

УДК 536.4  
DOI: 10.15372/PMTF202315398

## ТЕРМОВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОСТЬЮ

А. Г. Князева

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия  
E-mail: anna-knyazeva@mail.ru

Описано поведение материала в условиях поверхностной лазерной обработки при учете плавления. Представлена модель максвелловского типа, учитывающая изменение теплоемкости и вязкости при изменении температуры и состава материала. На основе этой модели сформулирована модель изменения свойств материала плоского слоя подвижным источником тепла. Описан алгоритм численного решения сформулированной задачи. Представлены примеры, показывающие влияние потерь тепла, связанные с плавлением, химических реакций и их ускорения за счет работы напряжений на свойства материала.

**Ключевые слова:** обработка поверхности, плавление, химическая реакция, изменение свойств, вязкоупругие напряжения

**Введение.** При использовании лазерных и электронно-лучевых порошковых 3D-технологий [1–4], моделированию которых посвящено большое количество работ, в процессе обработки материалы претерпевают сложные физико-химические изменения, что не позволяет описать их единой моделью. При математическом моделировании возникает проблема выбора или построения модели, адекватно описывающей поведение как твердой и жидкой фаз материала, так и их смеси. Этим обусловлено разнообразие подходов к моделированию. Так, в традиционной технологии селективного лазерного сплавления [5] исходный порошок представляет собой свободную насыпку с высокой пористостью. Количество частиц порошка в слое невелико (3–7). Сцепление частиц практически отсутствует. При плавлении в области действия луча лазера или электронного луча порошок (или его легкоплавкая часть) переходит из твердого состояния в жидкое и растекается по поверхности тугоплавких частиц. В случае малого количества частиц в слое вызывает сомнение применимость для описания течения расплава линейного закона Дарси, используемого в некоторых работах (см., например, [6]). Размер ванны расплава на 2–3 порядка меньше размеров создаваемого образца. Это приводит к необходимости моделирования процессов на разных масштабах: для образца в целом [7] и для ванны расплава с ее малой окрестностью [8, 9]. При остывании расплава происходит переход в твердую фазу с последующей кристаллизацией и образованием различных структур, зависящих от геометрии и условий охлаждения. Наиболее известными являются методы фазового поля, метод решеточных уравнений Больцмана и метод клеточных автоматов [10–12], которые сложно применять при описании реальных технологических условий со сложными термическими циклами.

---

Работа выполнена в рамках государственного задания Института физики прочности и материаловедения СО РАН (тема FWRW-2022-0003).

Для описания течения порошков в процессах спекания и горячего прессования применимы модели вязких сред, близких к вязкой жидкости [13–16], или модели упруговязко-пластических материалов [17, 18]. Вязкими и (или) упруговязкопластическими свойствами часто характеризуются материалы, претерпевающие структурные превращения [19], твердые материалы с диффузионно-контролируемыми химическими реакциями [20], композиты [21, 22], материалы, используемые в фармацевтике [23], полимеры и биологические ткани [24] и др. Существуют различные варианты моделей вязкоупругих сред для описания сложного реологического поведения материалов [25–29].

В данной работе для описания поведения материала, претерпевающего сложные фазовые изменения в условиях лазерной обработки, используется модель среды максвелловского типа с изменяющимися в окрестности температуры плавления теплоемкостью и вязкостью.

**1. Общие соотношения.** Для изотропного термоупругого тела соотношения между приращениями компонент тензоров напряжений и деформаций можно представить в виде

$$d\sigma_{ij}^e = 2\mu d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\lambda d\varepsilon_{kk} - K dw), \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}^e$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ламе;  $K$  — изотермический модуль всестороннего сжатия;  $w = 3\alpha_T(T - T_0)$  — объемная деформация, зависящая от температуры  $T$ ;  $\alpha_T$  — линейный коэффициент теплового расширения;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $T_0$  — начальная температура.

Из (1) следует

$$\sigma_{kk}^e = 3K(\varepsilon_{kk} - w). \quad (2)$$

Обобщение термоупругой модели для многокомпонентной среды (модели термоупругой диффузии) включает функцию

$$w = 3\left(\alpha_T(T - T_0) + \sum_{k=1}^n \alpha_k(C_k - C_{k,0})\right),$$

где  $\alpha_k$  — коэффициенты “концентрационного” расширения, определяемые подобно коэффициенту теплового расширения;  $C_k$  — массовые концентрации компонентов.

Коэффициенты  $\alpha_k$  можно представить в виде

$$\alpha_k = \frac{1}{3\gamma_0} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial C_k} \right) \Big|_{T, C_l, l \neq k},$$

где  $\gamma$  — удельный объем смеси в текущем состоянии;  $\gamma_0$  — удельный объем смеси в исходном состоянии; индекс “0” соответствует начальному состоянию.

В общей реологической модели вязкоупругого тела [30] используется операторная связь между девиатором тензора вязких напряжений  $s_{ij}^V$  и девиатором тензора полной деформации  $e_{ij}$ :

$$As_{ij}^V = Be_{ij}. \quad (3)$$

Здесь  $A$ ,  $B$  — дифференциальные операторы, линейные по времени:

$$A = a_m \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0,$$

$$B = b_m \frac{d^q}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}} + \dots + b_1 \frac{d}{dt} + b_0,$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad s_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}.$$

Наиболее полно исследованы следующие модели: тело Максвелла, тело Кельвина (Фойгта) и обобщенное линейное тело:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\varkappa} s_{ij}, \quad 2\varkappa \dot{e}_{ij} + 2\mu e_{ij} = s_{ij}, \quad \dot{e}_{ij} + \zeta e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\varkappa} s_{ij}$$

( $\varkappa$  — сдвиговая вязкость;  $\zeta$  — константа материала; точка обозначает производную по времени).

