К РАСЧЕТУ КОНТАКТНЫХ ТЕМПЕРАТУР, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ВРАЩЕНИИ ВАЛА В ПОДШИПНИКЕ

В. А. Бабешко, И. И. Ворович

(Ростов-на-Дону)

В работе [1] рассмотрена задача о распределении контактных напряжений при взаимодействии шипа и подшипника. В данной работе рассматривается задача о распределении температуры, возникающей в области соприкосновения вращающегося цилиндрического вала и подшипника. Режим предполагается установившимся.

Задача сводится к интегральному уравнению относительно контактной температуры на поверхности вала.

Предложен приближенный прием решения интегрального уравнения, который позволил дать простую приближенную формулу контактной температуры для некоторого диапазона изменения параметров задачи.

1. Бесконечный вал, находящийся в контакте с подшипником [1], равномерно вращается с угловой скоростью ω. Предполагается, что область контакта вала с подшипником — цилиндрический прямоугольник $|z| \leqslant L/2$, $|\theta| \leqslant \theta_0$.

Если $q(\theta, z)$ — нормальные контактные напряжения, f — коэффициент трения, R — радиус вала, c — тепловой эквивалент механической работы, тогда количество тепла, поглощаемое валом, определяется выражением [2]

$$Q = c\alpha\omega f R q(\theta, z)$$

Здесь α — коэффициент разделения тепла между валом и подшипником. Этот коэффициент, строго говоря, будет некоторой функцией точки контакта (z, θ). Будем считать его постоянным.

2. В соответствии с физической картиной граничное условие в области контакта имеет вид (задан поток тепла через контактную поверхность)

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{c\alpha\omega}{K} fRq(\theta, z), \qquad r = R, \qquad |\theta| \leqslant \theta_0, \qquad |z| \leqslant L/2 \tag{1}$$

Здесь T — температура вала, K — коэффициент теплопроводности вала.

Будем считать, что в области $|\theta| \geqslant \theta_0$, $|z| \leqslant L/2$ тепловой поток отсутствует

$$\partial T / \partial r = 0, \qquad r = R \tag{2}$$

На части границы $|z| > L/2$ предполагается теплообмен с окружающей средой

$$\gamma \partial T / \partial r + T = 0, \qquad \gamma = K / H \tag{3}$$

Здесь H — коэффициент теплоотдачи вала.

Температура T определяется из уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{4}$$

где $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности.

3. Тепловой режим считается установившимся. Введем безразмерные параметры ρ, l, ξ и осредненную температуру

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T d\theta, \qquad \rho = \frac{r}{R}, \qquad l = \frac{L}{R}, \qquad \zeta = \frac{z}{R} \tag{5}$$

В результате придем к следующей смешанной краевой задаче относительно функции $u = u(\xi)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \lambda u = 0, \quad |\zeta| > \frac{l}{2}, \quad \rho = 1; \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \alpha M(\zeta), \quad |\zeta| \leqslant \frac{L}{2}, \quad \rho = 1 \tag{7}$$

$$M(\zeta) = \frac{c\omega f R^2}{K 2\pi}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} q(\theta, \zeta)\, d\theta \tag{8}$$

Преобразованием Фурье краевая задача (6), (7) приводится к уравнению

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi = 2\pi\alpha M(x) \qquad |x| \leqslant a, \qquad a = l/2 \tag{9}$$

$$k(t) = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\eta I_1(\eta)\cos \eta t d\eta}{\eta I_1(\eta) + \lambda I_0(\eta)}, \qquad u(x)|_{\zeta=1} = \lambda^{-1}[g(x) - \alpha M], \qquad \lambda = \frac{RH}{K} \tag{10}$$

Точное решение уравнения (9) построить не удается. Однако свойства его решения детально исследованы асимптотическими методами [3]. Именно, если правая часть уравнения (9) — функция ограниченная, то и его решение ограничено.

4. Вместо уравнения (9) с ядром (10) будем решать некоторое приближенное уравнение, полученное в результате замены точного ядра аппроксимирующим.

