

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ СО ШТИФТОМ

УДК 539.3.01

В. Н. Солодовников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Решается задача о растяжении упругой прямоугольной пластины с круговым отверстием с малым зазором, в которое без трения вставлен абсолютно жесткий неподвижный штифт кругового поперечного сечения. Применяется метод конечных элементов, используются два варианта краевых условий на контуре отверстия Γ .

В одном из вариантов краевые условия ставятся для проекций векторов смещений и усилий на нормаль и касательную к Γ , причем в отличие от [1] исключается возможность нарушения условия непроникания края отверстия через контур штифта. Другой вариант краевых условий получается путем линеаризации условия непроникания. Это условие в [2] сформулировано через декартовы компоненты смещений, и геометрический смысл его не раскрывается. Не приведен вид принимаемых краевых условий для усилий. В [3] аналогичная задача решалась в случае отсутствия зазора.

В развиваемом ниже алгоритме, так же как и в [2–4], предполагается, что область контакта занимает на Γ один отрезок длины l . Она может зависеть от нагрузки, зазора, от принимаемого варианта краевых условий. Нагружение пластины осуществляется смещением ее правой стороны v . Значение v , реализующее l , определяется в соответствии с принципом Буссинеска [2–6] из условия равенства нулю нормального усилия в крайней точке области контакта. Решение контактной задачи ищется при этом (иначе, чем в [2–4]) в виде суммы решений двух других не зависящих от v задач с коэффициентами, линейными по v .

Проведен анализ конечно-элементных решений. В первом варианте решение линейно-пропорционально зазору s , во втором варианте при каждом новом значении s задачу надо решать заново. Выясняется вид решений при неограниченном возрастании v . Определяется максимально возможная длина области контакта $l = l_*$.

Разность между решениями, вычисленными при одном и том же смещении v , но с разными вариантами краевых условий, мала. Все же второй вариант уточняет решение в том отношении, что ведет к меньшим: энергии деформации пластины, максимальным напряжениям и длине области контакта. Для получения одного и того же смещения v требуется приложить меньшую полную тянущую силу P . Во втором варианте с ростом s максимальная длина $l = l_*$ уменьшается почти линейно по s . В первом варианте она постоянная, причем имеет то же значение, как и в случае отсутствия зазора.

1. Основные уравнения. Выражения деформаций через смещения, соотношения закона Гука и уравнения равновесия в плоском напряженном состоянии в декартовой системе координат x_1, x_2 принимаются в виде [7]

$$\begin{aligned} e_{11} = u_{1,1}, \quad e_{22} = u_{2,2}, \quad 2e_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}, \quad e_{11} = E^{-1}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \\ e_{22} = E^{-1}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \quad e_{12} = (1 + \nu)E^{-1}\sigma_{12}, \quad \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; u_i — смещения; e_{ij} — деформации; σ_{ij} — напряжения ($i, j = 1, 2$); индексы 1 и 2 после запятой означают частное дифференцирование по x_1 и x_2 соответственно.

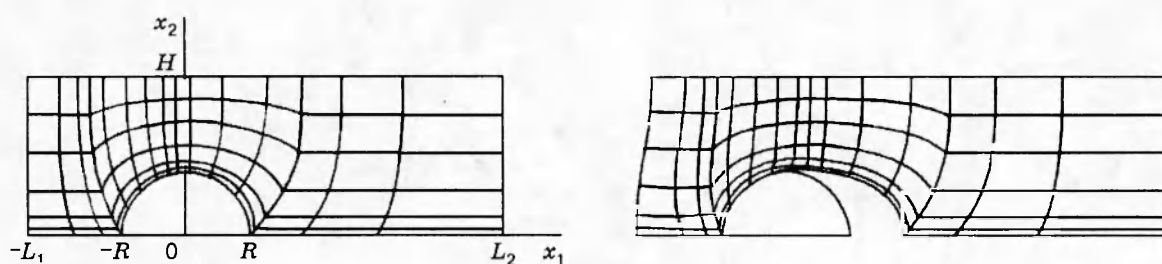


Рис. 1

Энергия деформации определяется по формуле

$$\Phi = \int_{\Omega} \frac{E}{2(1-\nu^2)} [e_{11}^2 + 2\nu e_{11}e_{22} + e_{22}^2 + 2(1-\nu)e_{12}^2] dx_1 dx_2. \quad (1.2)$$

Толщина пластины считается постоянной и без нарушения общности единичной. Выполняется интегрирование по области Ω , занятой пластиной.

