ПМТФ, № 6, 1961

РАЗРУШЕНИЕ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКИ СТРЕЛОВИДНОГО КРЫЛА В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Г. А. Тирский

(Москва)

При гиперзвуковых скоростях полета равновесно радиационная температура передней кромки стреловидных крыльев даже при значительных углах стреловидности может достигать значений, превосходящих температуру плавления всех тугоплавких металлов [1]. Поэтому возникает необходимость в создании специальной системы охлаждения. Однако, если время полета не велико, как это бывает, например, при быстром входе или выходе из плотных слоев земной атмосферы, то можно допустить частичное разрушение обтекаемой поверхности.

При такой системе «охлаждения» необходимо точно знать скорость разрушения. В статье приводится решение задачи об оплавлении передней кромки стреловидного крыла в гиперзвуковом потоке с учетом испарения пленки расплава.

Подробно рассматриваются два случая. В первом случае материал крыла характеризуется определенной температурой плавления, а также произвольным конечным числом температур перехода, при достижении которых может происходить поглощение тепла [2]. Металлы и кристаллические формы некоторых керамик являются типичными материалами, разрушающимися по такой схеме.

Во втором случае материал крыла не имеет четко выраженной температуры плавления и характеризуется экспоненциальной зависимостью вязкости расплава от температуры. Различные стекла разрушаются по этой схеме.

§ 1. Система уравнений и краевые условия. Рассмотрим крыло достаточной длины, так что можно пренебречь влиянием корневого сечения крыла и его конца и считать крыло бесконечным цилиндром с углом стреловидности, равным Λ (Λ — угол между осью цилиндра и плоскостью, перпендикулярной направлению потока). Течение около такого крыла будет существенно трехмерной задачей, включающей вторичное течение в пограничном слое. Если z координата вдоль образующей крыла, то в силу предположения о бесконечной длине цилиндра члены, содержащие частные производные по z, выпадут из уравнений пограничного слоя [3].

Тогда задача об оплавлении передней кромки такого крыла, помещенного в стационарный поток газа, будет сводиться к решению системы нестационарных (из-за перемещения оплавляющейся поверхности) уравнений гиперзвукового пограничного слоя в газе ($y_0(x,t) < y < \infty$; $-\infty < z < \infty$; $t > 0$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x}(\rho x^{n-1} u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial c_i}{\partial t} + u\frac{\partial c_i}{\partial y} + v\frac{\partial c_i}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_i\frac{\partial c_i}{\partial y}\right) + \dot{\rho}_i \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\mu}{\sigma}\left[\frac{\partial h}{\partial y} + \sum_{k=1}^{N}(L_k - 1)h_k\frac{\partial c_k}{\partial y}\right]\right\} + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$p = \rho RT\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{M_k}, \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad L_i = \frac{\rho c_p D_i}{\lambda}, \quad c_p = \sum_{k=1}^{N} c_k c_{pk}, \quad h = \sum_{k=1}^{N} c_k h_k$$

нестационарных уравнений пограничного слоя в пленке расплава $(y_1(x, t) < y < y_0(x, t),\ t > 0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{n-1} u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(x^{n-1} v_1) = 0$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}\right) \tag{1.2}$$

$$\rho_1 c_1^* \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}\right) + \mu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2$$

$$\rho_1 = \mathrm{const}, \qquad c_1^* = \mathrm{const}, \qquad \lambda_1 = \mathrm{const}, \qquad \mu_1 = \mu_1^* M_1(T_1)$$

совместно с системой $P-1$ уравнений теплопроводности в твердом теле $(y_j(x, t) < y < y_{j-1}(x, t);\ j = 2, \ldots, P-1;\ -\infty < y < y_{P-1};\ t > 0)$

$$\rho_2 c_j \frac{\partial T_j}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial y}\right), \qquad \rho_2 c_j = \rho_2 c_j^* N_j(T_j)$$

$$\lambda_j = \lambda_j^0 L_j(T_j) \qquad (j = 2, \ldots, P) \tag{1.3}$$

Здесь $n = 1$ относится к стреловидному крылу, $n = 2$ — к осесимметричному телу, и в этом случае следует в системах (1.1) — (1.2) положить $w = w_1 = 0$; координаты x, y, z, связанные с телом, направлены соответственно по направляющей, по нормали и по образующей цилиндра до оплавления (абсолютная система координат); u, v, w — компоненты вектора скорости соответственно по осям x, y и z; ρ — плотность; p — давление; c_i — массовая концентрация i-ой компоненты; $\dot{\rho}_i$ — массовая скорость образования i-ой компоненты в единице объема; h_i — парциальная удельная энтальпия i-ой компоненты, содержащая теплоту образования этой компоненты; M_i — молярная масса; $T_j (j = 1, \ldots, P)$ — температура тела в j-ой области; μ, λ, D_i — коэффициент вязкости, теплопроводности и диффузии; R — универсальная газовая постоянная; c_{p_i} — теплоемкость при постоянном давлении для поступательной, вращательной и колебательной энергии i-ой компоненты; M_1, N_j и L_j — заданные функции температуры; $P-1$ — число характерных температур в теле, связанных с эндотермическими изменениями кристаллической решетки, включая температуру плавления; N — число компонент в газе; $y = y_j(x, t)$ $(j = 0, \ldots, P-1)$ означают уравнения неизвестных фронтов перехода, включая также фронт испарения $(j = 0)$.

При записи уравнений (1.1) — (1.3), кроме обычных предположений теории пограничного слоя в окрестности критической линии, сделано допущение, что все максвелловские диффузионные коэффициенты равны (для бинарной смеси это предположение выполняется точно) и эффект термодиффузии мал. Член $\partial p / \partial t$ опущен из уравнения притока тепла, так как скорость разрушения много меньше скорости звука. Пленка расплава — однородная несжимаемая жидкость с постоянной теплоемкостью, но с переменным коэффициентом вязкости. Теплофизические свойства тела — произвольные функции от температуры.

Выписанная система уравнений (1.1) — (1.3) относится к разрушению материалов, имеющих определенную температуру плавления. Если материал крыла не имеет четкой температуры плавления, то система (1.2) должна решаться в полупограничной области $-\infty < y < y_0(x, t)$, а систему (1.3) следует опустить. В дальнейшем этот случай будем называть вторым. Решения систем (1.1) — (1.3) должны сопрягаться на неизвестных до решения задачи фронтах $y = y_j(x, t)$.

1°. Предполагая, что в процессе разрушения передняя кромка крыла слабо меняет свою форму, приходим к следующим условиям на внешней границе пограничного слоя в окрестности передней кромки ($y \to \infty, t > 0$)

$$u = \beta x, \qquad w = w_e = w_\infty, \qquad c_i = c_{ie}, \qquad h = h_e$$
$$p = p_{00} - \tfrac{1}{2}\rho_e(\beta^2 x^2 + w_e^2) \tag{1.4}$$

2°. На фронте испарения ($y = y_0(x, t)$, $t > 0$) из законов сохранения массы, импульса и энергии при предположении, что

$$u = u_1, \qquad w = w_1 \qquad T = T_1 = T_0 \tag{1.5}$$

получаем [4]

$$\rho(D + u\operatorname{tg}\beta' + w\operatorname{tg}\gamma - v) = \rho_1(D + u_1\operatorname{tg}\beta' + w_1\operatorname{tg}\gamma - v_1)$$
$$(i = 1,\ldots, N')$$
$$\rho c_i(D + u\operatorname{tg}\beta' + w\operatorname{tg}\gamma - v) + \rho D_i\frac{\partial c_i}{\partial y} = \rho_1 c_{if}(D + u_1\operatorname{tg}\beta' + w_1\operatorname{tg}\gamma - v_1)$$
$$\rho c_j(D + u\operatorname{tg}\beta' + w\operatorname{tg}\gamma - v) + \rho D_j\frac{\partial c_j}{\partial y} = 0 \qquad (j = N' + 1,\ldots, N)$$
$$\mu\frac{\partial u}{\partial y} = \mu_1\frac{\partial u_1}{\partial y}, \qquad \mu\frac{\partial w}{\partial y} = \mu_1\frac{\partial w_1}{\partial y}, \qquad p = p_1 \tag{1.6}$$
$$\rho(D + u\operatorname{tg}\beta' + w\operatorname{tg}\gamma - v)(h - h^{(1)}) + \frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial h}{\partial y} + \sum_{k=1}^{N}(L_k - 1)\frac{\mu}{\sigma}h_k\frac{\partial c_k}{\partial y} = \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y}$$
$$\frac{p_*}{p_e}\psi_*\left(\frac{T_0}{T_*}\right)\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{M_k} = \sum_{k=1}^{N'}\frac{c_k}{M_k}, \qquad p_e = p_{00} - \frac{1}{2}\rho_e w_e^2$$