Используем следующую приближенную формулу:

$$\frac{\eta I_1(\eta)}{\eta I_1(\eta) + \lambda I_0(\eta)} \approx \frac{\eta^2(\eta^2 + c_2)}{\eta^4 + (c_1 + \lambda c_3)\eta^2 + \lambda c_2} = N(\eta), \qquad \eta \geqslant 0 \tag{11}$$

$$c_1 = 38.37, \quad c_2 = 76.74, \quad c_3 = 11.45$$

Относительная погрешность этой аппроксимации не превышает 3% для всех значений параметра $\eta > 0$ и значений $0 < \lambda \leqslant 0.3$. (Если учесть, что в случае металлических валов $H / K \sim 0.1 \div 0.4$ ($м^{-1}$), то ясно, что этот диапазон изменения λ охватывает наиболее важную в практике область изменения их радиусов.)

Таким образом задача приведена к решению интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a} k^*(x-\xi)\, g^*(\xi)\, d\xi = 2\pi\alpha M(x), \qquad |x| \leqslant a, \qquad k^*(t) = 2\int_{0}^{\infty} N(\eta)\cos \eta t\, d\eta \tag{12}$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае относительная погрешность решений уравнений (9) и (12) имеет порядок погрешности аппроксимации (11).

Уравнение (12) исследовалось в работе И. Б. Симоненко [4]. Здесь ниже его решение строится более простым способом, основанным на методе работы [3].

Используя результаты работы [1], будем считать, что правая часть уравнения (12) не зависит от x. Тогда его единственное решение представимо в форме

$$g^*(x) = M\alpha\,[A_1 + 2A_2 e^{-a\sqrt{c_1}} \operatorname{ch} a\sqrt{c_1}\, x + A_3(a^2 + x^2)] \tag{13}$$

Здесь A_k — неизвестные коэффициенты, не зависящие от x. Они определяются из алгебраической системы уравнений

$$-\frac{2\pi c_1}{\lambda c_2} A_3 = 2\pi, \qquad \sigma_k A_1 + \tau_k A_2 = \delta_k, \qquad \delta_k = -\frac{\lambda c_2 M}{c_1}\left(\frac{5}{\zeta_k^3} + \frac{4a}{\zeta_k^2} + \frac{4a^2}{\zeta_k}\right), \; k = 1, 2$$

$$\sigma_k = -\frac{1}{\zeta_k}, \qquad \tau_k = \frac{1}{\sqrt{c_1} - \zeta_k} - \frac{e^{-2a\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1} + \zeta_k} \tag{14}$$

Здесь $i\zeta_1$, $i\zeta_2$ — нули полинома $t^4 + (c_1 + \lambda c_3)t^2 + \lambda c_2$, лежащие в верхней полуплоскости

$$\zeta_{1,2} = \left[\frac{c_1 + \lambda c_3}{2} \pm \left(\frac{(c_1 + \lambda c_3)^2}{4} - \lambda c_3\right)^{1/2}\right]^{1/2} \tag{15}$$

Из (14) находим

$$A_1 = \frac{\delta_1\tau_2 - \delta_2\tau_1}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1}, \qquad A_2 = \frac{\sigma_1\delta_2 - \sigma_2\delta_1}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1}, \qquad A_3 = -\frac{\lambda c_2}{c_1} \tag{16}$$

Окончательное выражение для осредненной температуры в области контакта

$$u(\zeta) = \frac{M\alpha}{\lambda}[g^*(\zeta) - 1] \tag{17}$$

5. Рассмотрим задачу о контактной температуре, возникающей при вращении вала, заключенного в полимерный подшипник [1]. В этой задаче значение $\lambda \sim 0.03$, поэтому формула (17) существенно упрощается. Разлагая коэффициенты A_1, A_2, A_3, в ряды по λ, ограничиваясь первым членом разложения, получим

$$u(z) = \frac{2\alpha\theta_0 f\omega c R G\Delta(1-\nu)}{\pi\lambda K\varepsilon(1-2\nu)}\left(\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\theta_0} - 1\right)\left[4 + \frac{21.9}{\sqrt{\lambda}} e^{-3.1L/R} \operatorname{ch} 3.1z/R - 0.5\lambda\frac{L^2 + 4z^2}{R^2}\right] \tag{18}$$

Участвующие в формуле (18) параметры G, Δ, ν, ε заимствованы из работы [1] и означают соответственно следующее: G — модуль сдвига материала подшипника, Δ — эксцентриситет подшипника, ν — коэффициент Пуассона материала подшипника. ε — относительная толщина полимерного подшипника.