2. Краевые условия. Дана прямоугольная пластина с нецентральной круговой отверстием радиуса R . Ее половина изображена на рис. 1 слева. Левая сторона $x_1 = -L_1$ не нагружена, правая сторона $x_1 = L_2$ смещается, не деформируясь, в направлении оси x_1 на величину $u_1 = v$. Задавая еще условия симметрии решения при $x_2 = 0$ и $x_2 = \pm H$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 & \quad \text{при } x_1 = -L_1, \quad 0 \leq x_2 \leq H, \\ u_1 = v, u_2 = 0 & \quad \text{при } x_1 = L_2, \quad 0 \leq x_2 \leq H, \\ u_2 = 0, \sigma_{12} = 0 & \quad \text{при } x_2 = H, \quad -L_1 \leq x_1 \leq L_2 \quad \text{и} \\ & \quad \text{при } x_2 = 0, \quad -L_1 \leq x_1 \leq -R, \quad R \leq x_1 \leq L_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В отверстие с малым зазором ($c = \varepsilon R$, ε — малый безразмерный параметр, $\varepsilon > 0$) без трения вставлен абсолютно жесткий и неподвижный штифт кругового поперечного сечения с радиусом $R_1 = R - c$ и центром в точке с декартовыми координатами $(-c, 0)$. Используем также полярную систему координат r, φ , в которой $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. В любой точке на контуре отверстия Γ выполняются соотношения

$$\cos \theta = \rho^{-1}(\varepsilon + \cos \varphi), \quad \sin \theta = \rho^{-1} \sin \varphi, \quad \rho = (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi)^{1/2}, \quad (2.2)$$

где θ — угол между нормалью к контуру штифта в точке, ближайшей к рассматриваемой точке на Γ , и осью x_1 . Проекции векторов смещений и усилий на нормаль и касательную к контуру штифта $u_\rho, u_\theta, q_\rho, q_\theta$ выражаются через компоненты смещений u_r, u_φ и напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$ в полярной системе координат по формулам

$$\begin{aligned} u_\rho &= u_r \cos \alpha - u_\varphi \sin \alpha, \quad u_\theta = u_r \sin \alpha + u_\varphi \cos \alpha, \\ q_\rho &= \sigma_{rr} \cos \alpha - \sigma_{r\varphi} \sin \alpha, \quad q_\theta = \sigma_{rr} \sin \alpha + \sigma_{r\varphi} \cos \alpha, \quad \alpha = \varphi - \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условие непроникания края отверстия через контур штифта представляется в виде

$$\begin{aligned} (R \cos \varphi + c + u_1)^2 + (R \sin \varphi + u_2)^2 &= (\rho R + u_\rho)^2 + u_\theta^2 = \\ &= (R + c \cos \varphi + u_r)^2 + (u_\varphi - c \sin \varphi)^2 \geq R_1^2 = (1 - \varepsilon)^2 R^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

или

$$u_\rho + (2\rho R)^{-1}(u_r^2 + u_\theta^2) \geq u_{\rho c}, \quad u_{\rho c} = -c\rho^{-1}(1 + \cos \varphi). \quad (2.5)$$

Линеаризуя левую часть последнего неравенства, получим

$$u_\rho \geq u_{\rho c}. \quad (2.6)$$

Значение $u_{\rho c}$ меньше расстояния от рассматриваемой точки на Γ до контура штифта на малую величину порядка c^2 . Неравенство (2.6) более сильное, чем (2.5), в том смысле, что смещения, удовлетворяющие (2.6), будут удовлетворять также (2.5).

Работа усилий на любых допустимых вариациях смещений δu_τ , δu_φ или δu_ρ , δu_θ на Γ ввиду отсутствия трения должна быть равна нулю:

$$\sigma_{rr}\delta u_\tau + \sigma_{r\varphi}\delta u_\varphi = q_\rho\delta u_\rho + q_\theta\delta u_\theta = 0. \quad (2.7)$$

В области контакта Γ_1 смещение $u_\rho = u_{\rho c}$. Край отверстия прижимается к штифту, поэтому $q_\rho < 0$. При $\delta u_\rho = 0$ и произвольных δu_θ из (2.7) следует $q_\theta = 0$. На остальной свободной части края отверстия Γ_2 имеем $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$ или, что эквивалентно, $q_\rho = q_\theta = 0$. Приходим к следующим краевым условиям на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$u_\rho = u_{\rho c}, \quad q_\theta = 0, \quad q_\rho < 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad q_\rho = q_\theta = 0, \quad u_\rho \geq u_{\rho c} \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (2.8)$$

Области Γ_1 , Γ_2 определяются из решения задачи.