3°. На фронте плавления ($y = y_1(x, t)$; $t > 0$) имеем

$$u_1 = 0, \qquad w_1 = 0, \qquad T_1 = T_2 = T_1{}^*$$
$$\rho_1(D_1 - v_1) = \rho_2 D_1, \qquad \rho_2 D_1\delta_1 = \lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial y} - \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y} \tag{1.7}$$

4°. На эндотермических поверхностях перехода ($y = y_j(x, t)$; $j = 2, \ldots, P-1$; $t > 0$) будем иметь

$$T_j = T_{j+1} = T_j{}^*, \qquad \rho_2 D_j\delta_j = \lambda_{j+1}\frac{\partial T_{j+1}}{\partial y} - \lambda_j\frac{\partial T_j}{\partial y} \qquad (j = 2,\ldots,P-1) \tag{1.8}$$

5°. На бесконечности внутри тела ($y \to -\infty$, $t > 0$)

$$T_P = T_{-\infty} = T_P{}^* \tag{1.9}$$

В условиях (1.4) — (1.9) обозначено: $D, D_1, \ldots, D_{P-1}$ — нормальные к соответствующим поверхностям скорости перемещения фронтов испарения, плавления и поверхностей перехода; β' — угол в плоскости $z = \text{const}$ между касательной к поверхности испарения в некоторой ее точке и касательной к первоначальной поверхности тела в точке с тем же значением координаты x, а γ — аналогичный угол в плоскости $x = \text{const}$; N' — число компонент пара, $N'' = N - N'$; T_0 — неизвестная до решения задачи температура на фронте испарения; $T_j{}^*$ — температура плавления ($j = 1$) и характерные температуры перехода ($j \geqslant 2$); $h^{(1)}$ — энтальпия жидкой пленки при температуре испарения T_0; δ_j — скрытая теплота плавления ($j = 1$) и скрытые теплоты перехода ($j \geqslant 2$) единицы массы; p_{00} — давление торможения; h_e — энтальпия вне пограничного слоя; c_{if} — состав паров жидкой пленки при испарении в вакуум (при испарении только одной компоненты $c_{if} = 1$). Предпоследнее соотношение в (1.6)—уравнение упругости пара.

В случае оплавления стекловидной кромки условия (1.7), (1.8) следует опустить, а условие внутри тела (1.9) будет

$$u_1 = w_1 = 0, \qquad T_1 = T_{-\infty} \tag{1.10}$$

В дальнейшем будем искать стационарный режим оплавления, поэтому начальных условий не выписываем.

§ 2. Формулировка краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Обобщая решение типа равномерно распространяющейся волны, изученное в работе [2] для окрестности критической точки и линии, на случай оплавления передней кромки стреловидного крыла, будем искать решение уравнений (1.1) — (1.3) с условиями (1.4) — (1.10) в виде:

1) для пограничного слоя смеси газов

$$u = \beta x\varphi'(\eta), \quad w = w_e\psi(\eta), \quad v = -\frac{\rho_e}{\rho}\sqrt{\beta\nu_e}\left[\frac{1}{\sqrt{l_e}}n\varphi(\eta) - D^*\frac{\rho}{\rho_e}\right] \quad (n = 1, 2)$$

$$h = h_e g(\eta), \qquad c_i(\eta) = c_{ie}s_i(\eta), \qquad p = p_{00} - \frac{1}{2}\rho_e(\beta^2x^2 + w_e^2) \tag{2.1}$$

$$\int_0^\eta \frac{\rho_e}{\rho}d\eta = \left(\frac{\beta l_e}{\nu_e}\right)^{1/2}(y - Dt), \quad D^* = \frac{D}{\sqrt{\beta\nu_e}}, \quad \nu_e = \frac{\mu_e}{\rho_e}, \; l_e = \frac{\mu_e\rho_e}{\mu_0\rho_0}$$

2) для жидкой пленки

$$u_1 = \beta_1 x\varphi_1'(\eta_1), \quad w_1 = w_{1e}\psi_1(\eta_1), \quad v_1 = -\sqrt{\beta_1\nu_1}\,[n\varphi_1(\eta_1) - D_1^*] \quad (n = 1, 2)$$

$$p_1 = p_{00} - \frac{1}{2}\rho_1(\beta_1^2x^2 + w_{1e}^2), \qquad T_1 = T_1^*\theta_1(\eta_1) \tag{2.2}$$

$$\eta_1 = \left(\frac{\beta_1}{\nu_1}\right)^{1/2}(y - Dt), \qquad D_1^* = \frac{D}{\sqrt{\beta_1\nu_1}}, \qquad \nu_1 = \frac{\mu_1^*}{\rho_1}$$

3) для твердого тела

$$T_j = T_j^*\theta_j(\eta_1) \qquad (j = 2, \ldots, P) \tag{2.3}$$

4) для жидкой пленки стекловидного материала вместо (2.2), (2.3) будем искать решения в виде

$$u_1 = \beta_1\frac{1}{\sqrt{\sigma_1 n}}x\varphi_1'(\eta_1), \quad w_1 = w_{1e}\psi_1(\eta_1), \quad v_1 = \sqrt{\beta_1\nu_1}\,[(\sigma_1 n)^{-3/4}n\varphi_1(\eta_1) + D_1^*]$$

$$p_1 = p_{00} - \frac{1}{2}\rho_1(\beta_1^2x^2 + w_{1e}^2), \qquad T_1 = T^*\theta_1(\eta_1) \tag{2.4}$$

$$\eta_1 = (\sigma_1 n)^{1/4}\left(\frac{\beta_1}{\nu_1}\right)^{1/2}(Dt - y), \qquad D_1^* = \frac{D}{\sqrt{\beta_1\nu_1}}$$

Здесь φ, ψ, g, s_i, θ_j, φ_1, ψ_1 — искомые функции; β_1, w_{1e} — неизвестные пока параметры; величины с индексом e относятся к параметрам вне пограничного слоя; величины с индексом 0 — к параметрам на поверхности испарения; T^* — температура, входящая в формулу для вязкости

$$\mu = \mu^*\exp\left(\frac{T^*}{T}\right)^\varkappa$$

Законы движения фронтов при стационарном режиме разрушения будем искать в виде

$$y_0(x, t) = Dt, \qquad y_j(x, t) = D_j t - s_j, \qquad D_j = D \qquad (j = 1, \ldots, P - 1)$$

$$\beta' = \gamma = 0 \tag{2.5}$$

Здесь D — искомая скорость разрушения, s_j — искомое расстояние j-го фронта от фронта испарения.