Полагая, что связь между инвариантами описывается уравнением (2), и представляя операторы  $A, B$  в (3) в виде

$$A = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dt} + \frac{1}{2\varkappa}, \quad B = \frac{d}{dt},$$

получаем уравнения модели вязкоупругого тела максвелловского типа

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} + \frac{\mu}{\varkappa} \sigma_{ij} = 2\mu \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \delta_{ij} \left( \frac{d}{dt} (\lambda \varepsilon_{kk} - K w) + \frac{\mu}{\varkappa} K (\varepsilon_{kk} - w) \right). \quad (4)$$

В предельном случае  $\varkappa \rightarrow \infty$  из (4) следует соотношение Дюамеля — Неймана (1), в случае  $\varkappa \rightarrow 0$  имеем соотношение между компонентами  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  для идеальной вязкой жидкости с шаровым тензором напряжений.

В рассматриваемом случае уравнения (4) — адекватная модель, поскольку реагенты и продукты реакции в общем случае могут находиться как в твердом, так и в жидким состояниями. При этом следует учесть особенности изменения свойств при переходе материала из одного состояния в другое.

В окрестности температуры плавления (точки фазового перехода первого рода) теплоемкость резко возрастает, что обусловлено скачкообразным изменением энтропии  $S$  при фазовом переходе жидкость — твердое тело с фиксированной температурой плавления  $T_m$ :

$$\Delta S = S_L - S_s \neq 0.$$

По определению

$$c_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

Следовательно, при  $T \rightarrow T_m$  имеем  $c_p \rightarrow \infty$ .

В общем случае подобное изменение имеет место для коэффициентов теплового расширения и изотермической сжимаемости, поскольку в точке перехода объем также изменяется скачкообразно:  $\Delta\gamma = \gamma_L - \gamma_s \neq 0$ .

Плавление сопровождается изменением реологических свойств. Предположим, что в рамках выбранной реологической модели в окрестности температуры плавления вязкость  $\varkappa$  изменяется, вследствие чего в поведении материала появляются особенности. Для смесей двух веществ, реагентов и продуктов отсутствует единая температура плавления. Плавление происходит в интервале температур, в котором постепенно накапливается жидкая фаза и изменяются свойства материала.

Положим, что плавление системы, состоящей из реагентов и продуктов реакции, происходит в интервале температур плавления  $(T_A, T_B)$ , в котором доля жидкой фазы  $\eta_L$  изменяется от 0 до 1:

$$\eta_L = \begin{cases} 0, & T < T_A, \\ ((T - T_A)/(T_B - T_A))^2, & T_A \leq T < T_B, \\ 1, & T \geq T_B. \end{cases}$$

В этом интервале температур теплоемкость  $c_\varepsilon$  и вязкость  $\varkappa$  зависят от доли жидкой фазы  $\eta_L$ :

$$c_\varepsilon = \left[ c_s + \frac{Q_m}{m} \left( \frac{\partial \eta_L}{\partial T} \right) \right] (1 - \eta_L) + c_L \eta_L, \quad \varkappa = \varkappa_s (1 - \eta_L) + \varkappa_L \eta_L \quad (5)$$

(индекс  $s$  соответствует твердой фазе, индекс  $L$  — жидкой).

Изменение пористости в данной модели не учитывается. Однако следует отметить, что вязкости и теплоемкости порошковой среды, расплава с частицами, полностью расплавленной смеси частиц и конечного материала после затвердевания могут значительно различаться. В настоящее время экспериментально установленные или теоретически обоснованные законы, описывающие изменение вязкости в широком интервале температур, отсутствуют. Для того чтобы учесть отличие свойств исходной порошковой среды от свойств продукта реакции, в (5) можно положить

$$c_s = c_0(1 - \eta) + c_p\eta, \quad \varkappa_s = \varkappa_0(1 - \eta) + \varkappa_p\eta,$$

где  $\eta$  — доля продукта реакции или степень превращения; индекс “0” соответствует исходному порошковому слою; индекс  $p$  — продукту реакции.

**2. Модель процесса обработки плоского слоя.** В приближении плоского напряженного состояния, малых деформаций и при условии, что источник тепла движется вдоль оси  $Ox$  и однородно распределен вдоль оси  $Oy$ , а весь комплекс химических реакций можно описать схемой реагент — продукт реакции, система уравнений модели процесса поверхностной обработки имеет вид

$$\begin{aligned} c_\varepsilon \rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W_{ch} + W_{ext} + D - \alpha_{eff}(T - T_0) - 3K\alpha_T T \left( \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \frac{\mu}{\varkappa} \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varepsilon_{kk} - Kw) + \frac{\mu}{\varkappa} K(\varepsilon_{kk} - w) \right], \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} + \frac{\mu}{\varkappa} \sigma_{yy} &= \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varepsilon_{kk} - Kw) + \frac{\mu}{\varkappa} K(\varepsilon_{kk} - w), \\ 0 &= 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varepsilon_{kk} - Kw) + \frac{\mu}{\varkappa} K(\varepsilon_{kk} - w) \right], \\ \frac{d\eta}{dt} &= \Phi(\eta, \eta_L, T, \Pi), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\eta_L$  — доля жидкой фазы;  $W_{ch} = Q(d\eta/dt)$  — тепловыделение в результате суммарной химической реакции;  $D = \sigma_{xx}(\partial \varepsilon_{xx}/\partial t)$  — вязкая диссипация;  $\alpha_{eff}$  — эффективный коэффициент теплоотдачи в окружающую среду и в подложку;  $\Pi = -\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}$  — работа напряжений;  $\varepsilon_{kk} \approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}$ . Источник тепла представим в виде

$$W_{ext} = \begin{cases} q_0 \exp(-((x - Vt)/R_0)^2), & |y| \leq h_S, \\ 0, & |y| > h_S, \end{cases}$$

где  $q_0 = W_0/(\pi R_0^2 h)$  — максимальная плотность мощности источника тепла, Дж/(м<sup>3</sup> · с);  $W_0$  — мощность источника тепла, движущегося по поверхности;  $h$  — толщина слоя порошка;  $V$  — скорость движения источника тепла вдоль оси  $Ox$ ;  $R_0$  — параметр, пропорциональный эффективному радиусу луча лазера или электронного луча, сканирующих поверхность с высокой частотой вдоль оси  $Oy$ ;  $h_S$  — ширина области сканирования. Если сканирование осуществляется по ширине пластины, то параметр  $h_S$  в модели отсутствует.