Если в (2.8) подставить выражения для u_ρ , $u_{\rho c}$, q_ρ , q_θ из (2.3), (2.5), то с учетом (2.2) радикал ρ из (2.8) исключается, в выражениях коэффициентов при u_τ , u_φ , σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$ будет содержаться ε . Поэтому решение, полученное с использованием (2.8), может нелинейно зависеть от ε .

Сформулируем теперь другой вариант краевых условий на Γ с заданием проекций смещений и усилий на нормаль и касательную к Γ . Условие непроникания (2.4) не будет нарушаться при любом значении окружного смещения u_φ , если

$$u_\tau \geq u_{\tau c}, \quad u_{\tau c} = -c(1 + \cos \varphi). \quad (2.9)$$

Значение $u_{\tau c}$ меньше расстояния вдоль радиуса отверстия от рассматриваемой точки на Γ до контура штифта на малую величину порядка c^2 . Неравенство (2.9) более сильное, чем (2.4).

В области контакта Γ_1 , которая здесь может быть иной, чем в (2.8), $u_\tau = u_{\tau c}$, $\sigma_{rr} < 0$. При $\delta u_\tau = 0$ и произвольных δu_φ из (2.7) следует $\sigma_{r\varphi} = 0$. На свободной части края отверстия Γ_2 имеем $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$. Получаем краевые условия

$$u_\tau = u_{\tau c}, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rr} < 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0, \quad u_\tau \geq u_{\tau c} \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (2.10)$$

Области Γ_1 , Γ_2 определяются из решения задачи, при этом величины v , c входят в правые части (2.1) и (2.10) линейным образом.

Итак, имеем две контактные задачи: (1.1), (2.1), (2.8) и (1.1), (2.1), (2.10). у каждой из них есть единственное решение. Энергия деформации Φ как функционал от смещений, удовлетворяющих краевым условиям для смещений в (2.1) и неравенству $u_\tau \geq u_{\tau c}$ или в случае использования (2.8) $u_\rho \geq u_{\rho c}$ на Γ , достигает минимума на решении задач соответственно (1.1), (2.1), (2.10) и (1.1), (2.1), (2.8).

В случае отсутствия зазора ($c = 0$) как из (2.8), так и из (2.10) вытекают краевые условия [3]

$$u_\tau = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rr} < 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0, \quad u_\tau \geq 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad (2.11)$$

где Γ_1 , Γ_2 не зависят от смещения v .

3. Определение области контакта. Предполагается, что в каждой из рассматриваемых задач область контакта Γ_1 занимает некоторый отрезок $0 \leq \eta \leq l$ ($\eta = 1 - \varphi/\pi$). Его безразмерная длина l может зависеть от зазора c , смещения v , от принимаемого варианта краевых условий (2.8), (2.10) или (2.11).

В развиваемом ниже алгоритме значение l задается. На Γ ставятся краевые условия, получаемые из (2.8) или (2.10) путем отбрасывания из них ограничений в виде неравенств.

$$u_r = u_{rc}, \quad \sigma_{r\varphi} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq l, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0 \quad \text{при} \quad l < \eta \leq 1 \quad (3.1)$$

или

$$u_\rho = u_{\rho c}, \quad q_\theta = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq l, \quad q_\rho = q_\theta = 0 \quad \text{при} \quad l < \eta \leq 1. \quad (3.2)$$

Из решения задач (1.1), (2.1), (3.1) и (1.1), (2.1), (3.2) (называемых в дальнейшем задачами (a) и (b) соответственно) определяются состояния равновесия пластины с заданной областью контакта.

Определим еще задачи (a1), (a2) и (b1), (b2), отличающиеся соответственно от (a) и (b) только тем, что в краевых условиях на участке контакта $0 \leq \eta \leq l$ задаются $u_r = 0$ в (a1), $u_r = c^{-1}u_{rc}$ в (a2), $u_\rho = 0$ в (b1), $u_\rho = c^{-1}u_{\rho c}$ в (b2), на правой стороне пластины $x_1 = L_2$, $0 \leq x_2 \leq H$ полагаем $u_1 = 1$ в (a1) и (b1), $u_1 = 0$ в (a2) и (b2).