Подставляя выражения (2.1) — (2.3), (2.5) в уравнения (1.1) — (1.3) и условия (1.4) — (1.9), получим нелинейную краевую задачу:

$$(l\varphi'')' + n\varphi\varphi'' = \varphi'^2 - \frac{\rho_e}{\rho}, \qquad (l\psi')' + n\varphi\psi' = 0 \tag{2.6}$$

$$\left(lS^{-1} c_i'\right)' + n\varphi c_i' + \frac{\rho_i}{\rho\beta} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$\left\{l\sigma^{-1} \left[h' + \sum_{k=1}^{N} (L_k - 1)\, h_k c_k'\right]\right\}' + n\varphi h' + w_e^2 l\psi'^2 = 0$$

$$[M_1(\theta_1)\,\varphi_1'']' + n\varphi_1\varphi_1'' = \varphi_1'^2 - 1, \qquad [M_1(\theta_1)\,\psi_1']' + n\varphi_1\psi_1' = 0 \tag{2.7}$$

$$\theta_1'' + n\sigma_1\varphi_1\theta_1' + \sigma_1 \frac{w_e^2}{c_1^* T_1^*} r_1 M_1(\theta_1)\,\psi_1'^2 = 0$$

$$[L_j(\theta_j)\,\theta_j']' + D_1^* \sigma_j N_j(\theta_j)\,\theta_j' = 0 \qquad (j = 2, \ldots, P) \tag{2.8}$$

$$\varphi'(\infty) = \psi(\infty) = g(\infty) = s_i(\infty) = 1 \tag{2.9}$$

$$\varphi(0) = l_e^{1/2} r_1^{-3/4} n_1^{-1/2} \varphi_1(0), \qquad \psi(0) = r_1^{1/2}\psi_1(0), \qquad \varphi'(0) = r_1^{1/2}\varphi_1'(0) \tag{2.10}$$

$$\psi'(0) = l_e^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2} M_1(\theta_0)\,\psi_1'(0), \quad \varphi''(0) = l_e^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2} M_1(\theta_0)\,\varphi_1''(0)$$

$$(c_{i0} - c_{if})\, S_0 n\varphi(0) + c_i'(0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N'), \qquad \theta_1(0) = \theta_0,$$

$$c_{j0} S_0 n\varphi(0) + c_j'(0) = 0 \qquad (j = N' + 1, \ldots, N), \qquad f(c_{i0}, T_0) = 0$$

$$n\varphi(0)\,(h - h^{(1)}) + \sigma_0^{-1} h'(0) + \sum_{k=1}^{N} (L_{k0} - 1)\,\sigma_0^{-1} h_k c_k'(0) = \frac{c_1^* T_1^* l_e^{1/2}}{\sigma_1 n_1^{1/2} r_1^{3/4}}\,\theta_1'(0)$$

$$\beta_1 = \beta r_1^{1/2}, \qquad w_{1e} = w_e r_1^{1/2} \tag{2.11}$$

$$\varphi_1'(-\eta_1^*) = \psi_1(-\eta_1^*) = 0, \qquad \theta_1(-\eta_1^*) = 1, \qquad \theta_2(-\eta_1^*) = t_2 \tag{2.12}$$

$$r_2 n\varphi_1(-\eta_1^*) = D_1^*, \qquad L_2(t_2)\,\theta_2'(-\eta_1^*) - l_2 t_2 \theta_1'(-\eta_1^*) = D_1^*\Delta_1 \tag{2.13}$$

$$\theta_j(-\eta_j^*) = 1 \quad (j = 2, \ldots, P - 1), \qquad \theta_{j+1}(-\eta_j^*) = t_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, P - 1)$$

$$L_{j+1}(t_{j+1})\,\theta_{j+1}'(-\eta_j^*) - l_{j+1} t_{i+1} L_j(1)\,\theta_j'(-\eta_j^*) = D_1^*\Delta_j \quad (j = 2, \ldots, P - 1)$$

$$\theta_P(-\infty) = 1 \tag{2.14}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$l = \frac{\mu\rho}{\mu_0\rho_0}, \qquad S = \frac{\mu}{\rho D_i}, \qquad n_1 = \frac{\nu_e}{\nu_1}, \qquad r_1 = \frac{\rho_e}{\rho_1}$$

$$r_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \qquad \theta_0 = \frac{T_0}{T_1^*}, \qquad \sigma_1 = \frac{\mu_1^* c_1^*}{\lambda_1}$$

$$\sigma_j = \frac{\mu_1^*}{\rho_1\lambda_j^\circ}\rho_2 c_j^*, \qquad t_j = \frac{T_{j-1}^*}{T_j^*}, \qquad l_j = \frac{\lambda_{j-1}^\circ}{\lambda_j^\circ} \qquad (j = 2, \ldots, P) \tag{2.15}$$

$$\Delta_j = \frac{\rho_2\nu_1\delta_j}{\lambda_{j+1}^\circ T_{j+1}^*}, \qquad \eta_j^* = s_j\sqrt{\frac{\beta_1}{\nu_1}} = s_j r_1^{1/4}\sqrt{\frac{\beta}{\nu_1}} \qquad (j = 1, \ldots, P - 1)$$

Последнее уравнение условий (2.10) — краткая запись кривой упругости пара.

Таким образом, задача об оплавлении передней кромки из материала, имеющего определенную температуру плавления, свелась к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений $2N+2P+12$ порядка с $P+1$ неизвестными параметрами η_j^* $(j=1,\ldots,P-1)$, θ_0, D_1^*. Соотношения (2.9) — (2.14) дают как раз $2N+3P+13$ условий. Следовательно, можно ожидать, что решение определится однозначно.

Во втором случае оплавления стекловидных материалов после подстановки (2.4) в уравнения (1.2) будем иметь вместо системы (2.7) неразделяющуюся систему уравнений

$$\left[\exp\left(\frac{1}{\theta_1^{\varkappa}}\right)\varphi_1''\right]' + 1 = \frac{1}{\sigma_1 n}(\varphi_1'^2 - n\varphi_1\varphi_1''), \quad \left[\exp\left(\frac{1}{\theta_1^{\varkappa}}\right)\psi_1'\right]' + \frac{1}{\sigma}\varphi_1\psi_1' = 0$$

$$\theta_1'' + \varphi_1\theta_1' + \sigma_1 r_1 \frac{w_e^2}{c_1^* T^*}\exp\left(\frac{1}{\theta_1^{\varkappa}}\right)\psi_1'^2 = 0 \qquad (2.16)$$

Уравнения (2.8), условия (2.12), (2.13) в этом случае следует опустить. Условия на поверхности испарения (2.10) примут вид

$$\varphi(0) = -l_e^{1/2} r_1^{-3/4} n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{-3/4}\varphi_1(0), \quad \psi(0) = r_1^{1/2}\psi_1(0), \quad \theta_1(0) = \theta_0$$

$$\varphi'(0) = r_1^{1/2}(\sigma_1 n)^{-1/2}\varphi_1'(0), \quad \psi'(0) = -l_e^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{1/4}\exp(\theta_0^{-\varkappa})\psi_1'(0)$$

$$\varphi''(0) = -l_e^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{-1/4}\exp(\theta_0^{-\varkappa})\varphi_1''(0)$$

$$(c_{i0} - c_{if}) S_0 \varphi(0) + c_i'(0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N')$$

$$c_{j0} S_0 n\varphi(0) + c_j'(0) = 0 \qquad (j = N'+1, \ldots, N) \qquad (2.17)$$

$$n\varphi(0)(h - h^{(1)}) + \sigma_0^{-1} h'(0) + \sum_{k=1}^{N}(L_{k0} - 1)\sigma_0^{-1} h_k c_k'(0) =$$

$$= -l_e^{1/2} r_1^{-3/4} n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{1/4}\frac{c_1^* T^*}{\sigma_1}\theta_1'(0)$$

$$f(c_{i0}, T_0) = 0 \qquad (\theta_0 = T_0 / T^*)$$

Условия на бесконечности внутри тела согласно (1.10) имеют вид

$$\varphi_1'(\infty) = \psi_1(\infty) = 0, \qquad \theta_1(\infty) = \frac{T_{-\infty}}{T^*} = \theta_{-\infty} \qquad (2.18)$$

