

УДК 532.5

## Различие в перемещении винтового вихря и движении частиц вдоль его оси\*

В.Л. Окулов<sup>1</sup>, Е.С. Гешева<sup>2</sup>, П.А. Куйбин<sup>1</sup>, С.И. Шторк<sup>1</sup>, Й.Н. Соренсен<sup>1,3</sup>,  
Д. Вуд<sup>1,4</sup>, С.В. Алексеенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Датский технический университет, Люнгбю, Дания

<sup>4</sup>Инженерная школа Шулиха, Университет Калгари, Канада

E-mail: vokulov@mail.ru

Анализируются особенности описания движений винтового вихря и частиц вдоль его оси. Совпадение винтовой формы вихревой оси с винтообразной траекторией движения частиц вдоль нее приводит иногда к ложному отождествлению этих двух различных перемещений при их описании. Действительно, ошибочное отождествление абсолютной скорости движения жидких частиц с собственным перемещением вихря делает неверными оценки скоростей, индуцируемых концевыми винтовыми вихрями в следах за роторами, или перемещений ядра винтообразного торнадо и пр. С другой стороны, полное совпадение геометрической формы оси винтового вихря с траекторией движения находящихся на ней частиц порождает это заблуждение, ошибочно отождествляющее эти два разных перемещения. Очевидно, что бесспорным доказательством может стать только эксперимент, разделяющий наглядно эти два движения. С этой целью авторы экспериментально рассматривают случай неподвижного винтового вихря, вдоль оси которого интенсивно движутся жидкие частицы. Полученный результат показывает, что абсолютная скорость жидких частиц не совпадает с движением вихря в целом.

**Ключевые слова:** вихревая динамика, винтовой вихрь.

### Введение

Развитие теории винтовых вихрей имеет долгую историю, которая восходит к знаменитой работе лорда Кельвина 1880 года о спиральных возмущениях колоннообразного вихря, где впервые рассматривался винтовой вихрь большого шага [1]. Винтовые вихри представляют собой одно из основных состояний закрученных потоков, поэтому имеют фундаментальное значение для механики жидкости. Примеры вихревых структур

---

\* Работа, включая измерения полей скоростей и теоретический анализ, выполнена при государственной поддержке научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (соглашение № 075-15-2019-1923). В части проведения визуальных исследований работа выполнена в рамках государственного задания ИТ СО РАН (АААА-А17-117030910025-7).

с винтовой формой хорошо известны — это винтовые вихри в следах за роторами, концентрированные вихри в вихревых топках и горелках, смерчи, водовороты в жидкостях и т.д. Необходимо правильно предсказывать динамику таких структур, так как вихревое движение способствует интенсификации теплообмена и влияет на производительность роторных машин. В свою очередь стационарное, неподвижное их положение обеспечивает стабильные операционные режимы в вихревых устройствах. В настоящее время возник дополнительный интерес, связанный с изучением взаимодействия винтовых вихрей в следах за турбинами, расположенными в цепочках друг за другом в ветро- и гидрофермах [2, 3]. Как видно, проблема определения движения винтовых вихрей занимает важное место как в механике жидкостей, так и в аэродинамике и их приложениях, поэтому ее решением занимались многие гидромеханики (см., например, работы [4–8] и ссылки в них на оригинальные исследования). К тому же изучение движения винтовых вихрей, являющихся частным случаем трехмерных концентрированных вихревых нитей, представляет интерес с точки зрения определения фундаментальных закономерностей их динамики.