4. Применение метода конечных элементов. Пластина разбивается на лагранжевы конечные элементы (четырёхугольные, девятиузловые, изопараметрические) [8], например, так, как изображено на рис. 1 справа. Элементы измельчаются при приближении к краю отверстия и к крайней точке области контакта $\eta = l$, которая берется в качестве граничного узла между элементами. В каждом разбиении было 90 конечных элементов и около 730 искоемых переменных — компонент смещений узлов элементов.

На основе принципа минимума энергии деформации (1.2) сформулируем конечно-элементные уравнения задач (a) и (b). Подставив в эти уравнения соответствующие значения смещений в узлах элементов на контуре пластины, получим конечно-элементные уравнения задач (a1), (a2), (b1) и (b2). Для вычисления интегралов по площади элемента используется трехточечная квадратурная формула Гаусса. Каждая система конечно-элементных уравнений решается методом компактного исключения Гаусса с учетом симметричности и ленточности матрицы коэффициентов — глобальной матрицы жесткости [8, 9]. Напряжения вычисляются в точках интегрирования по площади элемента и интерполируются на узлы элемента. Малые разрывы напряжений на границах между элементами на приведенных ниже рисунках сглаживаются.

В дальнейшем излагается конечно-элементное решение представленных выше задач.

5. Решение контактных задач. Опишем сначала решение контактных задач с краевыми условиями (2.10). Задача (a) имеет решение, линейное по v , с:

$$U^{(a)} = vU^{(a1)} + cU^{(a2)}. \quad (5.1)$$

Здесь и ниже U — глобальные векторы искоемых переменных — компонент смещений узлов элементов; верхний индекс в круглых скобках указывает задачу, из которой берется пометаемая величина.

Векторы $\vec{U}^{(a1)}$, $\vec{U}^{(a2)}$ не зависят от v , c и находятся из решения систем конечно-элементных уравнений задач (a1) и (a2), имеющих одну и ту же матрицу коэффициентов — глобальную матрицу жесткости. Она вычисляется и приводится к треугольному виду только один раз совместно для обеих этих систем.

В точке $\eta = l$ для σ_{rrl} — предельных значений радиальных напряжений σ_{rr} на Γ со стороны $\eta < l$ — из (5.1) вытекает соотношение $\sigma_{rrl}^{(a)} = v\sigma_{rrl}^{(a1)} + c\sigma_{rrl}^{(a2)}$. В соответствии с принципом Буссинеска [5, 6], полагая $\sigma_{rrl}^{(a)} = 0$, определим смещение $v = v^{(a)}$, реализующее заданную область контакта:

$$v^{(a)} = -c\sigma_{rrl}^{(a2)} / \sigma_{rrl}^{(a1)}. \quad (5.2)$$

На основе результатов вычислений предполагаем, что $\sigma_{rrl}^{(a2)} > 0$. Решая задачи (a1) при разных l , найдем для l итерациями, аналогичными выполняемым в [3], такое значение $l =$

$l_*^{(a)}$, при котором $\sigma_{rrl}^{(a1)} = 0$. Если $l < l_*^{(a)}$, то $\sigma_{rrl}^{(a1)} < 0$, а если $l > l_*^{(a)}$, то $\sigma_{rrl}^{(a1)} > 0$. Вследствие (5.2) и сказанного выше $v^{(a)} < 0$, когда $l > l_*^{(a)}$. Поэтому длина области контакта l не может быть больше $l_*^{(a)}$ и приближается к $l_*^{(a)}$ при неограниченном возрастании $v = v^{(a)}$. Максимальная длина $l_*^{(a)}$ остается одной и той же при любом значении c .

При $c = 0$, $l = l_*^{(a)}$ и произвольном v (5.1) дает решение контактной задачи (1.1), (2.1), (2.11) в виде $\tilde{U}^{(a)} = vU^{(a1)}$. Длина области контакта в этой задаче $l_*^{(a)}$ не зависит от v .

Подставив $v = v^{(a)}$ при ненулевых значениях c из (5.2) в (5.1), получим $U^{(a)}$ как решение контактной задачи (1.1), (2.1), (2.10). Оно линейно-пропорционально c . Ограничения в виде неравенств в (2.10) выполняются. Вектор $\tilde{U}^{(a)}$, когда $v = v^{(a)} \rightarrow \infty$, $l \rightarrow l_*^{(a)}$, приближается к линейной функции от v вида $vU^{(a1)}$ и практически совпадает с $U^{(0)}$ при достаточно больших значениях v .