В этом случае задача будет сводиться к решению системы уравнений (2.6), (2.16) $2N+14$ порядка с неизвестным параметром θ_0. Соотношения (2.9), (2.17), (2.18) дают $2N+15$ условий. Следовательно, можно ожидать, что решение этой задачи имеет единственное решение. После нахождения функции $\varphi_1(\eta_1)$ скорость оплавления найдется из формулы

$$D = -n r_1^{1/4}(\sigma_1 n)^{-3/4}\sqrt{\beta\nu_1}\,\varphi_1(\infty) \qquad (2.19)$$

§ 3. Решение системы уравнений для твердой фазы. Система (2.8) для твердой фазы может быть проинтегрирована в квадратурах [2]. Температура в каждой из $P-1$ областей определяется из неявных выражений:

$$\int_1^{\theta_m}\frac{L_m(t)\,dt}{Q_m(t) - A_m} = -D_1^*\sigma_m(\eta_1 + \eta_m^*) \qquad (m = 2, \ldots, P-1)$$

$$\int_{i_P}^{\theta_P}\frac{L_P(t)\,dt}{Q_P(t) - Q_P(1)} = -D_1^*\sigma_P(\eta_1 + \eta_{P-1}^*) \qquad (3.1)$$

$$Q_j(\theta_j) = \int N_j(\theta_j)\,d\theta_j \qquad (j = 2, \ldots, P)$$

где постоянные A_m и η_m^* находятся последовательно, начиная с $m=2$, из системы уравнений

$$c_m^* T_m^* [Q_m(t_m) - A_m] = \sum_{i=m}^{P-1} \{\delta_i + c_i^* T_i^* [Q_i(t_i) - Q_i(1)]\} + \\ + c_P^* T_P^* [Q_P(t_P) - Q_P(1)] \qquad (3.2)$$

$$\int_1^{t_m} \frac{L_m(t)\,dt}{Q_m(t) - A_m} = -D_1^* \sigma_m (\eta_m^* - \eta_{m-1}^*) \qquad (m = 2, \ldots, P-1)$$

с точностью до двух постоянных η_1^* и D_1^*.

Из второго уравнения этой системы следует, что расстояние между фронтами обратно пропорционально скорости разрушения, т. е. с увеличением скорости разрушения поверхности перехода сближаются между собой.

§ 4. Решение уравнений для жидкой фазы. Случай оплавления металлической кромки. В третьем уравнении системы (2.7), коэффициент последнего члена преобразуем к следующему виду:

$$r_1\sigma_1 M_1(\theta_1) \frac{w_e^2}{c_1^* T_1^*} = r_1\sigma_1(\theta_1) \frac{c_{p\infty} T_\infty}{c_1^* T_1^*} (\gamma_\infty - 1) M_\infty^2 \sin^2\Lambda \qquad (4.1)$$

где индекс ∞ — относится к параметрам набегающего потока перед ударной волной, $\gamma_\infty = c_{p\infty} / c_{v\infty}$, $\sigma_1(\theta_1) = \sigma_1 M_2(\theta_1)$ — переменное число Прандтля жидкой фазы. Для большинства металлических тел этот коэффициент мал даже при больших числах M_∞. Действительно, так как

$$r_1 \approx 10^{-4}, \qquad \sigma_1 < 1, \qquad \frac{c_{p\infty} T_\infty}{c_1^* T_1^*} < 1$$

то при $M_\infty \leqslant 10^2$ третьим членом в уравнении притока тепла (2.7) можно пренебречь. Физически этот факт означает, что диссипация механической энергии в пленке расплава от присутствия потока по размаху крыла ничтожно мала по сравнению с переносом энергии за счет теплопроводности и конвекции. Но тогда уравнения (2.7) для функций φ_1 и θ_1 будут совпадать с системой, решенной ранее в работе [2]. Если обозначить $\varphi_1(0) = \alpha_1$, $\varphi_1'(0) = \varepsilon_1$, $\tau_1 = \varphi_1''(0, \varepsilon_1, \eta_1^*)$, то будем иметь [2]

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1}{\eta_1^*} + \frac{b}{2}\eta_1^*, \qquad \varphi_1(-\eta_1^*) = \alpha_1 - \eta_1^*\left(\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{b}{12}\eta_1^{*2}\right)$$

$$\int_0^{-\eta_1^*} \varphi_1(\eta_1)\,d\eta_1 = -\alpha_1\eta_1^* + \frac{\eta_1^{*2}}{3}\left(\varepsilon_1 - \frac{b}{8}\eta_1^{*2}\right) \qquad (4.2)$$

$$\omega_1(-\eta_1^*, \sigma_1) = \int_0^{-\eta_1^*} \exp\left(-n\sigma_1 \int_0^{\eta_1} \varphi_1(\eta_1)\,d\eta_1\right) d\eta_1 = -\eta_1^* \Big[1 + \frac{n\sigma_1\alpha_1}{2}\eta_1^* - \\ - \frac{n\sigma_1\varepsilon_1}{8}\eta_1^{*2} + \frac{n^2\sigma_1^2\alpha_1^2}{6}\eta_1^{*2} - \frac{n^2\sigma_1^2\alpha_1\varepsilon_1}{8}\eta_1^{*3} + \frac{n^3\sigma_1^3\alpha_1^3}{24}\eta_1^{*3} + 0(\eta_1^{*4})\Big]$$

Здесь

$$b = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\tau\gamma}}{2\tau}, \qquad \tau = \frac{\eta_1^{*4}}{120}, \qquad M_0 = M_1(\theta_0)$$

$$\beta = \frac{1 + M_0}{2(1+n)} + \frac{\varepsilon_1\eta_1^{*2}}{12}, \qquad \gamma = \frac{\varepsilon_1^3}{3} - \frac{1}{1+n} + \frac{(1 - M_0)\varepsilon_1^2}{(1+n)\eta_1^{*2}} - \frac{n\alpha_1\varepsilon_1}{(1+n)\eta_1^*}$$

Приближенно

$$b = \gamma / \beta \quad \text{при } \eta_1^* < 1$$

Интегрирование третьего уравнения системы (2.7) дает

$$\theta_1'(0) = \frac{1-\theta_0}{\omega_1(-\eta_1^*, \sigma_1)}, \qquad \theta_1'(-\eta_1^*) = \frac{(1-\theta_0)}{\omega_1(-\eta_1^*, \sigma_1)} \exp\Big(-n\sigma_1 \int_0^{-\eta_1^*} \varphi(\eta_1)\, d\eta_1\Big) \tag{4.3}$$

Сравнение приближенного решения (4.2) с численным, полученным в работе [5], дает хорошее совпадение.

§ 5. Решение уравнений для жидкой фазы. Случай оплавления стекловидной кромки. Оценим порядок диссипативного члена в системе (2.16), например, для стекла пирекс [6]

$$\mu_1 = \mu_1^* \exp\frac{T^*}{T} = e^{-17} \exp\frac{38\,000}{T\,(°K)}, \qquad c_1^* = 0.25 \textit{ кал / г град}$$

$$\lambda_1 = 7\cdot 10^{-3} \textit{ кал / см сек град}, \quad \sigma_1 = 1.46\cdot 10^{-6}, \quad n_1 \approx 10^8, \quad r_1 \approx 10^{-4}$$

Из четвертого условия (2.10) имеем

$$\exp(\theta_0^{-1})\,\psi_1'(0) = \psi'(0)\, l_e^{-1/2} r_1^{1/4} n_1^{1/2} \approx 10^3$$

Тогда

$$r_1\sigma_1 \exp\frac{1}{\theta_1}\,\frac{w_e^2}{c_1^* T_1^*}\,\psi_1'^2 = r_1\sigma_1 \exp\Big(-\frac{1}{\theta_1}\Big)\frac{c_{p\infty}T_\infty}{c_1^* T^*}(\gamma_\infty - 1)\, M_\infty^2 \sin^2\Lambda \times$$

$$\times \Big[\exp\frac{1}{\theta}\,\psi_1'\Big]^2 \approx 10^{-16} M_\infty^2$$

Так как остальные члены в уравнении притока тепла имеют порядок $\varphi_1\theta_1' \approx 10^{-5}\cdot 10^{-4} = 10^{-9}$, то диссипативиым членом можно пренебречь.