Для суммарной реакции имеем

$$w = 3[\alpha_T(T - T_0) + (\alpha - \alpha_0)\eta],$$

где  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  — коэффициенты концентрационного расширения суммарного реагента и суммарного продукта реакции.

Предполагается, что скорость суммарной реакции зависит не только от температуры, но и от работы напряжений. В этом случае

$$\Phi(\eta, \eta_L, T, \Pi) = k_0 \varphi(\eta) \exp\left(-\frac{E_A \pm \alpha_V \Pi}{RT}\right),$$

где  $k_0$  — предэкспоненциальный множитель;  $E_A$  — энергия активации суммарной химической реакции;  $\alpha_V$  — коэффициент чувствительности реакции к работе напряжений  $\Pi$ ;  $\varphi(\eta)$  — функция, учитывающая механизм реакции на микроуровне;  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Полагаем, что на торцах пластины источник тепла отсутствует. В исходном порошке механические возмущения не возникают, т. е. при  $x \rightarrow \infty$ , как и в исходной смеси,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ ,  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} = 0$ .

Таким образом, для того чтобы исследовать взаимовлияние различных физических процессов и проанализировать изменение величин  $T$ ,  $\eta$ ,  $\eta_L$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  в материале с переменной вязкостью, требуется решить систему уравнений (6) с начальными условиями

$$t = 0: \quad T = T_0, \quad \eta = 0, \quad \eta_L = 0, \quad \sigma_{ij} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 0.$$

**3. Задача в безразмерных переменных.** Введем безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \xi = \frac{x}{x_*}, \quad S_i = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_*}, \quad e_i = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_*}.$$

Здесь

$$T_* = T_0 + \frac{Q}{c_0 \rho_s}, \quad x_*^2 = \frac{\lambda_T t_*}{c_0 \rho_s}, \quad t_* = \frac{c_0 \rho_s R T_*^2}{E Q k_0} \exp\left(\frac{E_a}{R T_*}\right),$$

$$\varepsilon_* = 3\alpha_T(T_* - T_0), \quad \sigma_* = K \varepsilon_*.$$

Тогда система уравнений принимает вид

$$F(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \gamma W_{ch}(\theta) + W_{ext} - N_u \theta - \omega(\theta + \sigma) \left( \frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial \tau} \right) + \omega s_{xx} \frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau},$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \gamma W_{ch}(\theta), \quad \frac{\partial^2 s_{xx}}{\partial \xi^2} = \Delta \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial \tau^2},$$

$$\frac{\partial s_{xx}}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau_V} s_{xx} = (3 - 2\gamma_1) \frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma_1 e_{zz} - w) + \frac{1}{\tau_V} ((e_{xx} + e_{zz}) - w) \right),$$

$$\frac{\partial s_{yy}}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau_V} s_{yy} = \frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma_1 (e_{xx} + e_{zz}) - w) + \frac{1}{\tau_V} ((e_{xx} + e_{zz}) - w),$$

$$0 = (3 - 2\gamma_1) \frac{\partial e_{zz}}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma_1 e_{xx} - w) + \frac{1}{\tau_V} ((e_{xx} + e_{zz}) - w) \right).$$

В начальный момент времени  $\tau = 0$  и в области реагентов имеем

$$\theta = 0, \quad \eta = 0, \quad \eta_L = 0, \quad s_{ij} = 0, \quad e_{ij} = 0.$$

Доля жидкой фазы определяется из соотношения

$$\eta_L = \begin{cases} 0, & \theta < \theta_A, \\ ((\theta - \theta_A)/(\theta_B - \theta_A))^2, & \theta_A \leq \theta < \theta_B, \\ 1, & \theta \geq \theta_B. \end{cases}$$

Выражения для величин  $w$ ,  $W_{ch}$ ,  $W_{ext}$ ,  $D$ ,  $\Pi$  в безразмерных переменных имеют вид

$$w = \theta + g\eta,$$

$$W_{ch}(\theta) = \varphi(\eta) \exp\left(\frac{1}{\beta} \frac{\theta - 1 \pm \gamma_V \omega s_{xx} e_{xx}}{\theta + \sigma}\right), \quad W_{ext} = \frac{q}{\delta} \exp\left(-\frac{(\xi + \xi_0 - \bar{V}\tau)^2}{\delta}\right),$$

$$\Pi = -\omega s_{xx} e_{xx}, \quad D = \omega s_{xx} \frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau}, \quad F(\theta) = \left[1 + (\varkappa_p - 1)\eta + H\left(\frac{\partial \eta_L}{\partial \theta}\right)\right](1 - \eta_L) + \varkappa_L \eta_L.$$

