

УДК 536.4

DOI: 10.15372/PMTF202315398

ТЕРМОВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОСТЬЮ

А. Г. Князева

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

E-mail: anna-knyazeva@mail.ru

Описано поведение материала в условиях поверхностной лазерной обработки при учете плавления. Представлена модель максвелловского типа, учитывающая изменение теплоемкости и вязкости при изменении температуры и состава материала. На основе этой модели сформулирована модель изменения свойств материала плоского слоя подвижным источником тепла. Описан алгоритм численного решения сформулированной задачи. Представлены примеры, показывающие влияние потерь тепла, связанности, плавления, химических реакций и их ускорения за счет работы напряжений на свойства материала.

Ключевые слова: обработка поверхности, плавление, химическая реакция, изменение свойств, вязкоупругие напряжения

Введение. При использовании лазерных и электронно-лучевых порошковых 3D-технологий [1–4], моделированию которых посвящено большое количество работ, в процессе обработки материалы претерпевают сложные физико-химические изменения, что не позволяет описать их единой моделью. При математическом моделировании возникает проблема выбора или построения модели, адекватно описывающей поведение как твердой и жидкой фаз материала, так и их смеси. Этим обусловлено разнообразие подходов к моделированию. Так, в традиционной технологии селективного лазерного сплавления [5] исходный порошок представляет собой свободную насыпку с высокой пористостью. Количество частиц порошка в слое невелико (3–7). Сцепление частиц практически отсутствует. При плавлении в области действия луча лазера или электронного луча порошок (или его легкоплавкая часть) переходит из твердого состояния в жидкое и растекается по поверхности тугоплавких частиц. В случае малого количества частиц в слое вызывает сомнение применимость для описания течения расплава линейного закона Дарси, используемого в некоторых работах (см., например, [6]). Размер ванны расплава на 2–3 порядка меньше размеров создаваемого образца. Это приводит к необходимости моделирования процессов на разных масштабах: для образца в целом [7] и для ванны расплава с ее малой окрестностью [8, 9]. При остывании расплава происходит переход в твердую фазу с последующей кристаллизацией и образованием различных структур, зависящих от геометрии и условий охлаждения. Наиболее известными являются методы фазового поля, метод решеточных уравнений Больцмана и метод клеточных автоматов [10–12], которые сложно применять при описании реальных технологических условий со сложными термическими циклами.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института физики прочности и материаловедения СО РАН (тема FWRW-2022-0003).

© Князева А. Г., 2024

Для описания течения порошков в процессах спекания и горячего прессования применимы модели вязких сред, близких к вязкой жидкости [13–16], или модели упруговязкопластических материалов [17, 18]. Вязкими и (или) упруговязкопластическими свойствами часто характеризуются материалы, претерпевающие структурные превращения [19], твердые материалы с диффузионно-контролируемыми химическими реакциями [20], композиты [21, 22], материалы, используемые в фармацевтике [23], полимеры и биологические ткани [24] и др. Существуют различные варианты моделей вязкоупругих сред для описания сложного реологического поведения материалов [25–29].

В данной работе для описания поведения материала, претерпевающего сложные фазовые изменения в условиях лазерной обработки, используется модель среды максвелловского типа с изменяющимися в окрестности температуры плавления теплоемкостью и вязкостью.

1. Общие соотношения. Для изотропного термоупругого тела соотношения между приращениями компонент тензоров напряжений и деформаций можно представить в виде

$$d\sigma_{ij}^e = 2\mu d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\lambda d\varepsilon_{kk} - K dw), \quad (1)$$

где σ_{ij}^e , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций; λ , μ — коэффициенты Ламе; K — изотермический модуль всестороннего сжатия; $w = 3\alpha_T(T - T_0)$ — объемная деформация, зависящая от температуры T ; α_T — линейный коэффициент теплового расширения; δ_{ij} — символ Кронекера; T_0 — начальная температура.