Вывод уравнения движения трехмерной вихревой нити сегодня ассоциируется с работой Да Риоса [9], но, как недавно установили авторы [10], уравнения движения в частном случае винтового вихря были также независимо получены Жуковским [4]. Результатом обоих исследований стало заключение о перемещении трехмерных вихревых нитей, включая винтовые, только в бинормальном направлении, при этом тангенциальное движение частиц вдоль оси вихря не изменяет их положения в пространстве. Впоследствии вывод уравнений динамики трехмерных вихревых нитей повторили многие авторы, а в окончательном виде доказательство было представлено в книге Бэтчелора [11] (стр. 627). Однако спустя 50 лет после выхода этого фундаментального учебника появились две спорные работы [12, 13] о движении винтовых вихрей. В них отрицается традиционное описание движения вихрей [4–11], которое было также еще раз детально аргументировано построением разных многоугольников скоростей для движения винтового вихря и частиц вдоль его оси в плоской развертке на рис. 1 в работе [14]. В статье [12] безосновательно, как считают авторы настоящей работы, заявляется, что «Скорость винтового вихря представлена как сумма окружной и осевой или тангенциальной и бинормальной компонент (The velocity of a helical vortex represented as the sum of either the azimuthal and axial components or the tangential and binormal components)». Далее в [12] при выводе уравнений движения винтового вихря (2.8) и (2.9) используются обе компоненты абсолютного движения и не пренебрегается, как это было указано в [4], тангенциальным перемещением частиц, не вносящем изменения в пространственное положение вихря. В статье [13], посвященной движению нескольких винтовых вихрей с осями, расположенными на цилиндре, и равноудаленными друг от друга, не содержится новых представлений, т.к. для оценки вклада дополнительных вихрей в движение расчетного вихря используется известная формула из [8]. Соответственно, статья [13] не вызывает новых критических замечаний в дополнение к отмеченному выше, кроме того, что в ней для описания движения вихря используется ошибочная формула из [12], ассоциированная со скоростью абсолютного перемещения частиц, а не бинормального перемещения вихря. В настоящей работе для наглядного представления различия этих двух движений оно экспериментально определено путем разделения движений в частном случае, когда вихрь неподвижен, а частицы вдоль его оси сохраняют интенсивное движение.

### **Экспериментальная проверка отличия движения вихря от движения частиц**

Путаница в вопросе об определении скорости перемещения трехмерной структуры, как можно видеть на примере работ [12, 13], связана с тем, что оба движения — абсолютное перемещение частиц вдоль оси и бинормальное перемещение самой оси — фиксируют одно и то же новое положение оси вихря в пространстве (см. рис. 1 в работе [14]).

Бинормальное смещение определяет кратчайшее расстояние до нового положения оси, а абсолютное перемещение дает новое положение жидкой частицы на смещенной оси. Оба движения совпадают только в плоском случае, когда перемещение вихря совпадает с движением центральной жидкой частицы. Однако в трехмерном случае жидкие частицы могут свободно двигаться вдоль оси вихря и не оказывать влияния на изменение его положения и формы. Это внутреннее перемещение частиц, не меняющее форму структуры, необходимо исключить, иначе можно сделать неправильное заключение о движении самой структуры. Наглядно это удастся продемонстрировать в предельном случае, когда трехмерный вихрь неподвижен (рис. 1). Такие режимы для винтовых вихрей были визуализированы в гидравлической модели вихревой камеры сгорания (рис. 1а), детали конструкции которой можно найти в работах [15, 16]. В вихревой камере наблюдался стационарный винтовой вихрь с интенсивным движением жидких частиц вдоль его неподвижной оси. В этом случае абсолютная скорость движения направлена вдоль оси вихря, а смещения оси в пространстве не происходит, т.е. компонента скорости в бинормальном направлении отсутствует (рис. 1б). В силу того, что любой искривленный вихрь должен перемещаться за счет самоиндуцированной скорости, возможность существования неподвижных винтовых вихрей объясняется наличием дополнительной скорости, которая индуцируется стенкой вихревой камеры и компенсирует самоиндуцированное движение (рис. 1с). Одновременно данная развертка винтового вихря в плоскости  $(z, \theta)$  демонстрирует, что возможное смещение оси винтового вихря однозначно определяется бинормальным направлением.