Вязкость изменяется в соответствии с соотношением

$$\tau_V = (\tau_0(1 - \eta) + \tau_p \eta)(1 - \eta_L) + \tau_L \eta_L.$$

Модель (6) содержит следующие параметры:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{c_0 \rho_s R T_*^2}{E Q}, \quad \beta = \frac{R T_*}{E_a}, \quad \sigma = \frac{T_0}{T_* - T_0}, \quad \theta_0 = \frac{T_* - T_0}{R T_*^2} E_a \quad \left(\gamma = \theta_0^{-1}, \quad \sigma = \frac{\gamma}{\beta} - 1\right), \\ H &= \frac{Q_m \rho_s}{Q m}, \quad \gamma_V = \frac{\alpha_V T_* c_0 \rho_s}{E_a}, \quad \omega = \frac{3 K \alpha_T \varepsilon_*}{c_0 \rho_s} = \frac{9 K \alpha_T^2 (T_* - T_0)}{c_0 \rho_s}, \quad g = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_T (T_* - T_0)}, \\ \bar{V} &= \frac{V t_*}{x_*}, \quad \delta = \left(\frac{R_0}{x_*}\right)^2, \quad q = \frac{W_0}{\pi h Q \varkappa_T}, \quad N_u = \alpha_{eff} \frac{t_*}{c_0 \rho_s}, \\ \theta_A &= \frac{T_A - T_0}{T_* - T_0}, \quad \theta_B = \frac{T_B - T_0}{T_* - T_0}, \quad \varkappa_L = \frac{c_L}{c_0}, \quad \varkappa_p = \frac{c_p}{c_0} \frac{\lambda}{K} = \gamma_1, \\ \Delta &= \frac{\rho_s x_*^2}{t_*^2 K} = \frac{(x_*/t_*)^2}{K/\rho_s}, \quad \tau_0 = \frac{\varkappa_0}{\mu t_*}, \quad \tau_p = \frac{\varkappa_p}{\mu t_*}, \quad \tau_L = \frac{\varkappa_L}{\mu t_*} \end{aligned}$$

( $\tau_0, \tau_p, \tau_L$  — времена релаксации вязких напряжений для различных состояний вещества).

Зафиксировав часть параметров, например для смеси порошков титана и алюминия, которая используется в комбинированной 3D-технологии [31] получения Ti<sub>3</sub>Al, и используя справочные данные, находим  $\gamma_1 \approx 0,638$ ,  $\theta_A = 0,72$ ,  $\theta_B = 1,85$ ,  $H \approx 0,318$ ,  $\theta_0 = 10 \div 18$ ,  $\sigma = 0,30 \div 0,35$ ,  $\omega = 0,03 \div 0,08$  (адиабатическая температура для данного состава  $T_* = 1185$  К).

Характерное время реакций — величина, зависящая от температуры и факторов, которые не учитываются в макромоделях, что приводит к увеличению области изменения времен релаксации вязких напряжений. Можно предположить, что  $\tau_L < \tau_0 < \tau_p$ . В зависимости от характерного времени реакции параметр  $\Delta$  может находиться в любом временном диапазоне  $\tau_L < \tau_0 < \tau_p$ , что будет приводить к появлению различных эффектов.

Параметры  $V$ ,  $\delta$ ,  $q$ ,  $N_u$  зависят от условий эксперимента. В данной работе примем  $\sigma = 0,33$ ,  $\theta_0 = 10$ ,  $\varkappa_p = 1,2$ ,  $\varkappa_L = 1$ ,  $\omega = 0,65$ ,  $\tau_L = 0,05$ ,  $\tau_0 = 0,1$ ,  $\tau_p = 0,2$ ,  $\Delta = 0,03$ ,  $\delta = 0,01$  и проанализируем влияние вязкости на начальной стадии процесса синтеза.

**4. Метод решения задачи.** Задача решается численно. Для этого система уравнений приведена к виду

$$F(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - N_u \theta + G; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 s_{xx}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau_V} \frac{\partial s_{xx}}{\partial \tau} = \frac{\alpha(3 - \gamma_1)}{\Delta} \frac{\partial^2 s_{xx}}{\partial \xi^2} + U; \quad (8)$$

$$\frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau} = V_x, \quad \frac{\partial e_{zz}}{\partial \tau} = V_z; \quad (9)$$

$$\frac{\partial s_{yy}}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau_V} s_{yy} = \gamma_1(V_x + V_z) - \Omega + \frac{1}{\tau_V} (e_{xx} + e_{zz} - \bar{\omega}), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
 V_x &= \frac{1}{\alpha(1-\gamma_1)} \left( \frac{\partial s_{xx}}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau_V} s_{xx} \right) + \frac{1}{3-\gamma_1} \left( \Omega - \frac{1}{\tau_V} (e_{xx} + e_{zz} - \bar{\omega}) \right), \\
 V_z &= -\frac{1}{3-2\gamma_1} \left( \gamma_1 V_x - \Omega + \frac{1}{\tau_V} (e_{xx} + e_{zz} - \bar{\omega}) \right), \\
 U &= -\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{\tau_V} (V_x + V_z - \Omega) + (\alpha(e_{xx} + e_{zz} - \bar{\omega}) - s_{xx}) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\tau_V} \right), \\
 G &= F_{ch}(\theta) + \bar{W}_{ext} - \omega(\theta + \sigma)(V_x + V_z) + \omega s_{xx} V_x, \quad \alpha = \frac{3(1-\gamma_1)}{3-2\gamma_1}, \quad \Omega = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau}.
 \end{aligned}$$

Кинетическое уравнение не изменяется.

Для решения уравнений (7), (8) используются неявная разностная схема и метод прогонки, уравнения (9) решаются по явной схеме Эйлера, для решения уравнения (10) и уравнения кинетики используется неявная схема Эйлера.