Перейдем к случаю использования краевых условий (2.8). Решение задачи (b) ищем в виде

$$U^{(b)} = vU^{(b1)} + cU^{(b2)}, \quad (5.3)$$

где векторы $U^{(b1)}$, $U^{(b2)}$ зависят от ε , но не зависят от v . Они вычисляются путем решения систем конечно-элементных уравнений задач (b1) и (b2), имеющих одну и ту же матрицу коэффициентов — глобальную матрицу жесткости, зависящую от ε . При каждом новом значении ε задачи (b1), (b2) и контактная задача в целом, в отличие от случая использования краевых условий (2.10), решаются заново.

В точке $\eta = l$ для $q_{\rho l}$ — предельных значений нормальных усилий q_{ρ} на Γ со стороны $\eta < l$ — из (5.3) вытекает соотношение $q_{\rho l}^{(b)} = vq_{\rho l}^{(b1)} + cq_{\rho l}^{(b2)}$. На основе принципа Буссинеска, удовлетворяя равенству $q_{\rho l}^{(b)} = 0$, определим смещение $v = v^{(b)}$, реализующее заданную область контакта:

$$v^{(b)} = -cq_{\rho l}^{(b2)} / q_{\rho l}^{(b1)}. \quad (5.4)$$

Далее, по аналогии с предыдущим решением (5.1), (5.2) на основе результатов вычислений предполагаем, что $q_{\rho l}^{(b2)} > 0$. Решая задачи (b1) при разных l , найдем для l итерациями такое значение $l = l_*^{(b)}$, при котором $q_{\rho l}^{(b1)} = 0$. Если $l < l_*^{(b)}$, то $q_{\rho l}^{(b1)} < 0$, а если $l > l_*^{(b)}$, то $q_{\rho l}^{(b1)} > 0$. Для неотрицательности $v^{(b)}$ должно быть $l < l_*^{(b)}$. Имеем $l \rightarrow l_*^{(b)}$ при неограниченном возрастании $v = v^{(b)}$. Максимальная длина $l_*^{(b)}$ зависит от ε .

Подставив $v = v^{(b)}$ из (5.4) в (5.3), получим $\tilde{U}^{(b)}$, являющееся решением контактной задачи (1.1), (2.1), (2.8). Ограничения в виде неравенств в (2.8) выполняются. Вектор $U^{(b)}$, когда $v = v^{(b)} \rightarrow \infty$, $l \rightarrow l_*^{(b)}$, приближается к линейной функции от v вида $vU^{(b1)}$, зависящей от ε .

С уменьшением ε при одном и том же фиксированном значении l задачи (b1), (b2) сближаются с (a1), (a2), разности между $U^{(b1)}$, $U^{(b2)}$, $v^{(b)}$, $U^{(b)}$ и соответственно $U^{(a1)}$, $U^{(a2)}$, $v^{(a)}$, $U^{(a)}$ стремятся к нулю. Кроме того, $l_*^{(b)} \rightarrow l_*^{(a)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

6. Анализ результатов счета. Перейдем к безразмерным величинам, для этого R , L_1 , L_2 , H , x_1 , x_2 умножим на обезразмеривающий множитель R^{-1} , смещения и зазор c — на L_0^{-1} , деформации — на $\omega = R L_0^{-1}$, напряжения — на ωE^{-1} , энергию деформации Φ — на $E^{-1} L_0^{-2}$ (L_0 — постоянная, имеющая размерность длины). Для обезразмеренных величин сохраним прежние обозначения, теперь $R = 1$, $H = L_1 = 2,5$, $L_2 = 5$, $c = \omega\varepsilon$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Рассмотрим решение $U^{(a1)}$ контактной задачи в случае отсутствия зазора (1.1), (2.1),

