

УДК 539.3 + 622.02

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОГО РЕЖИМА
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРОДНОГО МАССИВА С УЧЕТОМ ВНУТРЕННИХ
САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ**

С. В. Лавриков¹, А. Ф. Ревуженко²

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: ¹lvk64@mail.ru, ²revuzhenko@yandex.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрена математическая модель горной породы с учетом свойства аккумулировать и высвобождать накопленную энергию. Введены внутренние переменные для описания самоуравновешенных напряжений. Исследован тип замкнутой системы уравнений. Предложен алгоритм численного моделирования динамических скачков разупрочнения в рамках квазистатической постановки задачи. Методом конечных элементов решена задача о деформировании массива в окрестности горизонтальной выработки. Показано, что при определенных условиях самоуравновешенные напряжения могут быть выведены из состояния равновесия, что сопровождается катастрофическими динамическими проявлениями горного давления.

Породный массив, структура, моделирование, внутренние переменные, самоуравновешенные напряжения, высвобождение энергии, выработка, расчет

DOI: 10.15372/FTPRPI20200602

Одна из основных задач механики горных пород заключается в анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) массива в окрестности выработанного пространства. При подземной добыче полезных ископаемых наиболее актуальными задачами горного дела являются расчет НДС массива в окрестности выработки [1 – 7], анализ изменения горного давления в процессе подвигания фронта забоя [8 – 11], оценка устойчивости целиков [12 – 14]. Представляет интерес также задача о перераспределении горного давления при выпуске раздробленной массы руды из камер [15 – 17].

Практика эксплуатации горных выработок показывает, что напряжения в массиве при ведении очистных работ обуславливают переход среды в приконтурной зоне в неупругое состояние. Перераспределение напряжений в массиве может спровоцировать микросейсмические явления, стреляние горных пород, толчки и горные удары. В отдельных областях массива могут сосредоточиваться разные по знаку и компенсирующие друг друга усилия. Данные области, находясь в самоуравновешенном состоянии, — потенциальные источники упругой энергии.

Работа выполнена в рамках проекта ФНИ (№ гос. регистрации АААА-А17-117122090002-5).

Такое внешнее воздействие, как прохождение выработки, может спровоцировать развязывание самоуравновешенных напряжений. В зависимости от условий этот процесс носит устойчивый и неустойчивый катастрофический характер. Свойство массива аккумулировать и высвобождать ранее наколенную упругую энергию подтверждается рядом фактов и наблюдений за проявлением горного давления в натуральных условиях, а также данными лабораторных экспериментов [18–24].

В настоящее время в механике развивается ряд подходов к моделированию поведения сред со структурой: математические модели с внутренними переменными [25–30]; модели, основанные на использовании методов неархимедова анализа [31–33]; модели нелокального типа [34–38] и др. В последние десятилетия широко применяется численный метод дискретных элементов, где свойства среды определяются посредством выбора формы дискретных частиц, их начальной упаковки и потенциалов взаимодействия между ними (учет упругости, пластичности, трения, сцепления, вязкости и т. д.) [39–47]. В [48] в рамках метода дискретных элементов введен дополнительный упругий потенциал опосредованного взаимодействия частиц и показано, что это позволяет описать свойство среды запасать, а затем и высвобождать наколенную упругую энергию. В [49–52] для моделей с внутренними переменными решены задачи о деформировании массива вблизи выработанного пространства, о деформировании целиков, проведено моделирование начальной стадии выпуска сыпучей среды в сходящемся канале.

В настоящей работе с учетом подхода [27, 49–52] впервые осуществляется численное моделирование запредельных режимов разупрочнения породного массива, приводящих к высвобождению внутренних самоуравновешенных напряжений и катастрофической потере устойчивости выработки.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В [27] сформулирована общая концепция горного массива как активной среды с внутренними источниками и стоками энергии и изложена схема построения математических моделей геоматериалов, обладающих внутренней структурой. На микроуровне структура среды представлена в виде эффективной регулярной упаковки зерен (скелет) и связующего материала, заполняющего поровое пространство. На контактах между зернами допускаются проскальзывания. Учет различных свойств элементов структуры позволяет строить математические модели широкого класса геоматериалов.

Рассмотрим плоскую постановку и выделим элементарный объем, включающий в себя достаточное число зерен, расположенных в узлах регулярной решетки (рис. 1). Введем матричные обозначения для осредненных тензорных полей структурных элементов: $\varepsilon^t = (\varepsilon_{11}^t \quad \varepsilon_{22}^t \quad \varepsilon_{12}^t)^T$, $\varepsilon^\tau = (\varepsilon_{11}^\tau \quad \varepsilon_{22}^\tau \quad \varepsilon_{12}^\tau)^T$ — компоненты тензоров микродеформаций; $t = (t_{11} \quad t_{22} \quad t_{12})^T$, $\tau = (\tau_{11} \quad \tau_{22} \quad \tau_{12})^T$ — соответствующие им компоненты тензоров микронапряжений зеренного скелета в различных системах координат (рис. 1); $\varepsilon^p = (\varepsilon_{11}^p \quad \varepsilon_{22}^p \quad \varepsilon_{12}^p)^T$, $p = (p_{11} \quad p_{22} \quad p_{12})^T$ — компоненты тензоров соответственно микродеформаций и микронапряжений порового материала; $\varepsilon^R = [\varepsilon_{11}^R \quad \varepsilon_{22}^R \quad (\varepsilon_{12}^R + \varepsilon_{21}^R) / 2]^T$ — компоненты тензора, характеризующего межзеренные проскальзывания. Индекс “ T ” — транспонирование матрицы. Величина $\omega^R = (\varepsilon_{12}^R - \varepsilon_{21}^R) / 2$ инвариантна по отношению к жесткому повороту, и в общем случае допускается возможность несимметричного функционирования двух семейств межзеренных контактов $\varepsilon_{12}^R \neq \varepsilon_{21}^R$.

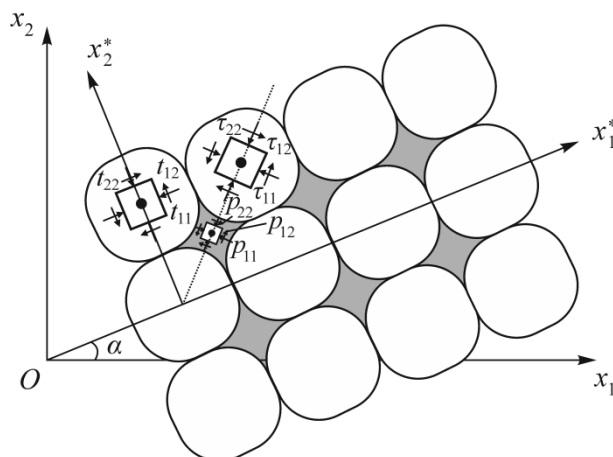


Рис. 1. Модель внутренней структуры горной породы

Запишем определяющие соотношения для структурных элементов в виде общей зависимости приращений микродеформаций и микронапряжений:

$$\Delta \varepsilon^t = T^t \Delta t, \quad \Delta \varepsilon^\tau = T^\tau \Delta \tau, \quad \Delta \varepsilon^p = P \Delta p, \quad \Delta \varepsilon^R = R \Delta t, \quad (1)$$

где T^t, T^τ, P, R — квадратные матрицы третьего порядка, описывающие свойства зерен, порового материала и межзеренного взаимодействия соответственно.