Далее следует экспериментально установить, что в неподвижном винтовом вихре (рис. 1а) существует интенсивное движение вихревых частиц вдоль его оси, т.е. их абсолютная скорость не может отождествляться с перемещением самой структуры. С этой

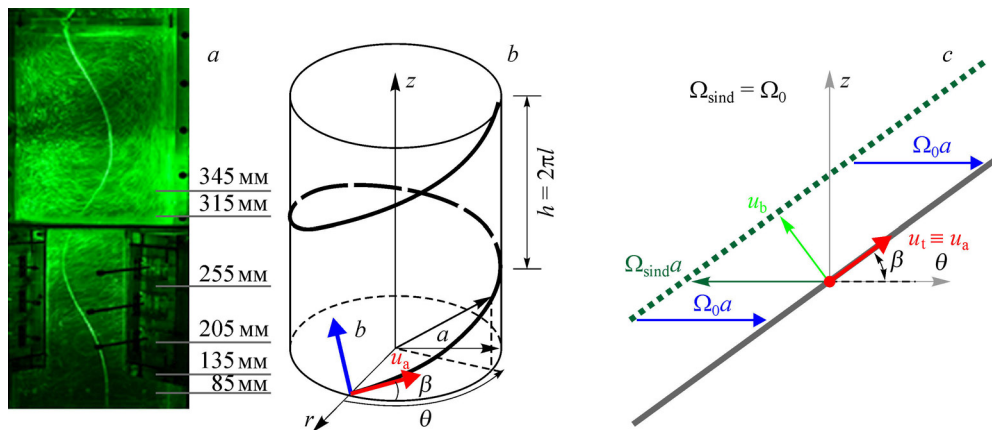


Рис. 1. Визуализация неподвижного винтового вихря [15, 16] (а), схема абсолютного движения частиц вдоль оси вихря (жирная линия), не нарушающих неподвижность вихря (б) и цилиндрическая развертка винтового вихря с воображаемым его положением (пунктирная линия), приобретенным за счет самоиндуцированного смещения  $\Omega_{\text{сind}} a$ , которое имело бы место в безграничном пространстве, и возвратом в неподвижное положение (сплошная линия) за счет компенсирующей скорости  $\Omega_0 a$ , наведенной стенками установки (с).

$a$  — радиус винтового вихря,  $h = 2\pi l$  — шаг винта,  $\beta$  — угол наклона винтовой линии относительно горизонтальной плоскости,  $(r, \theta, z)$  — цилиндрические координаты;  
 $u_b$  — самоиндуцированная скорость (направлена по бинормали);  
 $u_a$  — абсолютная скорость перемещения жидкой частицы, совпадающая для неподвижного вихря с тангенциальной компонентой  $u_t$ .

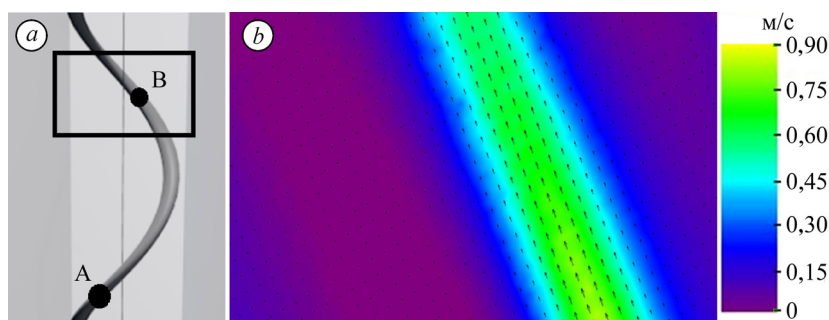


Рис. 2. Векторное поле скорости в вертикальном сечении, проходящем через ось вихря. *a* — область измерений и референтные точки на оси вихря; *b* — векторы абсолютной скорости и их величины, выделенные цветом (видно, что направление скорости частиц совпадает с осью вихря).