На каждом шаге по времени последовательно рассчитываются доля жидкой фазы, теплоемкость, вязкость, диссипация, температура, степень превращения, химическое тепловыделение, объемное расширение и его производная, напряжения  $s_{xx}$ , скорости  $V_x$ ,  $V_z$ ,

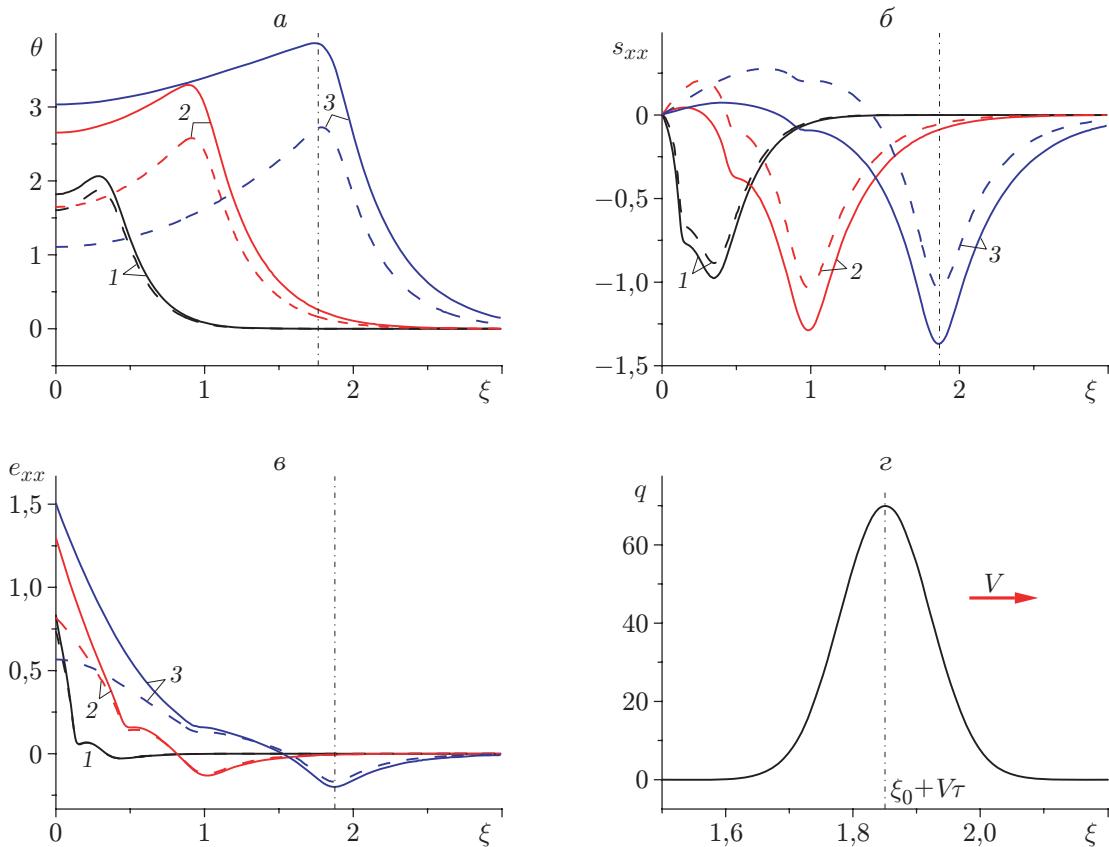


Рис. 1. Распределения температуры  $\theta$  (а), компонент тензоров напряжений  $s_{xx}$  (б) и деформаций  $e_{xx}$  (в) и мощности источника тепла  $q$  (г) при  $\omega = 0,065$  в отсутствие плавления и химических реакций в различные моменты времени: сплошные линии —  $N_u = 0$ , штриховые —  $N_u = 2,5$ ; 1 —  $\tau = 0,1$ , 2 —  $\tau = 0,35$ , 3 —  $\tau = 0,7$

деформации  $e_{xx}$ ,  $e_{zz}$ , напряжения  $s_{yy}$ . Итерации не используются. Сходимость проверяется путем сгущения разностной сетки и варьирования шага по времени. Удовлетворительная сходимость имела место при незначительном различии времен релаксации и параметра  $\Delta$ .

**5. Анализ результатов.** Пусть источник начинает движение из точки  $\xi_0 = 0,1$ . Химические реакции и плавление отсутствуют. Очевидно, что по мере движения источника тепла вдоль поверхности зона прогрева постепенно увеличивается (рис. 1, *a*), максимум напряжений (рис. 1, *б*) сдвигается вместе с максимумом температуры, деформации (рис. 1, *в*) на поверхности отличны от нуля, что определяется заданными граничными условиями. Положения максимумов напряжений и температуры соответствуют положению максимума источника тепла (рис. 1, *г*). Положение экстремумов в момент времени  $\tau = 0,7$  показано штрихпунктирной линией, перпендикулярной оси абсцисс.

Учет потерь тепла, очевидно, приводит к уменьшению температуры и, соответственно, напряжений и деформаций (штриховые линии на рис. 1, *а–в*). При этом напряжения меняют знак. В дальнейшем процесс выходит на квазистационарный режим, которому соответствуют постоянные максимальные значения температуры, напряжений и деформаций.

При учете в модели плавления (рис. 2, *а–в*) значения всех параметров изменяются. Диапазон значений температуры плавления показан штрихпунктирными линиями на