Введенные тензоры подчиняются условиям совместности, которые связывают осредненные макродеформации $\varepsilon^* = (\varepsilon_{11}^* \ \varepsilon_{22}^* \ \varepsilon_{12}^*)^T$ и макронапряжения $\sigma^* = (\sigma_{11}^* \ \sigma_{22}^* \ \sigma_{12}^*)^T$ элементарного объема в виде [27]:

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_{11}^* \\ \Delta \sigma_{22}^* \\ \Delta \sigma_{12}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{11} \\ \Delta t_{22} \\ \Delta t_{12} \end{pmatrix} + 2m \begin{pmatrix} \Delta p_{11} \\ \Delta p_{22} \\ \Delta p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{11} \\ \Delta t_{22} \\ \Delta t_{12} \end{pmatrix} + 2(1-m) \begin{pmatrix} \Delta \tau_{11} \\ \Delta \tau_{22} \\ \Delta \tau_{12} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11}^* \\ \Delta \varepsilon_{22}^* \\ \Delta \varepsilon_{12}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11}^t \\ \Delta \varepsilon_{22}^t \\ \Delta \varepsilon_{12}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11}^R \\ \Delta \varepsilon_{22}^R \\ (\Delta \varepsilon_{12}^R + \Delta \varepsilon_{21}^R) / 2 \end{pmatrix} = (1-m) \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11}^\tau \\ \Delta \varepsilon_{22}^\tau \\ \Delta \varepsilon_{12}^\tau \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11}^p \\ \Delta \varepsilon_{22}^p \\ \Delta \varepsilon_{12}^p \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Индекс “*” означает проекции на оси $Ox_1^*x_2^*$ (см. рис. 1), безразмерная величина $0 < m < 1$ имеет смысл параметра просветности.

Рассмотрим подробнее соотношения (2). Пусть в некотором объеме среды зафиксированы определенные напряжения в зернах и поровом материале, т. е. найдены компоненты t_{ij}, p_{ij} . Тогда соотношения (2) позволяют однозначно вычислить напряженное состояние макрообъема σ_{ij}^* . Обратная задача (по заданным макронапряжениям σ_{ij}^* определить напряжения зерен и порового материала t_{ij}, p_{ij} допускает множество решений). Общая макронагрузка может быть распределена между зернами и поровой средой в различных долях. Более того, полное отсутствие макронапряжений не означает, что внутренние микронапряжения среды также отсутствуют. В зернах и поровом материале могут действовать различные по знаку и компенсирующие друг друга ненулевые напряжения, при этом суммарные макронапряжения оказываются равными нулю. Таким образом, условия (2) описывают свойство среды запасать энергию в виде внутренних самоуравновешенных напряжений.

Выражения (1)–(3) позволяют исключить внутренние переменные и сформулировать определяющие соотношения модели:

$$\Delta \varepsilon^* = [(T^t + R)^{-1} + 2(T^r + P)^{-1}]^{-1} \Delta \sigma^*. \quad (4)$$

Соотношения (4) записаны в локальной системе координат $Ox_1^*x_2^*$, в произвольной системе Ox_1x_2 они преобразуются к виду:

$$\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = W[(T^t + R)^{-1} + 2(T^r + P)^{-1}]^{-1} W^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$W = \begin{pmatrix} (1 + \cos 2\alpha) / 2 & (1 - \cos 2\alpha) / 2 & -\sin 2\alpha \\ (1 - \cos 2\alpha) / 2 & (1 + \cos 2\alpha) / 2 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha / 2 & -\sin 2\alpha / 2 & \cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12})^T$, $\sigma = (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12})^T$ — макродеформации и макронапряжения элементарного объема; α — угол между осями Ox_1 и Ox_1^* .

Система определяющих соотношений (5) описывает анизотропную среду. В случае постоянного значения α данный тип анизотропии можно сопоставить с анизотропией трансверсально-изотропного линейно-упругого тела с тремя независимыми константами упругости. Такая анизотропия соответствует макрослоистости массива горных пород. Будем считать угол α заданным.

Соотношения (5) дополняются уравнениями Коши, связывающими приращения макродеформаций ε_{ij} и макросмещений u_i элементарного объема:

$$\Delta \varepsilon_{11} = \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1}, \quad \Delta \varepsilon_{22} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2}, \quad \Delta \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right) \quad (7)$$

и замыкаются уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{12}}{\partial x_2} + \Delta X_1 = 0, \quad \frac{\partial \Delta \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{22}}{\partial x_2} + \Delta X_2 = 0, \quad (8)$$

X_1, X_2 — объемные силы.

В итоге получаем замкнутую модель (5), (7), (8), состоящую из 8 уравнений с 8 неизвестными приращениями $\Delta \sigma_{ij}, \Delta \varepsilon_{ij}, \Delta u_i$, $i, j = 1, 2$.

Конкретизируем свойства структурных элементов модели. Из анализа экспериментальных данных следует, что для описания свойства запасать и высвобождать упругую энергию необходимо рассмотреть два фактора: наличие упругих элементов, которые собственно и будут аккумулировать энергию, и возможность локального упрочнения и разупрочнения среды при межзеренном проскальзывании. На стадии упрочнения происходит аккумулирование энергии, на стадии разупрочнения — ее высвобождение. Примем, что зеренный скелет среды представлен упаковкой изотропных линейно-упругих зерен, а поровый материал — линейно-упругий с отличными от зерен упругими характеристиками. Для описания указанных свойств в соответствии с законом Гука в предположении плоской деформации введем матрицу:

$$D(\nu, \mu) = \begin{pmatrix} (1-\nu)/(2\mu) & -\nu/(2\mu) & 0 \\ -\nu/(2\mu) & (1-\nu)/(2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2\mu) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда матрицы T^t, T^f совпадут (обозначим их через T) и будут равны:

$$T = D(\nu^t, \mu^t), \quad (10)$$

а матрица P —

$$P = D(\nu^p, \mu^p), \quad (11)$$

где ν^t, μ^t и ν^p, μ^p — соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига упругих зерен и порового материала.

Для описания межзеренных проскальзываний примем кусочно-линейную аппроксимацию общей нелинейной диаграммы с учетом стадий упрочнения, разупрочнения и остаточной прочности (рис. 2, $OABC$). Тогда описанные свойства сформулируем в линейном для приращений виде:

$$\Delta \varepsilon_{11}^R = 0, \quad \Delta \varepsilon_{22}^R = 0, \quad \Delta \varepsilon_{12}^R = \frac{\Delta t_{12}}{G_1^s}, \quad \Delta \varepsilon_{21}^R = \frac{\Delta t_{12}}{G_2^s}. \quad (12)$$

Здесь G_1^s, G_2^s — заданные модули контактного взаимодействия вдоль каждого из семейств контактов.

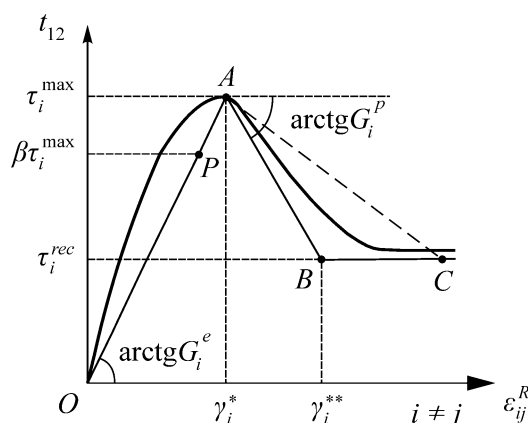


Рис. 2. Диаграмма проскальзываний на контактах между зернами

Первые два условия (12) означают отсутствие дилатансии. Явный учет дилатансии в моделях данного типа принципиальных трудностей не вызывает [52]. Последние два условия (12) характеризуют сдвиги между зернами, при этом модули G_1^s, G_2^s однозначно определяются заданными константами $\gamma_i^*, \gamma_i^{**}, \tau_i^{\max}, \tau_i^{res}$, $i = 1, 2$ — номер семейства контактов (см. рис. 2) по следующему правилу:

$$G_i^s = \begin{cases} G_i^e, & 0 \leq \gamma_i < \gamma_i^*, \\ -G_i^p, & \gamma_i^* \leq \gamma_i < \gamma_i^{**}, \\ 0, & \gamma_i^{**} \leq \gamma_i. \end{cases} \quad (13)$$

Условия проскальзывания (12) определяют матрицу R , в которой только один элемент R_{33} отличен от нуля:

$$R_{33} = \frac{G_1^s + G_2^s}{2G_1^s G_2^s}. \quad (14)$$

Таким образом, определяющие соотношения (5) описывают нелинейное поведение среды, модули G_1^s, G_2^s являются функциями напряженного состояния и могут меняться в процессе развития межзеренных проскальзываний.