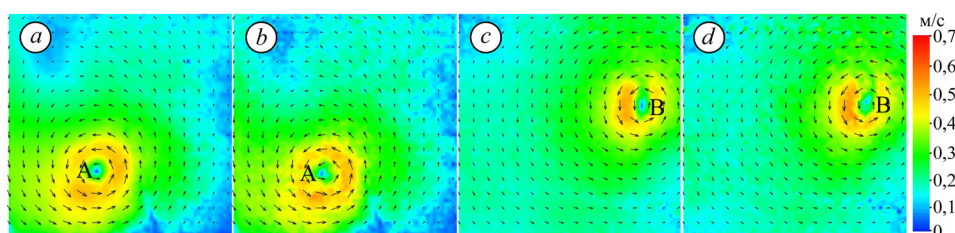


Рис. 3. Поле скорости (цветовая градация) в разные моменты времени в двух разных горизонтальных сечениях. *A* (*a*, *b*) и *B* (*c*, *d*) — точки на оси вихря, которые остаются неподвижными в рамках ошибки измерений (см. рис. 2).

целью в дополнение к визуальным наблюдениям [15, 16] авторами были выполнены экспериментальные измерения полей скорости с использованием стандартной PIV-техники, параметры которой приведены в работе [17]. Измерения полей скорости проводились в нескольких вертикальных сечениях, в том числе пересекающих ось вихря. Было определено, что скорость жидких частиц в этих точках (рис. 2*b*) совпадает только с тангенциальным направлением вдоль оси вихря (рис. 2*a*), угол которого с горизонтальной плоскостью соответствовал шагу винта, определенному по визуальным наблюдениям. Дополнительно проводились измерения в нескольких горизонтальных сечениях, пересекающих ось в точках *A* и *B*, как показано на рис. 2*a*, для подтверждения неподвижности винтового вихря. Положение оси вихря во всех сечениях здесь было неизменным в любые моменты времени, в том числе и в тестируемых точках *A* и *B*. Это следует также из рис. 3, где изображены точки пересечения оси вихря горизонтальной плоскостью в тестируемых точках *A* и *B* (рис. 2*a*) в разные произвольные моменты времени.

Анализируя данные рис. 2 и 3, можно заключить, что интенсивное движение жидких частиц вдоль оси вихря с абсолютной скоростью существует только в тангенциальном направлении при отсутствии ее в других направлениях, в том числе бинормальном. Таким образом, неподвижность винтового вихря (рис. 1*a*) объясняется отсутствием бинормальной скорости в полном соответствии с динамикой движения трехмерных вихревых нитей [11]. Это означает, что абсолютное движение частиц вихря не может указывать на собственное его движение, за перемещение которого отвечает не полная абсолютная скорость, а лишь скорость вдоль бинормального направления, а тангенциальная составляющая для этого описания должна быть удалена, как указывают авторы работ [4–11, 14]. Приведенное в исследовании [12] видео в качестве доказательства необходимости рассмотрения абсолютной скорости для описания движения винтовых вихрей содержит только движение частиц жидкости, для которых абсолютное винтовое движение вдоль оси вихря

естественно, но это никак не может быть доказательством движения самого вихря. Недостаток работ [12, 13] заключается в том, что движение частиц в них ассоциировано с движением трехмерных вихревых нитей, что приводит к неправильной оценке скорости движения нитей (рис. 1с), в частности, авторы оставляют без объяснений приведенный выше случай неподвижного винтового вихря с интенсивным абсолютным движением вихревых частиц вдоль его оси. Эксперимент, проведенный в настоящей работе, доказывает, что главное предположение в [12, 13], выраженное в отождествлении движения винтовых вихрей с перемещением частиц жидкости вдоль их оси, ошибочно.

