\zeta_1^{(k)}\right)^2=5{,}683+i4{,}280,\quad \zeta_2^{(k)}=\bar{\zeta}_1^{(k)},\ \text{если } E_x=E_{\max},\ c_3=\frac{1}{9},$$

$$\left(\zeta_1^{(k)}\right)^2=5{,}103-i4{,}767,\quad \zeta_2^{(k)}=\bar{\zeta}_1^{(k)},\ \text{если } E_x=E_{\min},\ c_3=-\frac{1}{9},$$

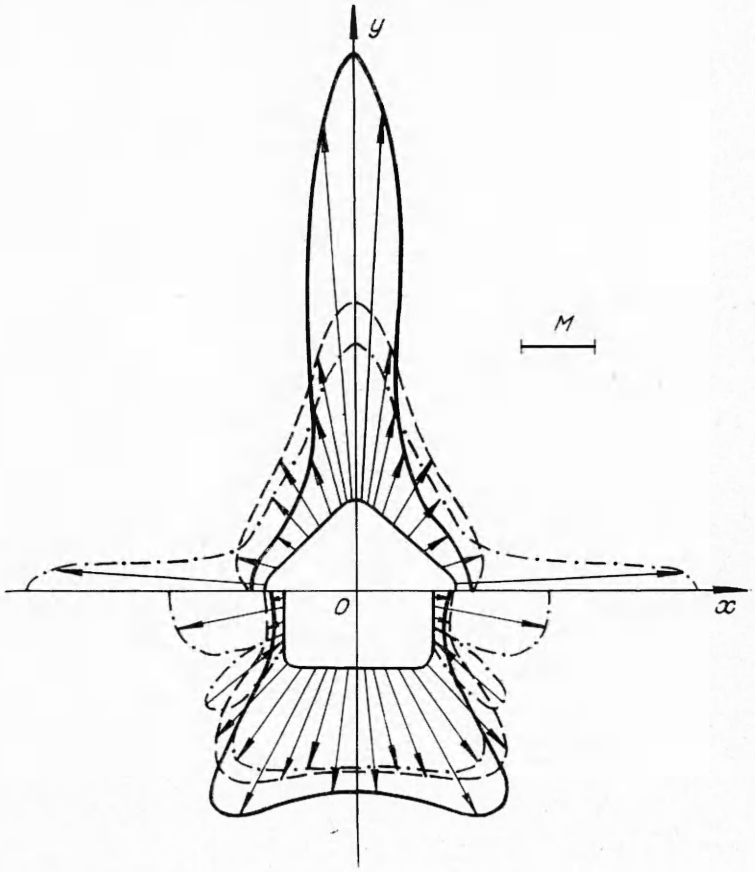
$$\left(\zeta_1^{(k)}\right)^2=-5{,}683+i4{,}280,\quad \zeta_2^{(k)}=\bar{\zeta}_1^{(k)},\ \text{если } E_x=E_{\min},\ c_3=\frac{1}{9},$$

$$(k=1,2).$$

На фиг. 1, 2 изображено распределение моментов M_θ по краю соответствующих отверстий в фанерной пластинке, у которой загружены стороны, параллельные оси $Oy\left(M_x^\infty=M,\ M_y^\infty=0\right)$. Графики, помещенные в нижней части фиг. 1 ($\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$), отвечают случаю, когда



Фиг. 1



Фиг. 2

загружены стороны пластинки, параллельные оси $Ox\left(M_y^\infty = M,\ M_x^\infty = 0\right)$. Сплошные линии соответствуют случаю $E_x = E_{\max}$, штрихпунктирные — случаю $E_x = E_{\min}$, а штриховые — изотропной пластинке с коэффициентом Пуассона, равным 0,3.

Плоская задача теории упругости для анизотропной пластинки с отверстием вида (1.5) решается аналогично.

Поступила 6 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М., ГИТТЛ, 1957.
2. **Савин Г. Н.** Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
3. **Лехницкий С. Г.** Приближенный метод определения напряжений в упругой анизотропной пластинке вблизи отверстия, мало отличающегося от кругового.— «Инж. журн.», 1953, т. 17.
4. **Ермолаев Б. И.** Приближенный метод определения напряжений при изгибе анизотропной пластинки с отверстием.— «Изв. высш. учеб. заведений. Строительство и архитектура», 1960, № 1.
5. **Ермолаев Б. И.** Приближенное решение задачи о чистом изгибе ортотропной плиты с овальным и квадратным отверстиями.— «Труды Саратов. политехн. ин-та», 1959, т. 2.

6. **Космодамианский А. С.** Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластинке с криволинейным отверстием.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Вып. 2. Саратов, изд. Саратов. ун-та, 1965.
7. **Меглинский В. В.** Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Вып. 3. Саратов, изд. Саратов. ун-та, 1967.
8. **Мартынович Т. Л., Божидарник В. В., Максимович Ю. М.** Влияние эксцентриситета подкрепления края отверстия на напряженное состояние в анизотропной пластинке.— «Механика полимеров», 1974, № 2.
9. **Привалов И. И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. М., ГИТТЛ, 1954.

УДК 535.854 : 531 787

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ВЛИЯНИЕ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ЭФФЕКТОВ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

А. А. Шарц

(*Москва*)

Сейчас можно считать установленным, что отклонения в поведении жидкостей от предсказываемого классической теорией в первую очередь проявляются в эффектах нормальных напряжений [1]. Для жидкостей со структурной вязкостью, изменяющейся с изменением градиента скорости, эти эффекты (эффекты Вайсенберга [2]) наблюдаются при сравнительно малых градиентах скорости, по ним существует обширный экспериментальный материал [3].

Напротив, для жидкостей, не показывающих изменения вязкости даже при высоких градиентах скорости как в классических [4], так и в более поздних экспериментах, данные по изучению нормальных напряжений при высоких градиентах скорости в литературе отсутствуют. Отсутствие таких экспериментов становится понятным, если принять во внимание, что, в то время как измерение вязкости не предъявляет высоких требований к настройке аппаратуры, изучение нормальных напряжений требует предельно аккуратных поверхностей и тщательной юстировки для понижения динамических погрешностей, что трудно достигается при тех высоких градиентах скорости, когда можно ожидать появления эффектов второго порядка у жидкостей с ньютоновой вязкостью. Влияние непараллельности в установке дисков при торзионном течении изучалось в [5].

Для достижения высоких градиентов скорости в торзионном течении приходится использовать малые зазоры (порядка десяти микрон), что не позволяет применять традиционные методы измерения нормальных напряжений, поскольку и манометрические отверстия и пьезодатчики искажают микрогеометрию зазора.

В работе [6] предложен бесконтактный метод исследования нормальных напряжений в торзионном течении, использующий интерференцию большой разности хода и свойство эпоксидных смол изменять показатель преломления при изменении нагрузки.

Поскольку в массе жидкости, подвергаемой сдвиговому напряжению, генерируется тепло, а интерференционные методы весьма чувствительны к