АНАЛИЗ МОДЕЛИ

Основным является вопрос о типе полученной замкнутой системы уравнений. Тип определяет постановки корректных краевых задач и выбор методов их решения. Вопрос исследования типа системы (5), (7), (8) осложняется тем обстоятельством, что указанная система, хотя и записана в классической форме (после исключения деформаций — два уравнения равновесия плюс три определяющих уравнения), тем не менее данную ее форму можно отнести к вполне патологической. Действительно, формально это система пяти дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет первый порядок. Она сводится к одному уравнению только четвертого, а не пятого порядка. Например, к бигармоническому уравнению, если пренебречь неупругими деформациями. Это означает, что в системе должны фигурировать только четыре, а не пять уравнений первого порядка. В случае постоянных объемных сил данные уравнения можно получить, воспользовавшись следующей заменой переменных:

$$\Delta\sigma_{11} = \frac{\partial\Delta p_2}{\partial x_2}, \quad \Delta\sigma_{22} = \frac{\partial\Delta p_1}{\partial x_1}, \quad \Delta\sigma_{12} = -\frac{\partial\Delta p_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial\Delta p_2}{\partial x_1}, \quad (15)$$

где $\Delta p_1, \Delta p_2$ — компоненты вектора градиента функции Эри [53].

В результате подстановки (15) в (5), (7), (8) получаем четыре уравнения первого порядка относительно двух векторных полей $\Delta p_1, \Delta p_2$ и $\Delta u_1, \Delta u_2$. Теперь можно воспользоваться стандартной процедурой определения типа системы уравнений. Анализ типа системы уравнений (5), (7), (8) показывает, что в зависимости от значений параметров она может относиться как к эллиптическому, так и гиперболическому типам. Условия гиперболичности записываются в виде неравенств и в силу громоздкости выражений в общем случае здесь не приводятся.

Для выяснения механического смысла этих условий достаточно рассмотреть частный случай $\nu = \nu^t = \nu^p$, $\mu/2 = \mu^t = \mu^p$, $G^s = G_1^s = G_2^s$, $G^e = G_1^e = G_2^e$, $G^p = G_1^p = G_2^p$. В данном случае система уравнений (5), (7), (8) имеет гиперболический тип, если модуль ниспадающей ветви диаграммы $G^s = -G^p$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\mu}{2} \leq G^p \leq \frac{\frac{3}{2} - \nu}{2(1 - \nu)} \mu. \quad (16)$$

Для несжимаемой среды ($\nu = 0.5$) неравенства (16) сводятся к

$$\frac{\mu}{2} \leq G^p \leq \mu. \quad (17)$$

Вне диапазона (16) система относится к эллиптическому типу.

Запишем систему определяющих уравнений (5) для рассмотренного частного случая в локальной системе координат $Ox_1^*x_2^*$:

$$\Delta \varepsilon_{11}^* = \frac{1-\nu}{2\mu} \Delta \sigma_{11}^* - \frac{\nu}{2\mu} \Delta \sigma_{22}^*, \quad \Delta \varepsilon_{22}^* = -\frac{\nu}{2\mu} \Delta \sigma_{11}^* + \frac{1-\nu}{2\mu} \Delta \sigma_{22}^*, \quad \Delta \varepsilon_{12}^* = \frac{1}{2\mu_{res}} \Delta \sigma_{12}^*, \quad (18)$$

где $\mu_{res} = \mu[(G^s + \mu/2)/(G^s + \mu)]$.

Если в системе (18) устремить $G^s \rightarrow \infty$, то она переходит в закон Гука. Таким образом, модель допускает предельный переход к изотропной линейной теории упругости в случае, если зерна и поровый материал одна и та же упругая среда и проскальзывания на межзеренных контактах отсутствуют. Из (18) следует, что существует диапазон значений ниспадающего модуля $G^s = -G^p$, при котором результирующий модуль сдвига среды становится отрицательным $\mu_{res} < 0$, т. е. в макрообъеме реализуется неустойчивый режим сдвига $\Delta \sigma_{12}^* \Delta \varepsilon_{12}^* < 0$ (стадия разупрочнения). Очевидно, этот диапазон описывается неравенствами для наклона ниспадающей ветви в виде $\mu/2 \leq G^p \leq \mu$, что соответствует (17).

На рис. 3 приведены микродиаграмма поведения на межзеренных контактах (рис. 3а) и макродиаграмма сдвига элементарного объема (рис. 3б). Цифрами 1, 3 обозначены диапазоны изменения наклона ниспадающей ветви диаграммы, при которых система относится к эллиптическому типу, цифрой 2 — к гиперболическому.

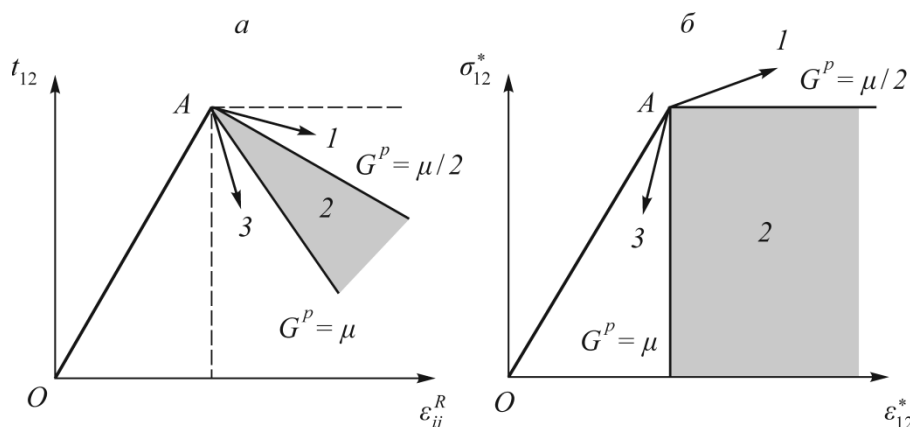


Рис. 3. Диапазон изменения параметров, определяющих эллиптический (области 1, 3) и гиперболический (серая область 2) тип системы уравнений: а — микродиаграмма сдвига на межзеренных контактах; б — макродиаграмма сдвига элементарного объема

Пусть вначале проскальзывания на контактах между зернами осуществляются с упрочнением ($G^s = G^e > 0$). Тогда неравенства (16) не выполняются, система имеет эллиптический тип ($\mu_{res} > 0$) и процесс деформирования является устойчивым. Предположим, что в некоторой точке проскальзывание достигло критического значения и наступила стадия разупрочнения ($G^s = -G^p < 0$). Здесь возможны следующие варианты. При достаточно слабом разупрочнении

$$G^p < \frac{\mu}{2} \quad (19)$$

тип системы остается эллиптическим. Упругое упрочнение зерен и поровой среды превалирует над разупрочнением на межзеренных контактах. Таким образом, макродиаграмма деформирования (см. рис. 3б, стрелка 1) представляет собой упругопластическую диаграмму с упрочнением $\mu_{res} > 0$. Второй случай реализуется в диапазоне параметров разупрочнения (17). Здесь тип системы меняется на гиперболический. Разупрочнение на контактах преобладает над упругим упрочнением зерен и поровой среды, макродиаграмма в целом является разупрочняющейся ($\mu_{res} < 0$, на рис. 3 отмечена серым цветом).