### **О возможности аппроксимации скорости движения винтового вихря через поле скоростей, индуцированное бесконечно тонкой нитью**

Следующий важный вопрос связан с возможностью аппроксимационного описания скорости движения винтовых вихрей. Может показаться, что в работах [12, 13] был предложен новый алгоритм определения аксиальной и азимутальной скоростей на оси вихря конечного сечения с помощью полусуммы скоростей, индуцированных бесконечно тонкой вихревой нитью в диаметрально противоположных точках на поверхности вихря (уравнения 2.8 и 2.9 из [12]). При оценке новизны данного «предложения» следует учесть, что это представление через полусумму скоростей хорошо известно и было исследовано ранее для бинормальной компоненты скорости (см, например, [6–8]). В цитируемых работах использовались аксиальная и азимутальная компоненты и их полусуммы, но только для расчета регулярного остатка  $C_H$  в асимптотическом разложении бинормальной компоненты скорости в окрестности бесконечно тонкой вихревой нити (см, например, раздел 4.1 в [6]). Что касается скорости перемещения вихря, то в указанных работах она находилась после сопоставления асимптотического представления для индуцированной бинормальной скорости на расстоянии  $\varepsilon$  от нити с формулой для самоиндуцированной скорости вихря с радиусом ядра  $\varepsilon$ , предложенной в исследовании [5]. Таким образом, все отличие «предложенного» подхода [12, 13] от изложенного в [6–8], по сути заключается в том, что в первом случае сначала рассчитывается полусумма аксиальной и азимутальной скоростей, а потом подсчитывается, например, бинормальная, а во втором — сначала находятся значения бинормальной скорости по аксиальной и азимутальной, а потом рассчитывается ее полусумма. Эта очевидная тавтология, естественно, дает полное совпадение скоростей решения (2.17) в [12] с решением [7] с константой  $C_H$  для бесконечно тонкой вихревой винтовой нити. Следует отметить, что «решение» из [12] для каждой компоненты было записано через уже найденное в [7] интегральное представление рядов Каптейна с выделением сингулярности и представления регулярного остатка интегральным слагаемым, эквивалентность которых была доказана точно аналитически. В дальнейшем выделение сингулярностей в рядах Каптейна было найдено также и в аналитической форме [18, 19]. Кроме того, в работе [20] была аналитически доказана эквивалентность между представлениями решения через интеграл Био–Савара и ряды Каптейна. Поэтому, если даже в [12] тавтология выведена вследствие заблуждения, то проведенного сравнения с точным решением для  $C_H$  из [7] вполне хватает для ее проверки. Однако в работе [12] сделан следующий непонятный шаг, именно: подтверждение «решения» численно. Несмотря на точное сопоставление полученных результатов с данными [7] для полусуммы скоростей, индуцируемых бесконечно тонкой нитью (случай с  $C_H$ ), в [12] проводится его численное тестирование с применением нескольких численных приближений. При этом использовано интегральное уравнение Гельмгольца с дискретизацией конечного ядра сотней бесконечно тонких нитей, аппроксимлируемых конечными отрезками из ломанных кривых, приближение для закона Био–Савара, сделанное Розенхедом–Муром для вихревого кольца (см., например, [21])

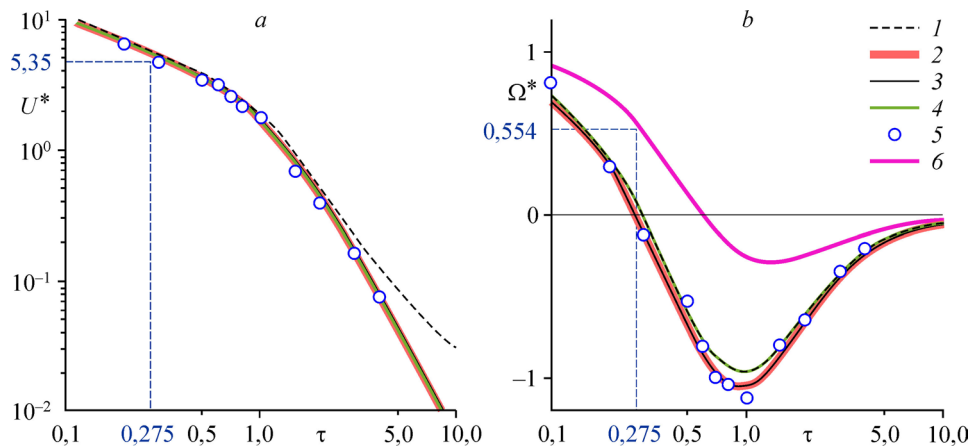


Рис. 4. Графики осевого (а) и углового (б) смещений жидкой частицы вдоль оси винтового вихря с конечным ядром радиуса 0,1 в зависимости от безразмерного шага  $\tau = l/a$ .