Из краевых условий (2.10) следует, что $\varphi_1'^2 \approx \varphi_1\varphi_1'' \approx 10^{-9}$. Поэтому правая часть в первом уравнении системы (2.16) имеет порядок 10^{-3} и ее можно опустить по сравнению с единицей. Это приближение соответствует факту, что инерционные силы в пленке расплава много меньше сил давления и сил трения. Тогда система (2.16) примет вид

$$\Big[\exp\Big(\frac{1}{\theta_1^*}\Big)\varphi_1''\Big]' + 1 = 0, \qquad \Big[\exp\Big(\frac{1}{\theta_1^*}\Big)\psi_1'\Big]' + \sigma_1^{-1}\varphi_1\psi_1' = 0, \qquad \theta_1'' + \varphi_1\theta_1' = 0 \tag{5.1}$$

Будем решать эту систему уравнений с краевыми условиями:

$$\varphi_1(0) = \alpha_1 > 0 \quad (\alpha_1 \approx 10^{-5}), \qquad \varphi_1'(0) = \varepsilon_1 > 0$$

$$\psi_1(0) = \psi_{10} > 0 \tag{5.2}$$

$$\theta_1(0) = \theta_0, \qquad \varphi_1'(\infty) = \psi_1(\infty) = 0, \qquad \theta_1(\infty) = \theta_{-\infty}$$

методом последовательных приближений. Далее везде в этом параграфе введем обозначение $\eta_1 = \eta$. За нулевое приближение возьмем

$$\varphi_1^{(0)\prime} = \varepsilon_1[1 - \Phi(r\eta)], \qquad \theta_1^{(0)} = \theta_0 + \Delta\theta\Phi(s\eta), \qquad \Delta\theta = \theta_{-\infty} - \theta_0 \tag{5.3}$$

где r и s — неизвестные пока постоянные, Φ — интеграл ошибок.

Интегрируя первое уравнение (5.3) с использованием краевого условия $\varphi_1(0) = \alpha_1$, получим

$$r = \frac{\varepsilon_1}{(d-\alpha_1)\sqrt{\pi}}, \qquad d = \varphi_1(\infty) \tag{5.4}$$

Первое приближение для θ_1 найдем из уравнения

$$\theta_1^{(1)''} = -\varphi_1^{(0)}\theta_1^{(0)'} = -\Delta\theta \frac{2s}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2\eta^2}\left(\alpha_1 + \int_0^\eta \varphi_1^{(0)'} d\eta\right) \tag{5.5}$$

Отсюда после однократного интегрирования и использования соотношения (5.4), найдем

$$\frac{\theta_1^{(1)'}(0)}{\Delta\theta} = \alpha_1 + (d-\alpha_1)(1 + q - \sqrt{1+q^2}), \qquad q = \frac{r}{s} \tag{5.6}$$

Вторичное интегрирование уравнения (5.5) с учетом (5.4) даст

$$(d-\alpha_1)^2 = \frac{\varepsilon_1 - \alpha_1 q (d-\alpha_1)}{q^2 \operatorname{arc\,tg} q^{-1}} \tag{5.7}$$

Уравнения (5.6) и (5.7) дают параметрическую (через параметр q) зависимость производной $\theta_1'(0)$ от параметров α_1, ε_1 и d в первом приближении.

Для вычисления функции φ_1 в первом приближении оценим сначала толщину динамического и теплового пограничных слоев. Из уравнения движения (5.1) после интегрирования получим

$$\varphi_1'' = (C-\eta)\exp\left(-\frac{1}{\theta_1^{\varkappa}}\right), \qquad C = \tau_1 \exp\frac{1}{\theta_0^{\varkappa}}, \qquad \tau_1 = \varphi_1''(0) \tag{5.8}$$

Вторичное интегрирование дает

$$\varphi_1' = \varepsilon_1 + \int_0^\eta (C-t)\exp\left(-\frac{1}{\theta_1^{\varkappa}}\right) dt \tag{5.9}$$

Из (5.8) следует, что φ_1'' убывает по экспоненциальному закону. Поэтому толщину динамического пограничного слоя можно определить, как

$$\eta^\circ = \frac{\varphi_1(\infty) - \alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{d-\alpha_1}{\varepsilon_1}$$

Введем теперь вспомогательную функцию y, как решение краевой задачи

$$y'' + dy' = 0, \quad y(0) = \theta_0, \quad y(\infty) = \theta_{-\infty}, \quad \frac{y - \theta_{-\infty}}{\theta_0 - \theta_{-\infty}} = e^{-d\eta} \tag{5.10}$$

Толщина пограничного слоя этой вспомогательной краевой задачи равна $\eta^\circ = 1/d$. Так как $d \geqslant \varphi_1$, то $\theta_1 \geqslant y$ $(0 \leqslant \eta < \infty)$. Действительно, формальное решение последнего уравнения системы (5.1) с условиями (5.2) будет

$$\frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_{-\infty} - \theta_0} = \frac{J(\eta)}{J(\infty)} \equiv G\{\varphi_1\}\left(J(\eta) = \int_0^\eta \exp\left(-\int_0^t \varphi_1(\xi)\,d\xi\right)dt\right) \tag{5.11}$$

Покажем, что если $\varphi_1^* \geqslant \varphi_1$, то $G\{\varphi_1^*\} \geqslant G\{\varphi_1\}$. Введем для этого обозначения

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_1^* - \varphi_1, \quad \Phi_1 = \int_0^\eta \varphi_1(\xi)\,d\xi, \quad \Delta\Phi_1 = \int_0^\eta \Delta\varphi_1(\xi)\,d\xi$$

Очевидно, что $\Delta\Phi(\eta)$ при $\Delta\varphi_1 \geqslant 0$ — неубывающая положительная функция от η на всем интервале изменения η $(0 \leqslant \eta < \infty)$ и $\Delta\Phi(0) = 0$.

Положим далее

$$A_1(\eta) = \int_0^\eta e^{-\Phi_1(t)}\,dt, \qquad A_2(\eta) = \int_\eta^\infty e^{-\Phi_1(t)}\,dt$$

Тогда

$$G\{\varphi_1\} = \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

Имеем

$$A_1^*(\eta) = \int_0^\eta e^{-\Phi_1^*(t)} dt = \int_0^\eta e^{-\Phi_1(t) - \Delta\Phi_1(t)} dt \geqslant e^{-\Delta\Phi_1(\eta)} \int_0^\eta e^{-\Phi_1(t)} dt = e^{-\Delta\Phi_1(\eta)} A_1(\eta)$$

$$A_2^*(\eta) = \int_\eta^\infty e^{-\Phi_1^*(t)} dt \leqslant e^{-\Delta\Phi_1(\eta)} A_2(\eta)$$

Используя эти неравенства, получим

$$\frac{A_2^*}{A_2} \leqslant e^{-\Delta\Phi_1(\eta)} \leqslant \frac{A_1^*}{A_1} \qquad \text{или} \qquad \frac{A_1^*}{A_1^* + A_2^*} \geqslant \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

что и требовалось доказать. Тогда $\theta_1 \geqslant \theta_1^*$, или в принятых обозначениях $\theta_1 \geqslant y$. Следовательно, толщина теплового пограничного слоя

$$\eta_0 \geqslant 1 / d$$

Откуда

$$\frac{\eta^\circ}{\eta_0} \leqslant \frac{d(d - \alpha_1)}{\varepsilon_1} \approx 10^{-2} \div 10^{-1}$$