Последний случай реализуется, когда наклон ниспадающей ветви на межзеренных контактах является достаточно крутым:

$$G^p > \mu. \quad (20)$$

Здесь тип системы снова меняется на эллиптический. При таком наклоне падающей ветви локальной диаграммы статического равновесного состояния не существует и в среде происходит динамический скачок разупрочнения. На локальной диаграмме (см. рис. 2) он показан штриховой линией (перескок решения из точки A в точку C , минуя B). В результате скачка происходит смена модуля контактного взаимодействия со значения $G^s = -G^p$ на $G^s = 0$ и статическое равновесие достигается в точке C . Макродиаграмма является упрочняющейся ($\mu_{res} > 0$), но деформирование по ней осуществляется в противоположном направлении, т. е. в направлении упругой разгрузки (рис. 3б, стрелка 3). При смене модуля на значение $G^s = 0$ макродиаграмма меняет наклон, по-прежнему оставаясь упрочняющейся ($\mu_{res} > 0$). Теперь деформирование по ней идет в направлении нагружения. В целом локальный динамический скачок разупрочнения приводит к макроразгрузке среды.

При проведении численных расчетов ограничимся первым (19) и третьим (20) диапазонами параметров. Процесс деформирования в первом случае является устойчивым, в последнем — неустойчивым. В неустойчивом режиме, когда проскальзывание на контакте достигает критической величины $\varepsilon_{12}^R = \gamma_i^*$, любое малое возмущение равновесного состояния играет роль триггера, приводя к динамическому высвобождению накопленной упругой энергии.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для численной реализации используется классическая методика конечно-элементного приближения с линейной по координатам аппроксимацией приращений смещений в узлах конечно-элементной сетки [54, 55]. Задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, ее решение осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента по строке [56].

Поскольку рассмотренная модель является нелинейной и записана в приращениях, то ее решение будем искать в квазистатической постановке по шагам нагружения. Наряду с граничными условиями необходимо определить состояние среды в начальный момент времени. Конечно-элементный алгоритм позволяет по заданному приращению параметра нагружения Δd (по заданным на границе приращениям смещений, напряжений либо их комбинации) вычислить приращения смещений Δu_i , а следовательно, приращения деформаций и напряжений $\Delta \varepsilon_{ij}$, $\Delta \sigma_{ij}$ внутри расчетной области на каждом шаге нагружения. Далее необходимо найти приращения микропараметров Δt_{ij} , $\Delta \tau_{ij}$, Δp_{ij} , $\Delta \varepsilon_{ij}^t$, $\Delta \varepsilon_{ij}^r$, $\Delta \varepsilon_{ij}^p$, $\Delta \varepsilon_{ij}^R$ и в зависимости от достигнутых значений микропроскальзываний ε_{ij}^R выполнить смену модулей на межзеренных контактах в соответствии с (13). Общее решение задачи будем строить в виде итерационного процесса: $\sigma_{ij}^{k+1} = \sigma_{ij}^k + \Delta \sigma_{ij}^k$, $t_{ij}^{k+1} = t_{ij}^k + \Delta t_{ij}^k$ и др., где верхний индекс означает номер итерации.

Известно, что численное решение задач деформирования на стадии разупрочнения (ниспадающая ветвь) наталкивается на ряд математических трудностей [57, 58]. Выше показано, что при задании параметров, удовлетворяющих условию (20), устойчивость деформирования не гарантируется. Неустойчивый режим сопровождается динамическими скачками разупрочнения, что не предусматривается в рамках квазистатической постановки задачи. Проблема неустойчивости может решаться с помощью специального алгоритмического приема, который позволяет, оставаясь в рамках линейной для приращений квазистатической постановки задачи, построить корректное решение с учетом динамических скачков разупрочнения.

Пусть параметры задачи удовлетворяют условию (20). В этом случае деформирование будет протекать устойчиво только до определенного момента, а именно до выхода хотя бы одного контакта на ниспадающий участок диаграммы. Дальнейшее нагружение в рамках квазистатической постановки приводит к парадоксу: увеличение параметра нагружения $\Delta d > 0$ приводит к скольжению вдоль разупрочняющегося контакта в противоположном направлении, т. е. приращение проскальзывания становится отрицательным ($\Delta \varepsilon_{ij}^R < 0$). Иными словами, решение в классе $\Delta d > 0$ и на всех контактах $\Delta \varepsilon_{ij}^R > 0$ не существует.

В соответствии с алгоритмом [59], дадим в этот момент не положительное, а отрицательное приращение параметру нагружения ($\Delta d < 0$) и будем искать решение в следующем классе: на контактах, где $G_i^s = -G_i^p$, потребуем выполнения неравенства $\Delta \varepsilon_{ij}^R > 0$ (дальнейшее разупрочнение), а на контактах, где $G_i^s = G_i^e$ — выполнения неравенства $\Delta \varepsilon_{ij}^R < 0$ (упругая разгрузка). На контактах, где уже достигнута остаточная прочность $G_i^s = 0$, необходимо учитывать разгрузку материала, которая должна происходить по траектории, отличной от приведенных на локальной диаграмме (см. рис. 2). Проблему разномодульности активного нагружения и разгрузки можно решить, если задать параметр остаточной прочности в виде $\tau_i^{res} = 0$, т. е. считать, что после выхода на горизонтальный участок диаграммы сдвиговая прочность среды исчерпывается полностью. В этом случае знак приращения $\Delta \varepsilon_{ij}^R$ на этой стадии деформирования может быть произвольным. В дальнейшем зоны, где достигается равенство $\tau_i^{res} = 0$, будем называть зонами деградации сдвиговой прочности.

Решение с отрицательным значением приращения параметра нагружения ($\Delta d < 0$) будем строить до тех пор, пока разупрочняющийся контакт не выйдет на горизонтальный участок диаграммы и не достигнет точки B (см. рис. 2). Здесь происходит смена модуля со значения $G_i^s = -G_i^p$ на $G_i^s = 0$. Теперь, полагая $\Delta d > 0$, продолжаем расчет.

С физической точки зрения присвоение параметру нагружения отрицательного приращения означает, что мы искусственно сдерживаем динамический скачок и изымаем излишек энергии, оставаясь в рамках квазистатической постановки задачи. Моделирование динамического скачка (увеличение проскальзывания ε_{ij}^R) осуществляется в два этапа: сначала при $G_i^s = -G_i^p$ и $\Delta d < 0$ на участке AB , затем при $G_i^s = 0$ и $\Delta d > 0$ на участке BC локальной диаграммы (см. рис. 2). В итоге скачок моделируется перемещением на диаграмме по ломаной траектории ABC , а суммарное приращение проскальзывания на контакте совпадает с приращением в случае скачка по штриховой траектории AC (без учета инерционных сил).

Отметим еще одно преимущество линейной схемы расчета. Линейность определяющих уравнений для приращений означает, что линейной является зависимость приращения параметра нагружения Δd и рассчитанных по ней значений искомым приращений микропроскальзываний $\Delta \varepsilon_{ij}^R$. Таким образом, нет необходимости задавать малые значения приращения параметра нагружения Δd , что имеет место при решении физически нелинейных задач в квазистатической постановке. Если задать произвольное значение Δd , решить краевую задачу и вычислить приращения $\Delta \varepsilon_{ij}^R$, можно сразу найти суммарное межзеренное проскальзывание ε_{ij}^R на всех контактах. Это позволяет рассчитать множитель $\lambda = (\max_{ij} \varepsilon_{ij}^R) / \gamma_i^*$. Данный множитель гарантирует, что если теперь вместо приращения Δd задать значение $\lambda \Delta d$, то рассчитанные по нему приращения $\Delta \varepsilon_{ij}^R$ будут таковы, что общее межзеренное проскальзывание ε_{ij}^R нигде в области не превысит критическое значение γ_i^* . На некоторых контактах будет достигаться равенство $\varepsilon_{ij}^R = \gamma_i^*$, на всех остальных контактах — строгое неравенство $\varepsilon_{ij}^R < \gamma_i^*$. В итоге за фиксированное число шагов нагружения можно построить полное решение исходной нелинейной задачи.