Безразмерные величины  $U^*$  и  $\Omega^*$  относятся к координатам абсолютной скорости и введены через отношения  $\Gamma/4\pi a$  для поступательной скорости и через  $\Gamma/4\pi a^2$  для угловой скорости;

1 — расчет в абсолютной системе координат по формулам из работы [8],

2–5 воспроизведены из работы [12] 2 — расчет по полусумме на расстоянии 0,1 от сингулярной нити;

3 — расчет дискретизацией вихря с конечным ядром сингулярными нитями,

4 — расчет по приближенной формуле Розенхеда–Мура, 5 — численное решение уравнений Эйлера);

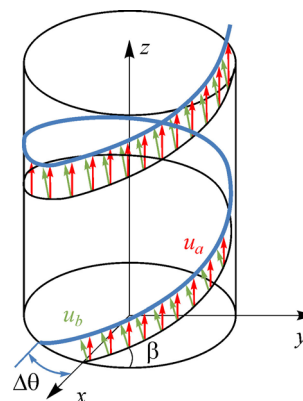
6 — расчет в подвижной системе координат из работы [8].

и зависящее от подгоняемой поправки для учета конечного размера вихревого ядра, и непосредственно численный расчет уравнений Эйлера. Все расчеты показали разную степень небольшого отличия от тестируемого решения (рис. 4). Полученные отличия не объясняются, и не приводятся результаты влияния способа дискретизации ядра, выбора подгоняемого параметра или сетки в проведенных расчетах. На основе сопоставлений, выполненных после проведения оценки значений скорости в двух диаметрально противоположных точках на границе ядра, и вычисления их полусуммы, делается заключение о возможности расчета скорости движения вихря для случая равномерного распределения завихренности в вихревом ядре. При этом утверждается, что тем самым находится «актуальная скорость жидкой частицы, расположенной на оси, т.е. скорость вихря (actual velocity of the fluid particles lying on the centreline, i.e. the velocity of the vortex)». Но и этот вывод, хотя и в существенно меньшей степени, чем первый, также далек от действительности. В работе [12] так и не удалось установить отличие между решениями для самоиндуцированной скорости винтового вихря с конечным ядром и рассмотренной аппроксимацией этого решения полусуммой скоростей, индуцируемых сингулярной винтовой нитью на конечных расстояниях от нее, равных радиусу ядра. Однако различие двух решений, хоть и не очень значительное, существует. Ранее оно было установлено численно в работе [6], было найдено, что это различие соответствует разнице на 1/4 в терминах регулярных остатков  $C_H$  и  $C_{MS}$ , введенных аналогично для обоих решений после нормализации и выделения слагаемых, соответствующих полюсу и логарифму в сингулярном решении. Получается, что спустя 24 года расчеты в работе [12] сделаны с большей погрешностью, чем в [6].

### Инвариантность движений в инерционных системах отсчета

В заключение покажем эквивалентность движения винтовых вихрей в разных инерционных системах координат, в частности для обоснования универсальности приведенных выше выводов по экспериментальной проверке различия исследуемых движений.

Рис. 5. Эскиз смещения винтового вихря при наличии только осевого движения (вдоль оси камеры) частиц жидкости со скоростью  $u_a$ .