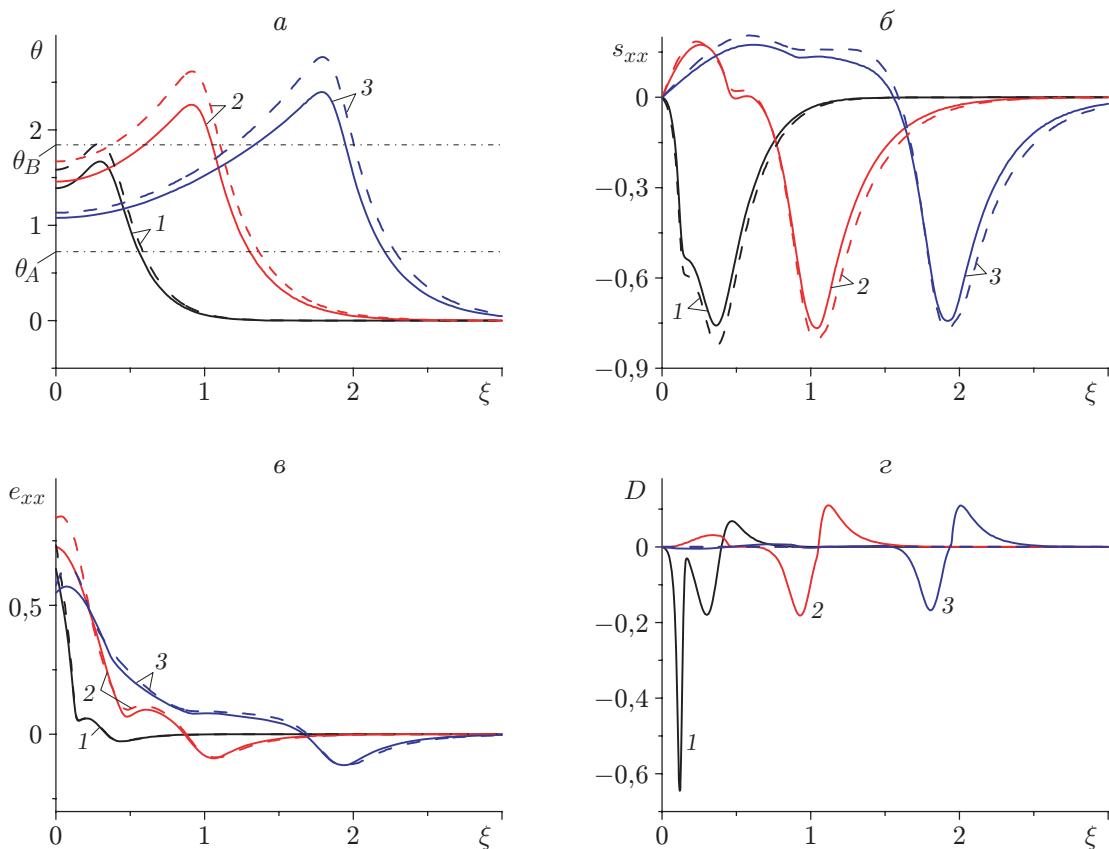


Рис. 2. Распределения температуры  $\theta$  (*а*), компонент тензоров напряжений  $s_{xx}$  (*б*) и деформаций  $e_{xx}$  (*в*) и вязкой диссипации  $D$  (*г*) при  $N_u = 2,5$  в различные моменты времени:

сплошные линии — связанный модель ( $\omega = 0,2$ ), штриховые — несвязанный модель ( $\omega = 0$ ); 1 —  $\tau = 0,1$ , 2 —  $\tau = 0,35$ , 3 —  $\tau = 0,7$

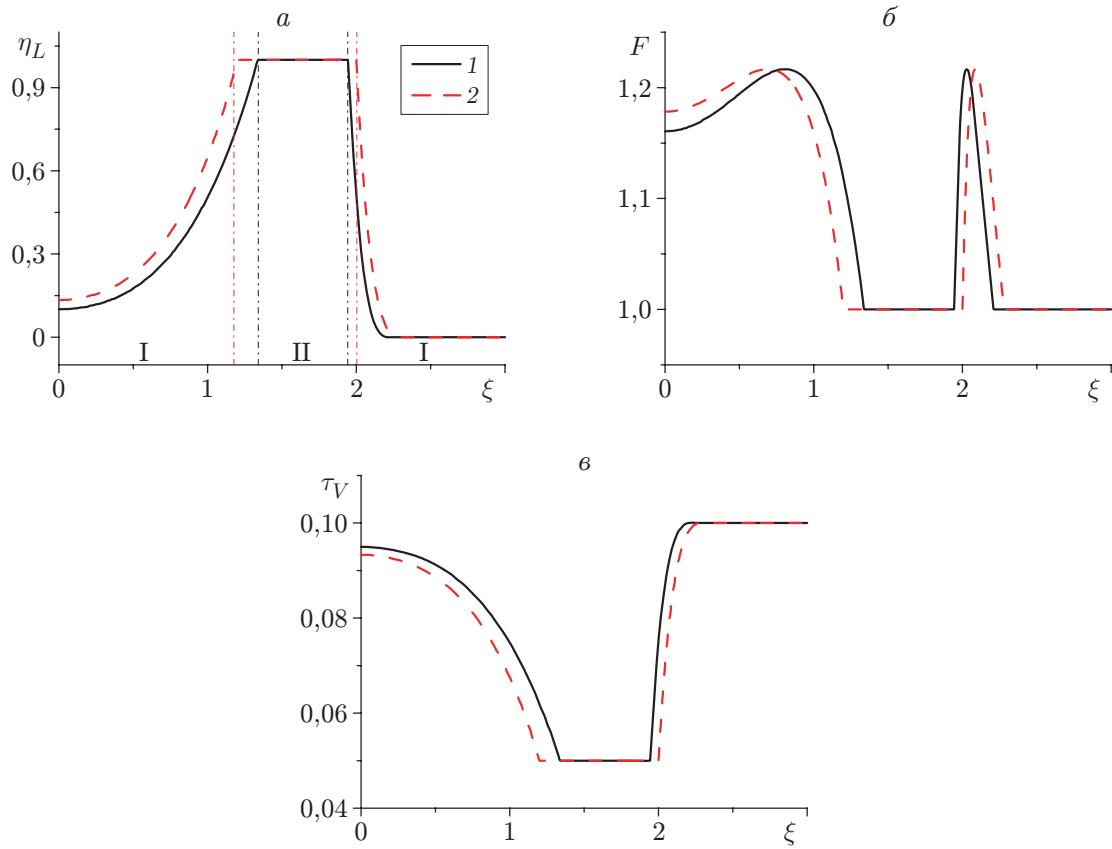


Рис. 3. Распределения доли жидкой фазы  $\eta_L$  (а), безразмерных теплоемкости  $F$  (б) и вязкости  $\tau_V$  (в) при  $N_u = 2,5$ ,  $\tau = 0,7$ :  
 I — двухфазная зона, II — зона расплава; 1 — связанная модель ( $\omega = 0,2$ ), 2 — несвязанная модель ( $\omega = 0$ )

рис. 2, а. Максимальные потери на диссиацию наблюдаются на начальной стадии процесса (рис. 2, г).