Таков общий алгоритм построения численного решения краевых задач на основе сформулированной модели структурно-неоднородной горной породы. Разработанные численные алгоритмы реализованы в виде комплекса оригинальных программ для ЭВМ [60].

ДЕФОРМИРОВАНИЕ МАССИВА В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРАБОТКИ

Рассмотрим задачу о расчете напряженно-деформированного состояния массива в окрестности горизонтальной выработки. В качестве расчетной области возьмем ближнюю зону массива $r \leq R$, примыкающую к выработке арочного поперечного сечения. Геометрия контура выработки определяется двумя безразмерными параметрами R/b и a/b (рис. 4). Примем, что в начальном состоянии

$$\sigma_{22}^0 = -\gamma(H - x_2), \quad \sigma_{11}^0 = \xi \sigma_{22}^0, \quad \sigma_{12}^0 = 0, \quad (21)$$

где H — глубина залегания выработки; ξ — коэффициент бокового распора; γ — удельный вес; индекс “0” — начальное состояние (нулевая итерация).

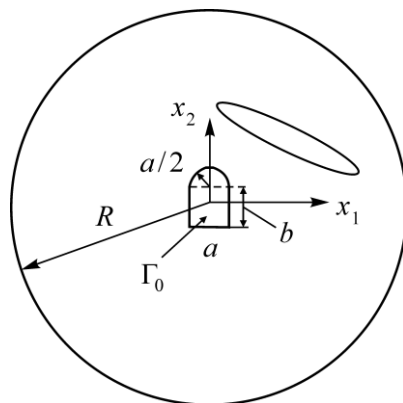


Рис. 4. Расчетная область массива в окрестности выработки

Предположим, что в ненарушенном массиве проходится выработка: материал внутри выработки мысленно удаляется, а его влияние заменяется отпором крепи на ее контуре. Теперь нагружение можно свести к уменьшению данного отпора до полной разгрузки контура выработки. Разгрузку контура будем выполнять по шагам в квазистатическом режиме. В этом случае краевые условия на контуре выработки на одном шаге по приращениям имеют вид

$$\Delta\sigma_n|_{\Gamma_0} = -\Delta d^k \sigma_n^0|_{\Gamma_0}, \quad \Delta\tau_n|_{\Gamma_0} = -\Delta d^k \tau_n^0|_{\Gamma_0}.$$

Здесь σ_n^0, τ_n^0 — начальные значения нормальной и касательной компонент тензора макронапряжений; $\Delta\sigma_n, \Delta\tau_n$ — их приращения; Γ_0 — контур выработки; $0 \leq \Delta d^k \leq 1$ — параметр нагружения (доля снимаемой нагрузки на контуре от начальной) на k -шаге. Контур выработки считается полностью разгруженным при условии $\sum_k \Delta d^k = 1$.

Будем полагать, что внешняя граница расчетной области достаточно удалена от контура выработки и напряженное состояние на ней не изменяется:

$$\Delta\sigma_n|_{r=R} = 0, \quad \Delta\tau_n|_{r=R} = 0.$$

Вес массива учтен в начальном состоянии, приращения объемных сил равны $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0$.

Выберем следующие значения безразмерных параметров модели (все величины размерности напряжения отнесены к $10\tau^{\max}$, величины размерности длины — к b):

$$\begin{aligned} \mu^t &= 2 \cdot 10^3, \quad \mu^p = 5 \cdot 10^2, \quad \nu^t = 0.2, \quad \nu^p = 0.3, \\ \gamma_1^* &= \gamma_2^* = 10^{-3}, \quad \gamma_1^{**} = \gamma_2^{**} = 1.001 \cdot 10^{-3}, \quad \tau_1^{\max} = \tau_2^{\max} = 0.1, \quad \tau_1^{res} = \tau_2^{res} = 0, \\ R &= 15, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad H = 5 \cdot 10^2, \quad \gamma = 0.08, \quad \xi = 0.42, \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Параметры (22) обеспечивают выполнение условий неустойчивого режима деформирования (20). Это означает, что на стадии локального разупрочнения будет происходить динамическое высвобождение ранее накопленной энергии.

Наряду с начальными значениями макронапряжений (21) необходимо определить, каким образом они распределены между элементами внутренней структуры, т. е. присутствуют ли в массиве области сосредоточения внутренних самоуравновешенных напряжений — потенциальные источники упругой энергии. Именно эти области (если они присутствуют) могут играть ключевую роль в процессах катастрофического проявления горного давления. Примем, что начальные микронапряжения зерен t_{ij}^0 и поровой среды p_{ij}^0 заданы как

$$\begin{aligned} t_{11}^0 &= 0.5\sigma_{11}^{0*}, \quad t_{22}^0 = 0.5\sigma_{22}^{0*}, \quad t_{12}^0 = 0.5\sigma_{12}^{0*} + \beta\tau^{\max}, \\ p_{11}^0 &= \frac{0.5\sigma_{11}^{0*}}{2m}, \quad p_{22}^0 = \frac{0.5\sigma_{22}^{0*}}{2m}, \quad p_{12}^0 = \frac{0.5\sigma_{12}^{0*} - \beta\tau^{\max}}{2m}, \end{aligned} \quad (23)$$

где σ_{ij}^{0*} — начальные макронапряжения из (21), записанные в системе координат $Ox_1^*x_2^*$; β — безразмерный параметр.

Условия (23) означают, что нормальные компоненты напряжений $\sigma_{11}^{0*}, \sigma_{22}^{0*}$ распределены между зернами и поровой средой в равных долях (здесь и ниже полагаем $m = 0.5$). Распределение касательной компоненты зависит от параметра β , который суть доля от пикового значения τ^{\max} на межзеренных контактах (см. рис. 2). Если $\beta = 0$, то сдвиговая нагрузка на контак-

тах также равномерно распределена между зернами и поровой средой. При $\beta \neq 0$ распределение становится неравномерным. Таким образом, внутри зерен и поровой среды будут сосредоточены компенсирующие друг друга касательные микронапряжения. Микронапряжения (23) выбраны таким образом, что условия совместности (2) выполняются.

Для моделирования динамического высвобождения ранее запасенной энергии предположим, что в массиве, окружающем выработку, имеется зона, в которой сосредоточены разные по знаку и уравнивающие друг друга касательные напряжения зерен и поровой среды (назовем ее аномальной зоной). Конфигурацию зоны выберем в виде, показанном на рис. 4 (эллиптическая область). Далее рассмотрим сравнение решений двух задач, которые будут отличаться только значением самоуравновешенных напряжений, т. е. значением β в аномальной зоне. В первой задаче всюду в области положим $\beta = 0$, во второй — $\beta = 0$ всюду, за исключением аномальной зоны. Внутри этой зоны примем $\beta = 0.8$, т. е. касательные микронапряжения t_{12}^0 составляют 80% от пикового значения τ^{\max} . На контактной диаграмме межзеренного скольжения (см. рис. 2) начальное состояние в первой задаче соответствует точке O ($t_{12}^0 = 0$), во второй внутри аномальной зоны это состояние соответствует точке P ($t_{12}^0 = 0.8\tau^{\max}$). В целом в обеих задачах заданы одни и те же начальные макронапряжения (21). Отличие состоит в их распределении между структурными элементами среды, т. е. в значении параметра β .

Выполнение условий (20) при выходе диаграммы на межзеренных контактах на стадию разупрочнения (см. рис. 2) обеспечивает динамический скачкообразный режим высвобождения энергии в обеих задачах. Однако в первой задаче высвободиться будет только та часть энергии, которая запасена на стадии упрочнения (на восходящем участке диаграммы). Во второй задаче возможна ситуация, когда нагружение спровоцирует развязывание самоуравновешенных напряжений, сконцентрированных внутри конечной области массива (аномальной зоны).