Сделаем это на примере сопоставления двух кривых, приведенных на правом фрагменте рисунка 5 в работе [12] (красная и зеленая линии указанного рисунка соответствуют красной и розовой линиям на рис. 4*b* настоящей работы), различие которых якобы указывает на ошибку, допущенную в [8]. Но как раз это сопоставление является грубейшей ошибкой работы [12], т. к. кривые были получены в разных системах координат. В [12] рассматривается винтовой вихрь в неподвижной системе, а в [8] на стр. 328 и 335 указывается, что система, состоящая из  $N$  винтовых вихрей одинаковой интенсивности  $\Gamma$ , движется поступательно с фиксированной скоростью  $\Gamma N/h$ . Выбор подвижной системы координат в работе [8] был связан с обеспечением неподвижной оси в центре вихревого мультиплета для обеспечения адекватного сравнения с задачей Кельвина по неустойчивости многоугольника из точечных вихрей, где в центре многоугольника находилась неподвижная точка. Интересно провести сопоставление красной и розовых кривых, но при переходе к единой координатной системе. Полное сопоставление кривых затруднено, так как предлагаемое в [12] представление движения через скорость абсолютного движения частиц вдоль оси не фиксирует непосредственно новое положение вихря в отличие от классического рассмотрения по бинормальной скорости через общий угол спирали  $\beta$ . Поэтому проведем коррекцию скоростей в точке, где угол абсолютной скорости частиц известен, т.е. когда частицы перемещаются строго в осевом направлении (рис. 5), что соответствует нулю кривой 2 на рис. 4*b*.

Ноль красной кривой на фрагменте рисунка 5 из [12] и на рис. 4*b* настоящей работы соответствует  $\tau_0 \approx 0,275$ , следовательно, значение соответствующей абсолютной скорости в этой точке составляет  $u_a(\tau_0) = U^*(\tau_0) \approx 5,35$  (см. рис. 4*a*). Угловая скорость из [8] (кривая *b* на рис. 4*b*) имеет ненулевое значение  $\Omega_{\text{ок}}^*(\tau_0) \approx 0,554$  при  $\tau_0 = 0,275$ . Система координат для одиночного вихря из [8] (с. 328, 335) движется поступательно с фиксированной скоростью  $\Gamma/(2\pi R \tau_0)$ , что соответствует безразмерной величине  $2/\tau_0$ .

Если учесть движение системы координат в формуле из [8], то для осевой скорости получим формулу

$$U_{\text{ок}} = [\Gamma/(2\pi a) - a \Omega_{\text{ок}}(\tau_0)]/\tau_0.$$

Отсюда безразмерное значение  $U_{\text{ок}}^* \approx (2 - 0,554) / 0,275 = 5,258$ , что достаточно точно соответствует скорости аксиального движения частиц жидкости из [12], равной 5,35. Небольшое различие объясняется тем, что в [12] пренебрегается интегрированием вдоль сечения вихря для коррекции решения от бесконечно тонкой винтовой вихревой нити. На деле эта добавочная коррекция согласно разнице между  $C_H$  и  $C_{MS}$  и их нормировке с помощью решения треугольников рис. 1*c* дает  $0,25\tau_0/(1 + \tau_0^2)^{3/2} = 0,25 \cdot 0,275/(1 + 0,075625)^{3/2} \approx 0,062$ . После суммирования получим  $5,258 + 0,062 = 5,32$ , что практически полностью в рамках ошибок округлений при вычислениях совпадает с  $U^*(\tau_0) = 5,35$ .

Таким образом, анонсированное в публикациях [12, 13] заключение об ошибке в работе [8] является грубым промахом, допущенным при сравнении величин, определенных в разных системах координат. Переход к сопоставлению в одинаковой системе демонстрирует их совпадение. Этот факт можно рассмотреть как подтверждение универсального, не зависящего от выбора инерционной системы координат, характера различия движений вихря и частиц, установленного в описанном выше эксперименте.

### Заключение

Проведенное экспериментальное исследование демонстрирует различие в перемещениях винтового вихря в пространстве и жидких частиц,двигающихся вдоль его оси. Это различие было сформулировано в начале прошлого века [4] и успешно использовалось при построении вихревой теории ротора [4, 10]. Разделить два движения в нестационарном случае оказывается достаточно сложно, т.к. оба визуализируют одну и ту же винтовую ось вихря. Убедительно показать разницу этих движений оказалось возможным в предельном случае, когда в эксперименте движение вихря удалось остановить, при этом жидкие частицы продолжали интенсивное движение вдоль неподвижной вихревой оси. Необходимость проведения данного исследования была обоснована неправомерным отождествлением двух разных движений в недавних публикациях [12, 13].