Полученная формула (18) контактной температуры удобна для использования в инженерных расчетах.

Поступила 19 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Бабешко В. А., Белоконь А. В., Ворович И. И., Устинов Ю. А. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины. Изв. АН СССР, МТТ., 1966, № 1.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука», 1964.
3. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 30, № 1.
4. Симоненко И. Б. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки. Изв. Вузов, Математика, 1959, № 2.

ОБ ОЦЕНКАХ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОФАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. М. Левин *(Петрозаводск)*

Рассматривается смесь, состоящая из n однородных фаз, обладающих известными свойствами. Геометрия фазовых областей произвольна, смесь в целом считается однородной в статистическом смысле, но в общем случае анизотропной. На фазовой границе предполагаются идеальные условия теплового контакта (температура и тепловой поток непрерывны). Вариационным методом устанавливаются верхние и нижние границы для эффективных коэффициентов теплопроводности смеси при заданных концентрациях и коэффициентах теплопроводности отдельных фаз.

1. Рассмотрим некоторый объем V смеси, ограниченный поверхностью S. Так как теплопроводность фаз различна, то при установившемся тепловом потоке поля градиента температур $\boldsymbol{\tau}$ и векторы потока тепла $\mathbf{f}$ будут микроскопически неоднородны при любой заданной на S температуре. Тензор макроскопических или эффективных коэффициентов теплопроводности K смеси определим следующим образом:

$$-\langle \mathbf{f}\rangle = K\langle \boldsymbol{\tau}\rangle, \tag{1.1}$$

где угловые скобки означают усреднение по объему. Далее будем считать, что объем, по которому берутся средние, является «характерным макроскопическим объемом» [1] смеси.

Пусть в рассматриваемом объеме V многофазной среды r-я фаза с тензором коэффициентов теплопроводности K_r занимает объем V_r. Пусть далее на S задана температура $\theta(S)$ так, что

$$\theta(S) = \tau_i^\circ x_i \tag{1.2}$$

Здесь x_i — декартовы координаты поверхности S, а τ_i° от координат не зависит. В этом случае $\tau^\circ = \langle\boldsymbol{\tau}\rangle$ в объеме V смеси. Обозначим через $\boldsymbol{\tau}^*$ градиент, который следует из непрерывного поля температур, удовлетворяющего граничным условиям на S, а через $\mathbf{f}^*$ — вектор потока тепла, удовлетворяющий уравнению $\operatorname{div}\mathbf{f}^* = 0$. Для краевой задачи с граничным условием (1.2) имеют место неравенства

$$\Sigma \int\limits_{V_r} \mathbf{f}^*(2\langle\boldsymbol{\tau}\rangle - R_r\mathbf{f}^*)\,dV_r \leqslant 2\langle\Phi\rangle V \leqslant \Sigma \int\limits_{V_r} \boldsymbol{\tau}^* K_r \boldsymbol{\tau}^*\,dV_r \tag{1.3}$$

Эти неравенства вытекают из существования потенциалов

$$\Phi = {}^1\!/_2\,\boldsymbol{\tau}K\boldsymbol{\tau}, \qquad \Psi = {}^1\!/_2\,\mathbf{f}R\mathbf{f} \qquad (-f_i = \partial\Phi / \partial\tau_i, \quad -\tau_i = \partial\Psi / \partial t_i, \quad R = K^{-1})$$

и положительной определенности матриц коэффициентов K и R. В неравенствах (1.3) знак Σ означает суммирование по всем r от 1 до n,

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V \Phi\,dV = {}^1\!/_2\langle\boldsymbol{\tau}\rangle K\langle\boldsymbol{\tau}\rangle, \qquad R_r = K_r^{-1} \tag{1.4}$$