Сравнение рис. 1, 2 показывает, что при данном наборе параметров учет связанности процессов приводит к незначительному изменению температуры и компонент тензоров напряжений и деформаций. Однако при учете связанности уменьшаются размеры области, занятой расплавом, и двухфазной зоны, соответственно изменяются теплоемкость и вязкость (рис. 3).

При наличии химической реакции картина существенно меняется (рис. 4). Во-первых, вследствие тепловыделения в ходе реакции повышается температура. Распределения напряжения и деформации становятся более немонотонными, что обусловлено немонотонным изменением теплоемкости и вязкости. Во-вторых, если напряжения ускоряют реакцию (штриховые кривые на рис. 3), то она ускоряется перед движущимся источником тепла, что приводит к выделению тепла перед внешним источником и дополнительному искажению профилей напряжений и деформаций. Если напряжения замедляют реакцию, то область расплава и зона реакции сужаются. При появлении химических напряжений ( $g \neq 0$ ) также возможно ускорение реакции перед движущимся источником и выход ее на стационарный режим.

**Заключение.** Таким образом, в работе представлена связанная модель обработки поверхности подвижным источником тепла, построенная на основе модели вязкоупругой

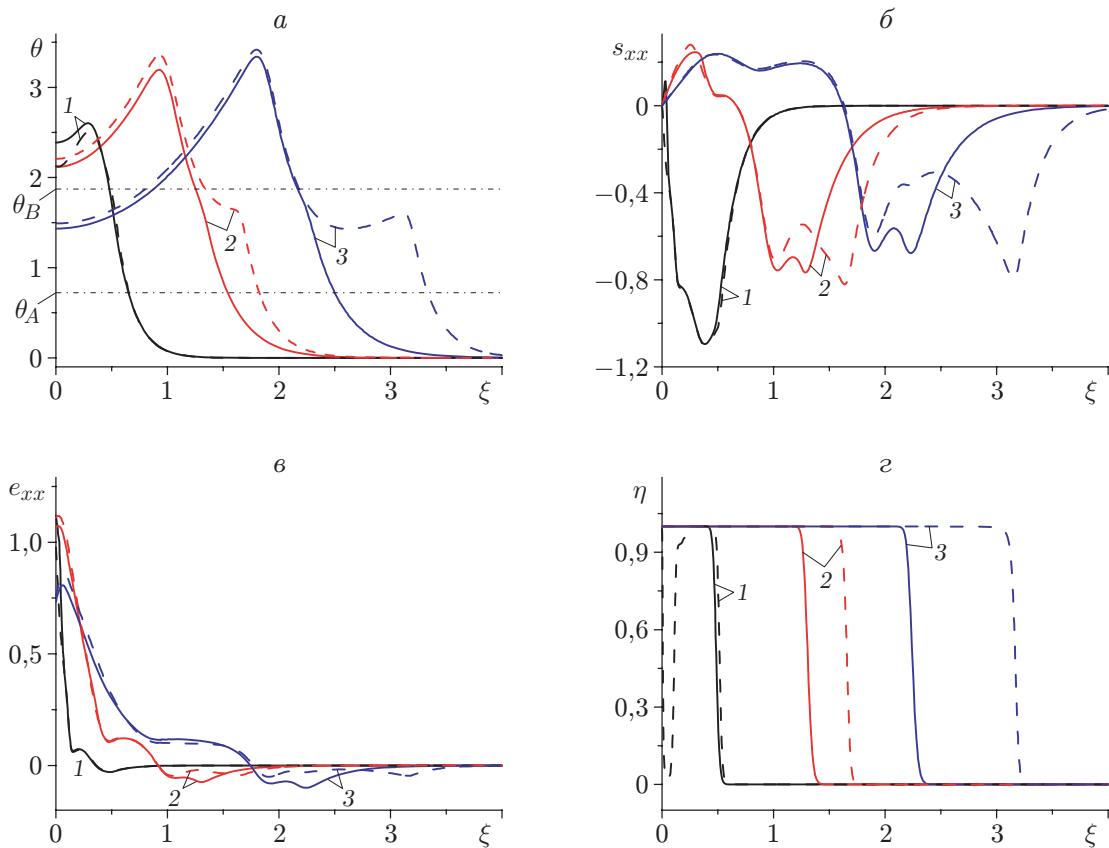


Рис. 4. Распределения температуры  $\theta$  (*a*), компонент тензоров напряжений  $s_{xx}$  (*б*) и деформаций  $e_{xx}$  (*в*) и степени превращения  $\eta$  (*г*) при  $N_u = 2,5$ ,  $\omega = 0,065$ ,  $g = 0$  в различные моменты времени:

1 —  $\tau = 0,1$ , 2 —  $\tau = 0,35$ , 3 —  $\tau = 0,7$ ; сплошные линии —  $\alpha_V = 0$ , штриховые —  $\alpha_V = 100$

среды максвелловского типа с учетом изменения при плавлении теплоемкости и вязкости. Разработан алгоритм численного решения задачи. Исследовано влияние плавления на распределения компонент тензоров напряжений и деформаций. Показано, что связность процессов теплопереноса и деформирования приводит к сужению области расплава. Обнаружено, что вследствие влияния напряжений химическая реакция перед движущимся источником тепла ускоряется. Однако вследствие отсутствия данных о величине параметра  $\alpha$  количественная оценка ускорения реакции затруднена. В модели может быть также учтено изменение других величин, например коэффициента теплового расширения, в окрестности температуры плавления. Кроме того, при учете разных режимов сканирования поверхности, приводящих к сложным термическим циклам, могут появиться новые эффекты [32].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Jandyal A., Chaturvedi I., Wazir I., et al. 3D printing: A review of processes, materials and applications in industry 4.0 // Sustainable Operat. Comput. 2022. V. 3. P. 33–42.
2. Durai Murugan P., Vijayananth S., Natarajan M. P., et al. A current state of metal additive manufacturing methods: A review // Materials Today: Proc. 2022. V. 59, pt 2. P. 1277–1283.