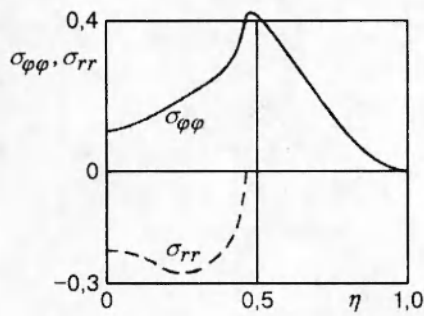


Рис. 2

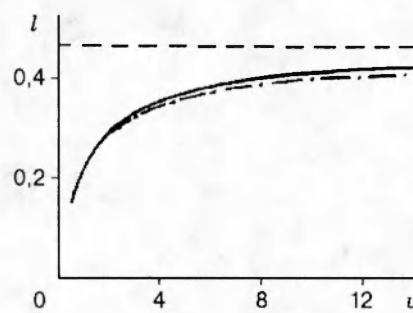


Рис. 3

(2.11) при $v = 1$, $l = i_{\pm}^{(a)} = 0,462769$ (что соответствует углу πl , равному $83,3^\circ$). Разбиение пластины на конечные элементы и ее деформированное состояние показаны на рис. 1. Декартовы координаты узлов X_i в деформированном состоянии, изображенном на рис. 1 справа, определяются по их исходным значениям x_i и смещениям u_i по формулам $X_i = x_i + \gamma u_i$ ($i = 1, 2$) (здесь и далее индекс задачи в обозначениях получаемых из ее решения величин для краткости опускается). Множитель $\gamma > 0$ один и тот же для всех u_i и такой, что максимальная абсолютная величина компонент вектора $\gamma U^{(a1)}$ равна 1. Переход к безразмерным величинам смещений и умножение их на γ ведут к преувеличенным деформациям пластины. Отметим еще, что вследствие линеаризации задачи отрезок края отверстия, представленный как область контакта пластины со штифтом, не лежит строго на контуре штифта.

На рис. 2 даны графики напряжений на контуре отверстия как функций от η . Окружное напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ растягивающее, распределение радиального напряжения σ_{rr} не синусоидальное, причем $\sigma_{rr} = 0$ при $l \leq \eta \leq 1$. Минимум $\sigma_{rr} = -0,2686$ достигается во внутренней точке области контакта, максимум $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi}^* = 0,4189$ — на свободной части Γ вблизи точки $\eta = l$. Коэффициент концентрации напряжений $k = HP^{-1}\sigma_{\varphi\varphi}^* = 4,514$. Тянувшая сила

$$P = \int_0^H \sigma_{11} dx_2 \quad \text{при} \quad x_1 = L_2,$$

вычисляемая по квадратурной формуле парабол [10], равна 0,232.

Решение $\tilde{U}^{(a)}$ контактной задачи (1.1), (2.1), (2.10) получено при $l = 0,15; 0,2; 0,25;$

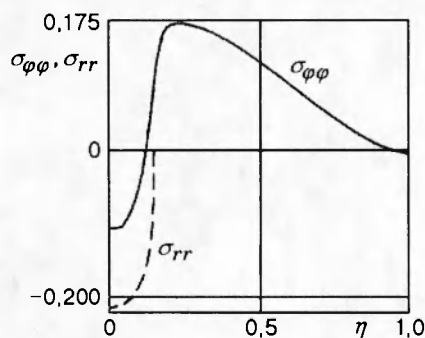


Рис. 4

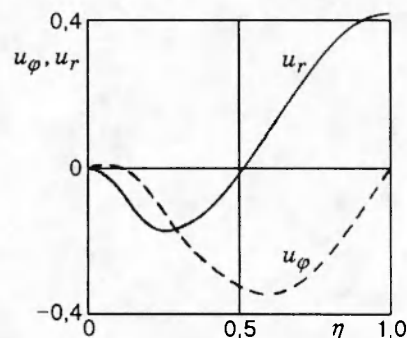


Рис. 5

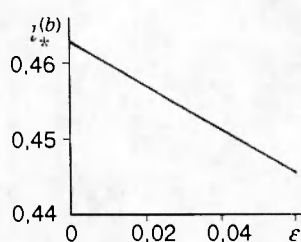


Рис. 6

Задача	l	P	Φ	$\sigma_{\varphi\varphi}(\max)$	Δ
(0)	0,462769	0,3112	0,2085	0,5620	0,0003436
(a)	0,25	0,2502	0,1563	0,5296	0,0006551
(b)	0,242728	0,2476	0,1548	0,5168	0,0001671

0,3; 0,35; 0,4; 0,425; 0,45 и $c = \omega\epsilon = 1$. Оно применимо при любом не слишком большом значении зазора, задаваемом ϵ . График зависимости l от $v = v^{(a)}$ (сплошная кривая на рис. 3) с ростом v приближается к штриховой прямой, на которой $l = l_*^{(a)}$.