т. е. толщина динамического пограничного слоя в несколько десятков раз меньше толщины теплового пограничного слоя. Следовательно, в пределах динамического пограничного слоя температура θ_1 слабо отклоняется от θ_0. Заменим тогда под интегралом (5.9) функцию $\theta_1^{-\varkappa}$ первыми тремя членами ее разложения в степенной ряд в окрестности нуля. Полученное выражение для φ_1' возьмем в качестве первого приближения (5.12)

$$\varphi_1^{(1)\prime} = \varepsilon_1 + \int_0^\eta (C - t) \exp\left[-\frac{1}{\theta_0^{\varkappa}} + \frac{\varkappa\theta_0'}{\theta_0^{\varkappa+1}} t - \left(\frac{\varkappa(\varkappa+1)}{\theta_0^{\varkappa+2}} \theta_0'^2 + \frac{\varkappa\alpha_1\theta_0'}{\theta_0^{\varkappa+1}}\right) \frac{t^2}{2}\right] dt$$

После интегрирования и удовлетворения условию $\varphi_1'(\infty) = 0$ будем иметь

$$\tau_1 = \frac{\varkappa\varepsilon_1\theta_0'}{\theta_0^{\varkappa+1}} A(z) - \frac{\theta_0 \exp(-\theta_0^{-\varkappa})}{(\varkappa+1)\theta_0' + \alpha_1\theta_0} [A(z) - 1] \qquad (5.13)$$

$$A(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z [1 - \Phi(z)]} \sim \left[\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(2z)^{2n}}\right]^{-1} \qquad (5.14)$$

$$z = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\theta_0^{\varkappa}\left(\varkappa + 1 + \alpha \frac{\theta_0}{\theta_0'}\right)}}$$

Приводим значения функций $A(z)$, вычисленные для некоторых значений z

$z =$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
$A(z) =$	1.83270	1.65608	1.53250	1.44189	1.37315	1.31948	1.27679
$z =$	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$A(z) =$	1.24199	1.21352	1.18979	1.16976	1.14851	1.13773	1.12527
$z =$	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$A(z) =$	1.11412	1.10450	1.09625	1.08844	1.08202	1.07513	1.07042
$z =$	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0		
$A(z) =$	1.06586	1.06165	1.05763	1.05335	1.05022		

Интегрируя уравнение (5.12) второй раз с учетом условия $\varphi_1(0) = \alpha_1$, получим

$$d - \alpha_1 = \frac{\varepsilon_1\theta_0}{\left(\varkappa + 1 + \alpha\frac{\theta_0}{\theta_0'}\right)\theta_0'}[1 - A(z)] - \frac{\theta_0^{\varkappa+3}\exp(-\theta_0^{-\varkappa})}{\varkappa\left(\varkappa + 1 + \alpha\frac{\theta_0}{\theta_0'}\right)^2\theta_0'^2} \times$$
$$\times\left[1 - A(z) + \frac{1}{2z^2A(z)}\right] \tag{5.15}$$

Из системы уравнений (5.6), (5.7), (5.13) и (5.15) при заданных значениях параметров α_1, ε_1 и θ_0 вычисляются τ_1, θ_0' и d. Так как из предыдущего $d^2/\varepsilon_1 \ll 1$, то $q \gg 1$. Исключая тогда параметр q из (5.6) и (5.7), получим с точностью до величин порядка $d^6/\varepsilon_1^3 \approx 10^{-6} \div 10^{-5}$

$$\frac{\theta_0'}{\Delta\theta} = d\left\{1 - \frac{(d-\alpha_1)^2}{2\varepsilon_1} + 0\left[\left(\frac{d^2}{\varepsilon_1}\right)^3\right]\right\} \tag{5.16}$$

Из трех уравнений (5.13) — (5.16) легко вычисляются в первом приближении τ_1, θ_0' и d как функции параметров α_1, ε_1 и θ_0. Получим зависимость (5.16) несколько другим способом. Заменим в (5.11) функцию φ_1 ломаной

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1\eta \qquad \left(0 \leqslant \eta \leqslant \frac{d-\alpha_1}{\varepsilon_1}\right), \qquad \varphi_1 = d \qquad \left(\frac{d-\alpha_1}{\varepsilon_1} \leqslant \eta < \infty\right)$$

Тогда из (5.11) находим

$$\theta_1(\eta) = \theta_0 + \Delta\theta d\sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon_1}}\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2}}\eta + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\varepsilon_1}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}\right)\right]I\left(0 \leqslant \eta \leqslant \frac{d-\alpha_1}{\varepsilon_1}\right)$$

$$\theta_1(\eta) = \theta_0 + \Delta\theta\left\{d\sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon_1}}\left[\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{2\varepsilon_1}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}\right)\right] + \exp\left(-\frac{d_1^2}{2\varepsilon_1}\right) -\right.$$
$$\left.- \exp\left(-\eta d + \frac{(d-\alpha_1)^2 - \alpha_1^2}{2\varepsilon_1}\right)\right\}I\left(\frac{d-\alpha_1}{\varepsilon_1} \leqslant \eta < \infty\right) \tag{5.17}$$

$$I^{-1} = d\sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon_1}}\left[\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{2\varepsilon_1}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}\right)\right] + \exp\left(-\frac{d_1^2}{2\varepsilon_1}\right)$$

Отсюда

$$\frac{\theta_0'}{\Delta\theta} = dI\exp - \frac{\alpha_1^2}{2\varepsilon_1} = d\left\{1 - \frac{(d-\alpha_1)^2}{2\varepsilon_1} + O\left[\left(\frac{d^2}{\varepsilon_1}\right)^2\right]\right\} \tag{5.18}$$

Из сравнения выражений (5.16) и (5.18) следует, что они совпадают с точностью до величин порядка $d^4/\varepsilon_1^2 \approx 10^{-3}$. Этот факт объясняется тем, что динамический пограничный слой составляет незначительную часть теплового и поэтому точность представления функции φ_1 в выражении (5.11) слабо влияет на определение температурного профиля θ_1.

Второе приближение находится из выражений

$$\varphi_1^{(2)\prime} = \int_0^\eta (C^{(1)} - t)\exp(-\theta_1^{(1)-\varkappa})\,dt + \varepsilon_1^{(2)}, \qquad \varphi_1^{(2)} = \int_0^\eta \varphi_1^{(2)\prime}\,dt + \alpha_1$$

$$\varepsilon_2^{(2)} = -\int_0^\infty (C^{(1)} - t)\exp(-\theta_1^{(1)-\varkappa})\,dt, \qquad C^{(1)} = \tau_1\exp(-\theta_0^{-\varkappa}) \tag{5.19}$$

$$\theta_1^{(2)} = \theta_0 + \Delta\theta G\{\varphi_1^{(2)}\}$$

и т. д. Второе и последующие приближения могут быть вычислены только численно. Доказательство сходимости этого процесса к решению краевой задачи (5.1), (5.2) аналогично доказательству, приведенному в работе [7] для одного уравнения пограничного слоя с градиентом давления. Практически же уже второе приближение (5.19) отличается от первого на 1—2% (табл. $\varkappa = 0$). Расчет примеров показывает, что второе приближение находится всегда между нулевым и первым приближениями, что также следует из общей теории сходимости процесса (5.19). Следовательно, решение конечных уравнений (5.13) — (5.16) отличается от точного решения менее чем на 1—2%.