3. **Маликов А. Г., Голышев А. А., Витошкин И. Е.** Современные тенденции лазерной сварки и аддитивных технологий (обзор) // ПМТФ. 2023. Т. 64, № 1. С. 36–59.
4. **Колубаев Е. А., Рубцов В. Е., Чумаевский А. В., Астафурова Е. Г.** Научные подходы к микро-, мезо- и макроструктурному дизайну объемных металлических и полиметаллических материалов с использованием метода электронно-лучевого аддитивного производства // Физ. мезомеханика. 2022. Т. 25, № 4. С. 5–18.
5. **Nandhakumar R., Venkatesan K.** A process parameters review on selective laser melting-based additive manufacturing of single and multi-material: Microstructure, physical properties, tribological, and surface roughness // Materials Today Comm. 2023. V. 35. 105538.
6. **Низьев В. Г., Колдоба А. В., Мирзаде Ф. Х. и др.** Численное моделирование плавления двухкомпонентных порошков при лазерном спекании // Мат. моделирование. 2011. Т. 23, № 4. С. 90–102.
7. **Ökten K., Biyikoğlu A.** Development of thermal model for the determination of SLM process parameters // Optics Laser Technol. 2021. V. 137. 106825.
8. **Li Sh., Liu D., Mi H., et al.** Numerical simulation on evolution process of molten pool and solidification characteristics of melt track in selective laser melting of ceramic powder // Ceramics Intern. 2022. V. 48. P. 18302–18315.
9. **He Q., Xia H., Liu J., et al.** Modeling and numerical studies of selective laser melting: Multiphase flow, solidification and heat transfer // Materials Design. 2020. V. 196. 109115.
10. **Li J., Zhou X., Brochu M., et al.** Solidification microstructure simulation of Ti-6Al-4V in metal additive manufacturing: A review // Additive Manufactur. 2020. V. 31. 100989.
11. **Zhao F., Ao X., Xia H., et al.** Simulations of microstructure coupling with moving molten pool by selective laser melting using a cellular automaton // Materials Design. 2020. V. 185. 108230.
12. **Yang M., Wang L., Yan W.** Phase-field modeling of grain evolutions in additive manufacturing from nucleation, growth, to coarsening // npj Comput. Materials. 2021. V. 17. 56.
13. **Ковальченко М. С.** Теоретические основы горячей обработки пористых материалов давлением. Киев: Наук. думка, 1980.
14. **Jing Qi, Liu Q., Wang D., et al.** Calculation model for drag coefficient and multi-phase flow characteristics in dust removal process: Comparison between flake aluminum powder and spherical aluminum powder // Powder Technol. 2022. V. 405. 117550.
15. **Скороход В. В.** Реологические основы теории спекания. Киев: Наук. думка, 1972.
16. **Olevsky E. A.** Theory of sintering: from discrete to continuum // Materials Sci. Engng. R: Reports. 1998. V. 23, iss. 2. P. 41–100.
17. **Бураго Н. Г., Никитин И. С.** Математическая модель и алгоритм расчета прессования и спекания // Мат. моделирование. 2019. Т. 31, № 2. С. 3–17.
18. **Друянов Б. А.** Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989.
19. **Трусов П. В., Кондратьев Н. С.** Двухуровневая упруговязкопластическая модель: применение к анализу эволюции зеренной структуры при статической рекристаллизации // Физ. мезомеханика. 2018. Т. 21, № 2. С. 21–32.
20. **Poluektov M., Freidin A. B., Figiel L.** Modelling stress-affected chemical reactions in non-linear viscoelastic solids with application to lithiation reaction in spherical Si particles // Intern. J. Engng Sci. 2018. V. 128. P. 44–62.
21. **Li H., Luo X., Ma F., Zhang Y.** Micromechanics modeling of viscoelastic asphalt-filler composite system with and without fatigue cracks // Materials Design. 2021. V. 209. 109983.
22. **Янковский А. П.** Вязкоупругопластическое деформирование пластин с пространственными структурами армирования // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 118–132.

23. Léo Desbois L., Tchoreloff P., Mazel V. Characterization and modeling of the viscoelasticity of pharmaceutical tablets // Intern. J. Pharmaceut. 2020. V. 587. 119695.
24. Xu Q., Engquist B., Solaimanian M., Yan K. A new nonlinear viscoelastic model and mathematical solution of solids for improving prediction accuracy // Sci. Rep. 2020. V. 10. 2202.
25. Giorgi C., Morro A. Magneto-viscoelastic materials: Memory functionals and rate equations // Materials. 2022. V. 15. 6699.
26. Годунов С. К., Пешков И. М. Термодинамически согласованная нелинейная модель упругопластической среды Максвелла // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 8. С. 1481–1498.
27. Мержиеевский Л. А., Реснянский А. Д., Роменский Е. И. Модель вязкоупругого композита с микронапряжениями // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1992. Т. 22. С. 151–167.
28. Пухначев В. В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 116–126.
29. Шитикова М. В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 3–40.
30. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.: Мир, 1964.
31. Shishkovsky I., Missemmer F., Smurov I. Direct metal deposition of functional graded structures in Ti-Al system // Phys. Procedia. 2012. V. 39. P. 382–391.
32. Князева А. Г. Нестационарная термокинетическая модель лазерного сканирования поверхности // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 6. С. 130–137.

*Поступила в редакцию 3/X 2023 г.,*

*после доработки — 19/X 2023 г.*

*Принята к публикации 30/X 2023 г.*