Распределение напряжений в пластине, когда $l > 0,25$, в общих чертах аналогично представленному выше в решении $U^{(a1)}$ в случае отсутствия зазора; изменяется только положение точки $\eta = l$. При $l \leq 0,25$ в окрестности точки $(-R, 0)$ на краю отверстия и вблизи него имеется небольшая область, где $\sigma_{r\varphi}$ мало по абсолютной величине и $\sigma_{rr} < 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} < 0$.

На рис. 4 и 5 показано распределение напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и смещений u_r , u_φ на Γ при $l = 0,15$, $v = v^{(a)} = 0,4993$. Минимум σ_{rr} находится в точке $\eta = 0$. На большей части области контакта $\sigma_{rr} < 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} < 0$, $u_\varphi > 0$. С возрастанием l , v участок на Γ с положительными окружными смещениями исчезает.

Сравним теперь $U^{(a)}$ с решением $\tilde{U}^{(b)}$ задачи (1.1), (2.1), (2.8). Максимальная длина области контакта $l_*^{(b)}$ с возрастанием ϵ уменьшается почти линейно по ϵ (рис. 6). Уменьшение $l_*^{(b)}$ по сравнению с $l_*^{(a)}$ мало. При $\epsilon = 0,05$ оно составляет около 3%.

Такого же порядка малости получаются и относительные величины разностей между $U^{(a)}$ и $U^{(b)}$ при $\epsilon = 0,05$ и одинаковых смещениях $v = v^{(a)} = v^{(b)}$. Отмеченные выше характерные свойства $U^{(a)}$ сохраняются и в $U^{(b)}$. Зависимость l от $v = v^{(b)}$ представлена на рис. 3 штрихпунктирной линией при $l_*^{(b)} = 0,448351$.

Вариант краевых условий (2.8) по сравнению с (2.10) менее стеснителен для пластины. При одном и том же смещении v он ведет к меньшим энергии деформации, максимальным напряжениям, длине области контакта и силе P . Расстояние от деформированного края отверстия до контура штифта определяется в безразмерных величинах по формуле

$$\Delta = [(1 + \epsilon \cos \varphi + \omega^{-1} u_r)^2 + (-\epsilon \sin \varphi + \omega^{-1} u_\varphi)^2]^{1/2} - (1 - \epsilon).$$

В рассматриваемых задачах на участке контакта Δ не равно строго нулю, но в задаче (b) оно меньше, чем в (a). В таблице даны значения Δ в точках $\eta = l$, максимальные значения окружных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ на Γ , обозначаемые через $\sigma_{\varphi\varphi}(\max)$, значения l , P , Φ в решениях $U^{(a)}$ и $U^{(b)}$ при $\epsilon = 0,05$, а также в решении $U^{(0)} = vU^{(a1)}$ (в таблице задача (0)), когда $v = v^{(a)} = v^{(b)} = 1,341$.

Проведя сравнение $U^{(a)}$, $U^{(b)}$ и $U^{(0)}$ при одинаковых смещениях v , отметим следующее. Разность между $\tilde{U}^{(a)}$ и $\tilde{U}^{(b)}$ при одинаковых значениях l с ростом l может стать как угодно большой вследствие неограниченного возрастания $\tilde{U}^{(a)}$, $\tilde{U}^{(b)}$ и разных $l_*^{(a)}$ и $l_*^{(b)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hyer M. W., Klang E. C. Contact stresses pin-loaded orthotropic plates // Int. J. Solids and Struct. 1985. V. 21, N 9. P. 957-975.

2. Naik R. A., Crews J. H. Jr. Stress analysis method for a clearance-fit bolt under bearing loads // AIAA J. 1986. V. 24, N 8. P. 1348–1353.
3. Солодовников В. Н. О напряжениях в пластине, удерживаемой в равновесии штифтом // ПМТФ. 1990. № 1. С. 144–147.
4. Mangalgiri P. D., Dattaguru B., Rao A. K. Finite element analysis of moving contact in mechanically fastened joints // Nuclear Engineering and Design. 1984. V. 78. P. 303–311.
5. Boussinesq J. Application des potentials à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villard, 1885.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
7. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
8. Bathe K. J. Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.
9. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959.

*Поступила в редакцию 21/III 1995 г.,
в окончательном варианте — 26/IX 1995 г.*