Приближения	α_1	θ_0	$-\tau_1$	ε_1	$-\theta_0'$	d
Первое	0	0.04	$0.157\cdot10^{-6}$	10^{-5}	$2.36\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$
Второе	0	0.04	$0.157\cdot10^{-6}$	$1.011\cdot10^{-5}$	$2.44\cdot10^{-4}$	$6.21\cdot10^{-4}$
Первое	0	0.0625	$0.2506\cdot10^{-5}$	10^{-4}	$1.666\cdot10^{-4}$	$27.65\cdot10^{-4}$
Второе	0	0.0625	$0.2506\cdot10^{-5}$	$1.012\cdot10^{-4}$	$1.713\cdot10^{-4}$	$28.35\cdot10^{-4}$

Заметим, что при частном значении параметров μ^*, $\varkappa$, $\theta_{-\infty} = 0$ для осесимметричного случая задача об оплавлении стекла была решена на дифференциальном анализаторе в работе [8]. Численные решения приведены для нескольких дискретных значений граничных условий. Полученное в этом параграфе решение (5.13) — (5.16) охватывает всевозможные значения параметров μ^*, $\varkappa$, $\theta_{-\infty}$ (разные материалы) как для плоского, так и для осесимметричного потока.

§ 6. Решение уравнений пограничного слоя. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Решение системы (2.6) с граничными условиями

$$\varphi'(\infty) = \psi(\infty) = g(\infty) = 1, \qquad c_i(\infty) = c_{ie}, \quad \varphi(0) = \alpha, \quad \varphi'(0) = \varepsilon$$
$$\psi(0) = \psi_0, \qquad g(0) = g_0, \qquad c_i(0) = c_{i0} \tag{6.1}$$

с точностью до величин порядка ε^2 будет

$$\varphi(\eta) = \varphi^{(0)}(\eta; G, C_i, \Psi) + \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}\varphi^{(0)\prime}(\eta; g_0, c_{i0}, \psi_0)$$
$$\psi(\eta) = \psi^{(0)}(\eta; G, C_i, \Psi) + \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}\psi^{(0)\prime}(\eta; g_0, c_{i0}, \psi_0)$$
$$g(\eta) = g^{(0)}(\eta; G, C_i, \Psi) + \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}g^{(0)\prime}(\eta; g_0, c_{i0}, \psi_0) \tag{6.2}$$
$$c_i(\eta) = c_i^{(0)}(\eta; G, C_i, \Psi) + \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}c_i^{(0)\prime}(\eta; g_0, c_{i0}, \psi_0)$$
$$\tau^{(0)} = \varphi^{(0)\prime\prime}(0; g_0, c_{i0}, \psi_0)$$

где $\{\varphi^{(0)}, \psi^{(0)}, g^{(0)}, c_i^{(0)}\}$ — решение системы (2.6) с граничными условиями

$$\varphi^{(0)\prime}(\infty) = \psi^{(0)}(\infty) = g^{(0)}(\infty) = 1, \quad c_i^{(0)}(\infty) = c_{ie}, \quad \varphi^{(0)}(0) = \alpha, \quad \varphi^{(0)\prime}(0) = 0$$
$$\psi^{(0)}(0) = \Psi, \qquad g^{(0)}(0) = G, \qquad c_i(0) = C_i \tag{6.3}$$

В условиях (6.3) вспомогательные параметры Ψ, G, C_i должны определяться с точностью до величин порядка ε^2 из уравнений

$$\Psi = \psi_0 - \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}a^{(0)}, \qquad G = g_0 - \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}b^{(0)}, \qquad C_i = c_{i0} - \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}d_i^{(0)} \tag{6.4}$$

где

$$a^{(0)} = \psi^{(0)\prime}(0; g_0, c_{i0}, \psi_0), \qquad b^{(0)} = g^{(0)\prime}(0; g_0, c_{i0}, \psi_0)$$
$$d_i^{(0)} = c_i^{(0)\prime}(0; g_0, c_{i0}, \psi_0) \tag{6.5}$$

Справедливость этой теоремы устанавливается непосредственной проверкой.

Так как для оплавления кристаллических тел $\varepsilon = r_1^{1/2}\varphi_1'(0) \approx 10^{-2}$ и для оплавления стекловидных материалов $\varepsilon = r_1^{1/2}(\sigma_1 n)^{-1/2}\varphi_1'(0) \approx 10^{-3}$, то формулы (6.2) дают решение с точностью до 0.01%. Так как $\psi_0 = r_1^{1/2}\psi_1(0) \approx 10^{-2}$, то из (6.4) следует, что $\Psi \approx \varepsilon$. Этим обстоятельством в дальнейшем воспользуемся. Фактическое решение для нулевого приближения будет зависеть от конкретных физико-химических процессов, происходящих в пограничном слое. Изучим некоторые наиболее типичные случаи разрушения.

§ 7. Разрушение передней кромки при отсутствии диссоциации в пограничном слое. При достаточно низких температурах торможения, когда диссоциацией воздуха и испарением пленки расплава можно пренебречь, краевая задача для нулевого приближения (2.6),(6.3) может быть значительно упрощена. Для этого случая при предположении постоянной теплоемкости газа с использованием уравнения состояния для совершенного газа и уравнения для энергии адиабатического течения для внешнего течения будем иметь

$$\frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e} = \frac{h}{h_e} \equiv g = \frac{1}{t_s}\left[(1-t_0)\,\theta + t_0 - (1-t_s)\,\psi^2\right] \tag{7.1}$$

где

$$t_s = 1 - \frac{1}{2}\frac{w_e^2}{H_{00}} = \frac{c_p T_{00} - {}^1/_2\, w_\infty^2}{c_p T_{00}} = \frac{1 + {}^1/_2(\gamma-1) M_\infty^2 \cos\Lambda}{1 + {}^1/_2(\gamma-1) M_\infty^2}, \qquad \theta = \frac{H - H_0}{H_e - H_0}$$

$$H_e = H_{00}, \qquad H = h + \frac{1}{2}(w^2 + u^2) \approx h + \frac{1}{2}w^2, \qquad T_e \approx T_s, \qquad t_0 = \frac{T_0}{T_{00}}$$

T_s — температура внешнего потока на критической линии цилиндра или в критической точке для тела вращения, T_0 — температура на внешней поверхности пленки расплава, T_{00} — температура торможения в набегающем потоке. Если в систему (2.6) вместо функции g ввести функцию θ и воспользоватся соотношением

$$\frac{w_e^2}{h_e} = \frac{w_e^2}{c_p T_e} \approx \frac{w_e^2}{c_p T_s} = 2\,\frac{1-t_s}{t_s}$$

то получим

$$\begin{aligned} &(l\varphi'')' + n\varphi\varphi'' = \varphi'^2 - \frac{1}{t_s}\left[(1-t_0)\,\theta + t_0 - (1-t_s)\,\psi^2\right] \\ &(l\psi')' + n\varphi\psi' = 0 \\ &(l\theta')' + n\sigma\varphi\theta' = (1-\sigma)\,\frac{1-t_s}{1-t_0}\left[l\,(\psi^2)'\right]' \end{aligned} \tag{7.2}$$

При наличии испарения, если молекулярный вес компоненты пара мало отличается от молекулярного веса набегающего потока, выражение для ρ_e / ρ, даваемое формулой (7.1), будет приближенным. Это приближение будет влиять главным образом на точность определения $\varphi''(0)$ и очень слабо на значение производной $g'(0)$, определяющей скорость оплавления [2]. В силу этих же предположений

$$\left|(L-1)\,\frac{h_1 - h_2}{h_e}\right| \ll 1$$

Так как l слабо зависит от концентрации c, то уравнение диффузии в системе (2.6) может быть решено после решения системы (2.6), которая при $n = 1$ была численно решена в работе [9] при граничных условиях

$$\varphi_1(\infty) = \theta(\infty) = \psi(\infty) = 1, \quad \varphi(0) = \alpha, \quad \varphi'(0) = \theta(0) = \psi(0) = 0 \tag{7.3}$$