Проведем численные расчеты по разгрузке контура выработки в обеих задачах и сравним полученные результаты. На рис. 5 показано последовательное изменение параметра нагружения $d = \sum_k \Delta d^k$ в первой задаче при отсутствии аномальной зоны ($\beta = 0$). Видно, что за фиксированное число шагов нагружения контур выработки разгружается полностью (в точке A $d = 1$).

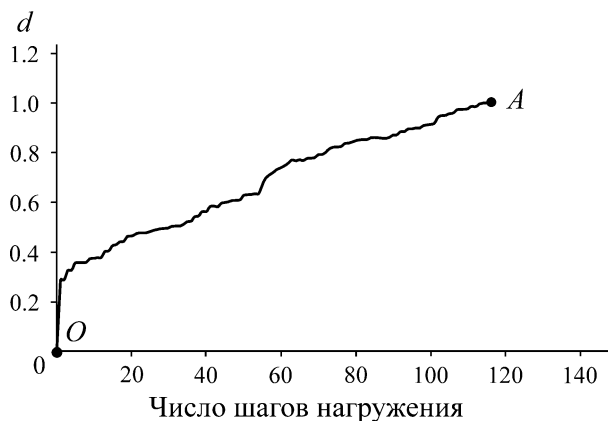


Рис. 5. Увеличение параметра нагружения d (снижение давления на контуре выработки)

Увеличение межзеренных сдвигов происходит последовательно в разных точках среды. При переходе диаграммы через пиковую нагрузку и выходе на ниспадающую ветвь в данной точке наблюдается локальный скачок разупрочнения. При этом локальная прочность на сдвиг теряется скачкообразно (касательные напряжения на контактах $t_{12} = \tau^{res} = 0$). Однако окружающий массив имеет достаточный запас прочности и полностью компенсирует деградацию сдвиговой прочности в областях разупрочнения. Процесс разгрузки контура осуществляется сравнительно устойчиво, т. е. без срывов диаграммы нагружения OA (рис. 5).

Развитие областей деградации сдвиговой прочности представлено на рис. 6 (выделены серым цветом). Здесь состояние на межзеренных контактах достигает горизонтальной ветви. Эти зоны впервые формируются в точках естественной концентрации напряжений (угловых точках выработки) и далее развиваются вглубь массива. После полной разгрузки контура эти зоны принимают конфигурацию, показанную на рис. 6, и их негативное влияние полностью компенсируется прочностью окружающего массива.

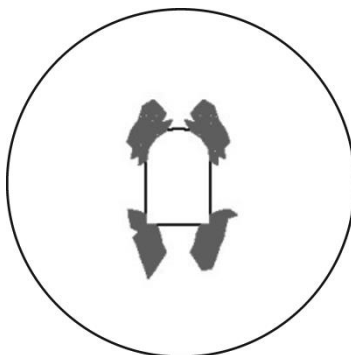


Рис. 6. Развитие зон деградации сдвиговой прочности

На рис. 7 приведены расчетные изолинии максимального касательного напряжения $T = 0.5\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$ (рис. 7а) и сдвига $\Gamma = \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}$ (рис. 7б) в момент полной разгрузки контура выработки.

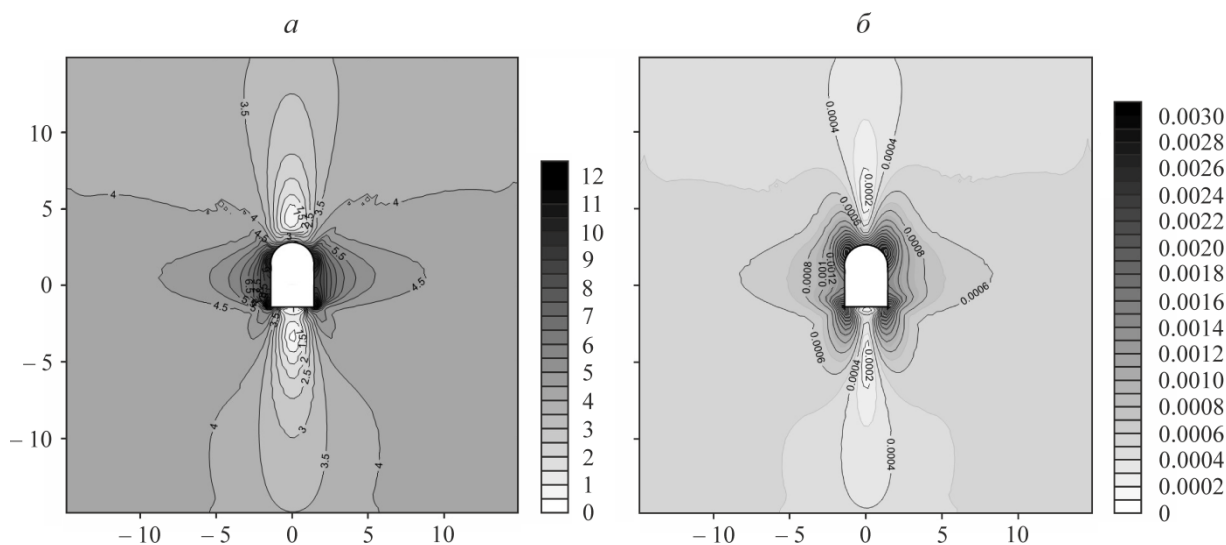


Рис. 7. Изолинии НДС массива в момент $d = 1$: а — интенсивность касательных усилий $T = 0.5\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$; б — интенсивность сдвигов $\Gamma = \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}$

Рассмотрим результаты расчета, когда внутри аномальной зоны $\beta = 0.8$. На рис. 8 показано изменение параметра d .



Рис. 8. Увеличение параметра нагружения d (снижение давления на контуре выработанного пространства)

Полностью разгрузить выработку не удастся, максимальное значение $d \approx 0.54$. Деформирование сопровождается скачками разупрочнения, которые уже не являются локальными. Они происходят не в отдельных точках массива последовательно по мере нагружения, а сразу в конечной его области, т. е. одновременно на нескольких конечных элементах. На рис. 8 скачки выражаются в резком падении параметра d и характеризуются увеличением нагрузки на контуре (например, участок AB). В квазистатической постановке не существует понятия времени нагружения. Его роль играет число шагов нагружения. Реальные динамические скачки, неконтролируемые краевыми условиями, возникают мгновенно на фоне медленного квазистатического нагружения. На участке AB вследствие серии динамических скачков разупрочнения наблюдается мгновенный рост давления на контуре выработки на $\sim 7\%$ от исходного давления. Расчеты показали, что развязывание самоуравновешенных напряжений в аномальной зоне и, как следствие, деградация сдвиговой прочности массива, приводят к его катастрофическому поведению. На участке CF фиксируются два следующих друг за другом динамических скачка. Первый сопровождается ростом давления на контуре на $\sim 20\%$ (CD), второй — еще на $\sim 49\%$ (DF) от начального давления на контуре. При этом равновесное значение параметра нагружения в точке E переходит через ноль и принимает значение $d \approx -0.13$. Это означает, что высвобождение энергии самоуравновешенных напряжений в аномальной зоне не компенсируется прочностью окружающего массива. Для поддержания равновесного состояния в массиве требуется обеспечить дополнительный отпор крепи на контуре выработки, значение которого превышает первоначальные напряжения в ненарушенном массиве ($d < 0$). Таким образом, попытка разгрузить контур выработки без обеспечения адекватных мер по дополнительному отпору крепи приведет к потере ее устойчивости и завалу. Развитие зон деградации сдвиговой прочности демонстрирует рис. 9.