### Список литературы

1. Kelvin L. Vibrations of a columnar vortex // *Philos. Mag.* 1880. Vol. 10. P. 155–168.
2. Nygaard N.G. Wakes in very large wind farms and the effect of neighbouring wind farms // *Journal of Physics: Conference Series.* 2014. Vol. 524. P. 012162-1–012162-10.
3. Okulov V.L., Kabardin I.K., Litvinov I.V., Mikkelsen R.F., Naumov I.V., Sørensen J.N., Wood D.H., Alekseenko S.V. Hydrokinetic energy conversion: the basis of hydro farm technology // In *Abs. 5th International Workshop on Heat/Mass Transfer Advances for Energy Conservation and Pollution Control August 13–16, Novosibirsk, Russia 2019.* P. 134.
4. Жуковский Н.Е. Вихревая теория гребного винта I // *Тр. Отделения физических наук Общества любителей естествознания.* 1912. Т. 16, вып. 14. С. 1–31.
5. Moore D.W., Saffman P.G. The motion of a vortex filament with axial flow // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1972. Vol. 272. С. 403–429.
6. Ricca R.L. The effect of torsion on the motion of a helical vortex filament // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 273. P. 241–259.
7. Boersma J., Wood D.H. On the self-induced motion of a helical vortex // *J. Fluid Mech.* 1999. Vol. 384. P. 263–280.
8. Okulov V.L. On the stability of multiple helical vortices // *J. Fluid Mech.* 2004. Vol. 521. P. 319–342.
9. Da Rios L.S. Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* 1906. Vol. 22. P. 117–137.
10. Okulov V.L., Sørensen J.N., Wood D.H. The rotor theories by professor Joukowski: vortex theories // *Progress in Aerospace Sci.* 2015. Vol. 73. P. 19–46.
11. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
12. Fuentes O.V. Motion of a helical vortex // *J. Fluid Mech.* 2018. Vol. 836, R1. 11 p.
13. Fuentes O.V. Flow topology of helical vortices // *J. Fluid Mech.* 2018. Vol. 842, R2. 11 p.
14. Okulov V.L., Sørensen J.N. The self-induced motion of a helical vortex // *J. Fluid Mech.* 2020. Vol. 883. A-5.
15. Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L., Shtork S.I. Helical vortices in swirl flow // *J. Fluid Mech.* 1999. Vol. 382. P. 195–243.
16. Гешева Е.С., Литвинов И.В., Шторк С.И., Алексеенко С.В. Анализ аэродинамической структуры закрученного течения в моделях вихревых горелочных устройств // *Теплоэнергетика.* 2014. № 9. С. 33–41.
17. Гешева Е.С., Шторк С.И., Алексеенко С.В. Исследование характеристик концентрированного вихря в тангенциальной камере с помощью PIV техники и компьютерного моделирования // *Вестник НГУ. Серия: Физика.* 2014. Т. 9, вып. 3. С. 39–48.
18. Okulov V.L. The velocity field induced by vortex filaments with cylindrical and conic supporting surface // *Russian J. Eng. Thermophys.* 1995. Vol. 5. P. 63–75.
19. Kuibin P.A., Okulov V.L. Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of a helical vortex filament // *Phys. Fluids.* 1998. Vol. 10. P. 607–614.
20. Hardin J.C. The velocity field induced by a helical vortex filament // *Phys. Fluids.* 1982. Vol. 25. P. 1949–1952.
21. Saffman P. G. *Vortex dynamics.* Cambridge University Press, 1995. 311 p.

*Статья поступила в редакцию 3 февраля 2020 г.,  
после доработки — 9 февраля 2020 г.,  
принята к публикации 10 февраля 2020 г.*