Если пренебречь величинами порядка $\varepsilon \approx 10^{-2}$, то условия (7.3) будут совпадать с граничными условиями (6.3) для нулевого приближения. Поэтому в дальнейшем будем считать краевую задачу (2.6), (6.3) решенной. Для осесимметричного случая и при нулевом угле стреловидности в работе [2] приведены аппроксимационные формулы для $\tau^{(0)}$ и $b^{(0)}$ при $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$. При угле стреловидности $\Lambda \neq 0$ результаты расчетов приведены в виде таблиц в работе [9]. Поэтому будем считать в дальнейшем, что $\tau^{(0)}$ и $a^{(0)}$ и $b^{(0)}$ известны как функции параметров: $\Lambda(t_s), \alpha,\ g_0 = t_0$. Тогда из (6.2) будут известны производные

$$\varphi''(0;\, \alpha,\, t_0,\, t_s) = \tau^{(0)} - \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}\left[n\alpha + \left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0 + \frac{\rho_e}{\rho_0 \tau^{(0)}}\right] \tag{7.4}$$

$$g'(0;\, \alpha,\, t_0,\, t_s) = b^{(0)} - \frac{\varepsilon}{\tau^{(0)}}\left[\left(\frac{dl}{d\eta}\right)_0 b^{(0)} + n\sigma\alpha b^{(0)} + \frac{w_e^2}{h_e}\sigma a^{(0)2}\right]$$

$$b^{(0)} = -\frac{1 - t_0}{t_s}\theta'(0)$$

Вычислим еще необходимое для дальнейшего отношение $c_i'(0) / g'(0)$. При $\sigma \approx 1$, т, е. когда правой частью в уравнении энергии (7.2) можно пренебречь, будем иметь [2]

$$\frac{c_i'(0)}{g'(0)} = \frac{c_{ie} - c_{i0}}{1 - t_0} i_s L_0^{-1/3} \tag{7.5}$$

При $-0.3 < \alpha < 0$ и $0 \leqslant g_0 \leqslant 1$ формула (7.5) дает ошибку не больше 2—3%.

Условия сохранения массы, импульса и энергии на фронте испарения (2.10) и на фронте оплавления (2.12) с использованием результатов § 3, 4 и формулы (7.5) дают следующую систему пяти трансцендентных уравнений для определения пяти неизвестных $c_0, t_0, \alpha, \eta_1^*, \varepsilon$:

$$n\alpha = -\frac{c_0}{1 - c_0}\frac{1}{S_0 L_0^{1/3}}\frac{g'(0)}{1 - t_0} t_s$$

$$\varphi''(0) = l_e^{1/2} r_1^{-1/4} n_1^{-1/2} M_1(\theta_0)\, \tau_1(\varepsilon_1, \alpha_1, \eta_1^*)$$

$$-\frac{D_1^*}{r_2} = -n\varphi_1(-\eta_1^*) = \frac{n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{l_e^{1/2}\sigma_0}\frac{h_e g'(0)}{\Delta} E \exp\left(-n\sigma_1 \int_0^{-\eta_1^*} \varphi_1(\eta_1)\, d\eta_1\right) \tag{7.6}$$

$$\theta_0 = 1 - \omega_1(-\eta_1^*, \sigma_1)\frac{\sigma_1 n_1^{1/2} r_1^{3/4}}{c_1^* T_1^* l_e^{1/2}\sigma_0} h_e g'(0) E, \qquad f(c_0, T_0) = 0$$

где

$$\varepsilon = r_1^{1/2}\varepsilon_1, \qquad \alpha = l_e^{1/2} r_1^{-3/4} n_1^{-1/2}\alpha_1, \qquad c_e = 0, \qquad c_f = 1$$

$$E = 1 - \frac{c_0}{1 - c_0}\frac{\delta_0 + (1 - c_0)(h_{20} - h_{10})}{h_e - h_0} L_0^{2/3} t_s, \qquad \delta_0 = h_{10} - h^{(1)}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{P-1}\delta_i + \sum_{i=2}^{P} c_i^* T_i^* [Q_i(t_i) - Q_i(1)]$$

Система (7.6) решается методом последовательных приближений. Действительно, из четвертого уравнения следует $\theta_0 \approx 1$. Тогда из уравнения кривой упругости пара находим c_0 и затем из первого уравнения при $\varepsilon = 0$ определяем α; из второго и третьего находим ε и η_1^*. Затем процесс повторяется.

Из системы (7.6) легко могут быть получены предельные случаи чистого плавления и сублимации аналогично тому, как это сделано в работе [2].

Разрушение стекловидного материала сводится к решению системы четырех уравнений

$$n\alpha = -\frac{c_0}{1-c_0}\frac{1}{S_0L_0^{1/3}}\frac{g'(0)}{1-t_0}t_s$$

$$\varphi''(0) = -l_e^{1/2}r_1^{-1/4}n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{-1/2}\exp\left(\frac{1}{\theta_0^{\varkappa}}\right)\tau_1(\varepsilon_1, \theta_0, \alpha) \tag{7.7}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\frac{h_e}{c_1^*T^*}g'(0)E = -l_e^{1/2}r_1^{-3/4}n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{1/4}\theta_0', \qquad f(c_0, T_0) = 0$$

$$\alpha = -l_e^{1/2}r_1^{-3/4}n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{-3/4}\alpha_1, \qquad \varepsilon = r_1^{1/2}(\sigma_1 n)^{-1/2}\varepsilon_1$$

для определения четырех параметров c_0, θ_0, ε, α. При чистом плавлении ($c_0 = 0$, $\alpha = 0$) система (7.7) сводится к двум уравнениям для двух неизвестных θ_0 и ε

$$\begin{gathered}\varphi''(0) = -l_e^{1/2}r_1^{-1/4}n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{-1/4}\exp\left(\frac{1}{\theta_0^{\varkappa}}\right)\tau_1(\varepsilon_1, \theta_0)\\ \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\frac{h_e g'(0)}{c_1^*T^*} = -l_e^{1/2}r_1^{-3/4}n_1^{-1/2}(\sigma_1 n)^{1/4}\theta_0'\end{gathered} \tag{7.8}$$

Из (5.16) приближенно $\theta_0' = \Delta\theta\, d$ (ошибка порядка 10—20%). Используя эту формулу из второго уравнения системы (7.7) и (2.9), получим приближенную формулу для скорости оплавления стекловидной кромки в виде

$$D = r_1 n_1^{1/2}\frac{\sqrt{\beta\nu_1}}{\sigma_0\Delta\theta\, l_e^{1/2}}\frac{h_e}{c_1^*T^*}g'(0) \tag{7.9}$$

где температура на контактной поверхности разрыва θ_0 должна находиться из системы (7.8). Для критической точки с использованием результатов работы [2] будем иметь

$$D = 0.765\, r_1 n^{1/2}\frac{\sqrt{\beta\nu_1}}{\Delta\theta\sigma_0^{0,4}l_e^{0,1}}\frac{h_e - h_0}{c_1^*T^*}$$

Поступила 14 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Столдер Д. Проблемы теплопередачи при гиперзвуковых полетах. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. М., ИИЛ, 1959.
2. Тирский Г. А. Оплавление тела в окрестности критической точки и линии в диссоциированном потоке воздуха с испарением пленки расплава. ПМТФ, 1961, т. 2, № 5.
3. Мур Ф. Теория трехмерного пограничного слоя. Проблемы механики. М., ИИЛ, 1959, вып. 2.
4. Тирский Г. А. Условия на поверхностях сильного разрыва в многокомпонентных смесях. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
5. Тирский Г. А. Оплавление тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке газа. Вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3.
6. Бете и Адамс М. Теория абляции стекловидных материалов. Вопр. ракетн. техн., 1960, № 2.
7. Weyl H. On the differential equations of the simplest boundary — layer problems. Annals of Mathematics, 1942, vol. 43, No. 2.
8. Саттон. Гидродинамика и теплообмен оплавляющейся поверхности. Вопр. ракетн. техн., 1958, № 5.
9. Beckwith, I. Similar solutions for the compressible boundary layer on a yawed cylinder with transpiration cooling. NACA TN4345, 1958.