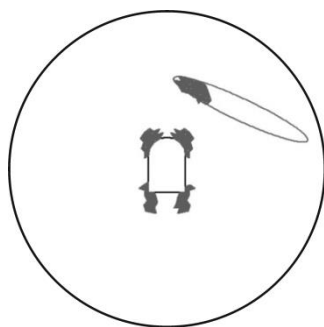


Рис. 9. Развитие зон деградации сдвиговой прочности

На рис. 10 показаны изолинии инвариантов T (рис. 10а) и Γ (рис. 10б) в момент $d \approx 0.37$ (точка D на рис. 8). Внутри аномальной зоны формируется область интенсивных сдвиговых деформаций и сдвиговая прочность массива резко уменьшается. Это приводит к существенной асимметрии напряженного состояния массива. В целом за счет развязывания энергии внутренних самоуравновешенных напряжений в массиве происходит катастрофическое снижение его несущей способности.

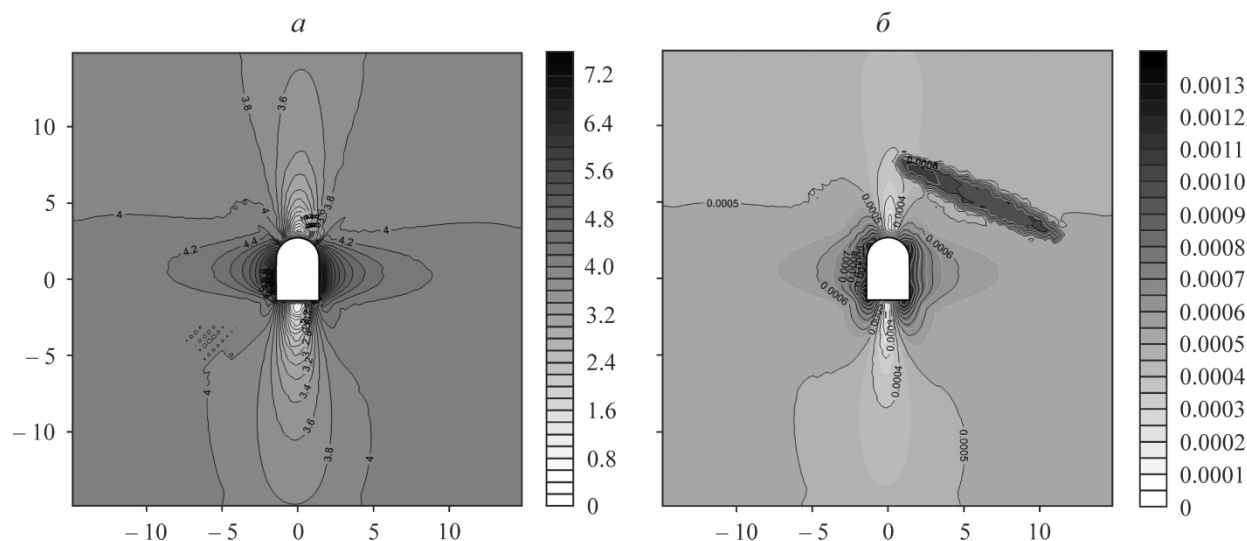


Рис. 10. Изолинии НДС массива в момент $d = 1$: a — интенсивность касательных усилий $T = 0.5\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$; b — интенсивность сдвигов $\Gamma = \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}$

ВЫВОДЫ

Разработанные модели учитывают способность породного массива аккумулировать упругую энергию в виде внутренних самоуравновешенных напряжений. Они могут использоваться для расчета горного давления в окрестности выработанного пространства, анализа устойчивости целиков, а также для исследования процесса выпуска руды из камер. Предложенный численный алгоритм позволяет в квазистатической постановке получать решения задач деформирования массива с учетом динамических скачков разупрочнения. Рассмотренное решение показывает, что в зависимости от свойств массива и условий нагружения внутренние самоуравновешенные напряжения могут приводить к катастрофическим проявлениям горного давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимжанов М. Т. Исследование устойчивости горизонтальных подземных выработок // Проблемы механики горных пород. — Новосибирск: Наука, 1971. — С. 39–40.
2. Анциферов С. В., Саммаль А. С., Деев П. В. Оценка напряженно-деформированного состояния многослойной крепи вертикального ствола с учетом отклонений форм поперечных сечений от проектных // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2017. — Т. 4. — № 2. — С. 19–25.
3. Сукнев С. В. Хрупкое и квазихрупкое разрушение геоматериалов с круговым отверстием при неравнокомпонентном сжатии // ФТПРПИ. — 2020. — № 2. — С. 19–30.

4. **Колимбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** О деформировании анизотропного горного массива в окрестности горизонтальной протяженной выработки // ФТПРПИ. — 2012. — № 6. — С. 21–36.
5. **Sahoo J. P. and Kumar J.** Seismic stability of a long unsupported circular tunnel, *Comput. and Geotech.*, 2012, Vol. 44. — P. 109–115.
6. **Zhang Q., Wang H. Y., Jiang Y. J., Lu M. M., and Jiang B. S.** A numerical large strain solution for circular tunnels excavated in strain-softening rock masses, *Comput. and Geotech.*, 2019, Vol. 14. — 103142.
7. **Keawsawasvong S. and Ukritchon B.** Undrained stability of a spherical cavity in cohesive soils using finite element limit analysis, *J. Rock Mech. and Geotech. Eng.*, 2019, Vol. 11, Issue 6. — P. 1274–1285.
8. **Серяков В. М., Риб С. В., Басов В. В., Фрянов В. Н.** Геомеханическое обоснование параметров технологии отработки угольных пластов в зоне взаимовлияния очистного пространства и передовой выработки // ФТПРПИ. — 2018. — № 6. — С. 21–29.
9. **Трофимов В. А., Филиппов Ю. А.** Влияние изменения напряженного состояния пород кровли угольного пласта при развитии очистных работ на газовый режим залежи // ФТПРПИ. — 2019. — № 5. — С. 33–44.
10. **Gao M., Jin W., Dai Z., and Xie J.** Relevance between abutment pressure and fractal dimension of crack network induced by mining, *Int. J. of Min. Sci. and Technol.*, 2013, Vol. 23, Issue 6. — P. 925–930.
11. **Li S., Gao M., Yang X., Zhang R., Ren L., Zhang Z., Li G., Zhang Z., and Xie J.** Numerical simulation of spatial distributions of mining-induced stress and fracture fields for three coal mining layouts, *J. of Rock Mech. and Geotech. Eng.*, 2018, Vol. 10, Issue 5. — P. 907–913.
12. **Барях А. А., Асанов В. А., Токсаров В. Н., Гилев М. В.** К оценке остаточного срока службы соляных междукамерных целиков // ФТПРПИ. — 1998. — № 1. — С. 37–30.
13. **Zhang P. H., Yang T. H., Yu Q. L., Xu T., Zhu W. C., Liu H. L., Zhou J. R., and Zhao Y. C.** Microseismicity induced by fault activation during the fracture process of a crown pillar, *J. Rock Mech. and Rock Eng.*, 2015, Vol. 48, No. 4. — P. 1673–1682.
14. **Esterhuizen G. S., Dolinar D. R., and Ellenberger J. L.** Pillar strength in underground stone mines in the United States, *Int. J. of Rock Mech. and Min. Sci.*, 2011, Vol. 48. — P. 42–50.
15. **Бушманова О. П.** Упругопластическое деформирование материалов и локализация сдвигов // Физ. мезомеханика. — 2004. — Т. 7. — Спец. вып. — Ч. 1. — С. 93–96.
16. **Клишин С. В., Клишин В. И., Опрук Г. Ю.** Моделирование процесса выпуска угля при механизированной отработке мощных крутопадающих угольных пластов // ФТПРПИ. — 2013. — № 6. — С. 105–116.
17. **Яцун С. Ф., Локтионова О. Г., Галицина Т. В.** Численное моделирование истечения сыпучего материала из бункера // Изв. вузов. Машиностроение. — 2008. — № 6. — С. 50–56.
18. **Пономарев В. С.** Проблемы изучения энергетически активной геологической среды // Геотектоника. — 2011. — № 2. — С. 66–75.
19. **Кочарян Г. Г., Морозова К. Г., Остапчук А. А.** Исследование акустической эмиссии слоя геоматериала при сдвиговом деформировании // ФТПРПИ. — 2019. — № 3. — С. 15–21.
20. **Тажобаев К. Т., Тажибаев Д. К.** Остаточные напряжения — фактор неоднородности напряженного состояния сейсмоактивных участков массива горных пород // Геомеханика в горном деле: докл. Всерос. научн.-техн. конф. с междунар. участием. — Екатеринбург, 2014. — С. 17–27.
21. **Адушкин В. В., Кочарян Г. Г., Остапчук А. А.** О параметрах, определяющих долю энергии, излучаемой при динамической разгрузке участка массива горных пород // ДАН. — 2016. — Т. 467. — № 1. — С. 86–90.

22. **Горяинов П. М., Давиденко И. В.** Тектоно-кессонный эффект в массивах горных пород и рудных месторождений — важное явление геодинамики // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 5. — С. 1212–1215.
23. **Kosykh V. P.** Effect of multiple weak impacts on evolution of stresses and strains in geomaterials, Trigger Effects in Geosystems, Springer Proc. in Earth and Environmental Sci., Springer Nature Switzerland AG, 2019. — P. 95–103.
24. **Peng Z. and Gomborg J.** An integrated perspective of the continuum between earthquakes and slow-slip phenomena, Nature Geosci., 2010, Vol. 3. — P. 599–607.
25. **Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И.** Микронапряжения в конструкционных материалах. — Л.: Машиностроение, 1990. — 223 с.
26. **Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.** Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. — 1958. — Т. 22. — Вып. 1. — С. 78–89.
27. **Ревуженко А. Ф.** Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск: НГУ, 2000. — 428 с.
28. **Kolymbas D., Herle I., and von Wolfersdorff P. A.** Hypoplastic constitutive equation with internal variables, Int. J. of Numer. and Analyt. Methods in Geomech., 1995, Vol. 19. — P. 415–436.
29. **Zeng T., Shao J. F., and Xu W. Y.** A micromechanical model for the elastic-plastic behavior of porous rocks, Comput. and Geotech., 2015, Vol. 70. — P. 130–137.
30. **Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Об оптимизации конструкций рулонированных оболочек // ПМТФ. — 1988. — № 5. — С. 162–167.
31. **Ревуженко А. Ф.** Математический анализ функций неархимедовой переменной. Специализированный математический аппарат для описания структурных уровней геосреды. — Новосибирск: Наука, 2012. — 327 с.
32. **Ревуженко А. Ф.** О приложениях неархимедова анализа в механике блочно-иерархической геосреды // ФТПРПИ. — 2016. — № 5. — С. 14–22.
33. **Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F.** A non-Archimedean number system to characterize the structurally inhomogeneous rock behavior nearby a tunnel, J. Rock Mech. and Geotech. Eng., 2011, Vol. 3, No. 2. — P. 153–160.
34. **Кунин И. А.** Теория упругих сред с микроструктурой. — М.: Наука, 1975. — 416 с.
35. **Эринген А. К.** Теория микрополярной упругости. — М.: Мир, 1975. — Т. 2. — С. 646–752.
36. **Truesdell C. A. and Toupin R. A.** Handbuch der physik, edited by S. Flugge, Berlin, Springer-Verlag, 1960. — P. 226–793.
37. **Смолин И. Ю.** Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне // Моделирование систем и процессов. — 2006. — № 14. — С. 189–205.
38. **Ревуженко А. Ф., Микенина О. А.** Упругопластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. — 2018. — № 2. — С. 167–176.
39. **Cundall P. A. and Strack O. D. L.** A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, 1979. — Vol. 29. — P. 47–65.
40. **Механика** — от дискретного к сплошному / под ред. В. М. Фомина. — Новосибирск: СО РАН, 2008. — 343 с.
41. **Годунов С. К., Киселев С. П., Куликов И. М., Мали В. И.** Численное и экспериментальное моделирование образования волн при сварке взрывом // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2013. — Т. 281. — С. 16–31.
42. **Киселев С. П.** Метод молекулярной динамики в механике деформированного твердого тела // ПМТФ. — 2014. — Т. 55. — № 3. — С. 113–130.

43. Завшек С., Димаки А. В., Дмитриев А. И., Шилько Е. В., Пездич Й., Псахье С. Г. Метод гибридных клеточных автоматов. Применение к проблеме исследования механического отклика контрастных сред // Физ. мезомеханика. — 2011. — Т. 14. — № 4. — С. 45–55.
44. Klishin S. V., Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F. Discrete element method modification for the transition to a linearly elastic body model, IOP Conf. Series: J. of Physics, 2018, Vol. 973. — 012008.
45. Клишин С. В., Микенина О. А. О коэффициенте бокового распора случайных упаковок дискретных элементов // ФТПРПИ. — 2013. — № 6. — С. 45–52.
46. He Y., Evans T. J., Yu A., and Yang R. Discrete modelling of compaction of non-spherical particles, Powders and Grains, 8th Int. Conf. on Micromech. on Granular Media, 2017, Vol. 140. — 01005.
47. Zheng J. and Hryciw R. D. An image based clump library for DEM simulations, Granular Matter., 2017, Vol. 19, Issue 2. — P. 26–41.
48. Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F. DEM code-based modeling of energy accumulation and release in structurally heterogeneous rock masses, AIP Conf. Proc., 2015, Vol. 1683. — 020121.
49. Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F. Mathematical modeling of deformation of self-stress rock mass surrounding a tunnel, In book: Desiderata Geotechnica, Springer Conference Series, Springer Nature Switzerland, AG, 2019. — P. 79–85.
50. Лавриков С. В. О расчете напряженно-деформированного состояния разупрочняющегося блочного массива вблизи выработки // Физ. мезомеханика. — 2010. — Т. 13. — № 4. — С. 53–63.
51. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. О модели деформирования целиков с учетом эффектов аккумулялирования энергии и разупрочнения материала // ФТПРПИ. — 1994. — № 6. — С. 12–23.
52. Лавриков С. В. К расчету течения геоматериалов в сходящихся каналах с учетом внутреннего трения и дилатансии // ФТПРПИ. — 2010. — № 5. — С. 17–27.
53. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, Физматлит, 1966. — 708 с.
54. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 542 с.
55. Бате К., Вилсон Е. Численные методы и метод конечных элементов / под ред. А. Ф. Смирнова. — М.: Стройиздат, 1982. — 447 с.
56. Волков Е. А. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
57. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. — Екатеринбург: Ин-т машиноведения УрО РАН, 1995. — 190 с.
58. Shuilin Wang, Hong Zheng, Chunguang Li, and Xiurun Ge. A finite element implementation of strain-softening rock mass, Int. J. of Rock Mech. and Min. Sci., 2011, Vol. 48. — P. 67–76.
59. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. О деформировании блочной среды вокруг выработки // ФТПРПИ. — 1990. — № 6. — С. 7–15.
60. Лавриков С. В., Клишин С. В., Микенина О. А. Расчет напряженно-деформированного состояния упругопластического и разупрочняющегося массива горных пород в окрестности выработанного пространства различной геометрии на основе метода конечных элементов / Свид-во о регистрации программы для ЭВМ RU 2019663745, 23.10.2019. Заявка № 2019660823 от 03.09.2019.

Поступила в редакцию 09/VII 2020

После доработки 15/X 2020

Принята к публикации 03/XI 2020