Из (1) следует

$$\sigma_{kk}^e = 3K(\varepsilon_{kk} - w). \quad (2)$$

Обобщение термоупругой модели для многокомпонентной среды (модели термоупругой диффузии) включает функцию

$$w = 3\left(\alpha_T(T - T_0) + \sum_{k=1}^n \alpha_k(C_k - C_{k,0})\right),$$

где α_k — коэффициенты “концентрационного” расширения, определяемые подобно коэффициенту теплового расширения; C_k — массовые концентрации компонентов.

Коэффициенты α_k можно представить в виде

$$\alpha_k = \frac{1}{3\gamma_0} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial C_k} \right) \Big|_{T, C_l, l \neq k},$$

где γ — удельный объем смеси в текущем состоянии; γ_0 — удельный объем смеси в исходном состоянии; индекс “0” соответствует начальному состоянию.

В общей реологической модели вязкоупругого тела [30] используется операторная связь между девиатором тензора вязких напряжений s_{ij}^V и девиатором тензора полной деформации e_{ij} :

$$As_{ij}^V = Be_{ij}. \quad (3)$$

Здесь A , B — дифференциальные операторы, линейные по времени:

$$A = a_m \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0,$$

$$B = b_m \frac{d^q}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}} + \dots + b_1 \frac{d}{dt} + b_0,$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad s_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}.$$

Наиболее полно исследованы следующие модели: тело Максвелла, тело Кельвина (Фойгта) и обобщенное линейное тело:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\kappa} s_{ij}, \quad 2\kappa \dot{e}_{ij} + 2\mu e_{ij} = s_{ij}, \quad \dot{e}_{ij} + \zeta e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\kappa} s_{ij}$$

(κ — сдвиговая вязкость; ζ — константа материала; точка обозначает производную по времени).

Полагая, что связь между инвариантами описывается уравнением (2), и представляя операторы A , B в (3) в виде

$$A = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dt} + \frac{1}{2\kappa}, \quad B = \frac{d}{dt},$$

получаем уравнения модели вязкоупругого тела максвелловского типа

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} + \frac{\mu}{\kappa} \sigma_{ij} = 2\mu \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \delta_{ij} \left(\frac{d}{dt} (\lambda \varepsilon_{kk} - Kw) + \frac{\mu}{\kappa} K (\varepsilon_{kk} - w) \right). \quad (4)$$

В предельном случае $\kappa \rightarrow \infty$ из (4) следует соотношение Дюамеля — Неймана (1), в случае $\kappa \rightarrow 0$ имеем соотношение между компонентами σ_{ij} и ε_{ij} для идеальной вязкой жидкости с шаровым тензором напряжений.

В рассматриваемом случае уравнения (4) — адекватная модель, поскольку реагенты и продукты реакции в общем случае могут находиться как в твердом, так и в жидком состоянии. При этом следует учесть особенности изменения свойств при переходе материала из одного состояния в другое.

В окрестности температуры плавления (точки фазового перехода первого рода) теплоемкость резко возрастает, что обусловлено скачкообразным изменением энтропии S при фазовом переходе жидкость — твердое тело с фиксированной температурой плавления T_m :

$$\Delta S = S_L - S_s \neq 0.$$

По определению

$$c_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

Следовательно, при $T \rightarrow T_m$ имеем $c_p \rightarrow \infty$.

В общем случае подобное изменение имеет место для коэффициентов теплового расширения и изотермической сжимаемости, поскольку в точке перехода объем также изменяется скачкообразно: $\Delta \gamma = \gamma_L - \gamma_s \neq 0$.

Плавление сопровождается изменением реологических свойств. Предположим, что в рамках выбранной реологической модели в окрестности температуры плавления вязкость κ изменяется, вследствие чего в поведении материала появляются особенности. Для смесей двух веществ, реагентов и продуктов отсутствует единая температура плавления. Плавление происходит в интервале температур, в котором постепенно накапливается жидкая фаза и изменяются свойства материала.

Положим, что плавление системы, состоящей из реагентов и продуктов реакции, происходит в интервале температур плавления (T_A, T_B) , в котором доля жидкой фазы η_L изменяется от 0 до 1:

$$\eta_L = \begin{cases} 0, & T < T_A, \\ ((T - T_A)/(T_B - T_A))^2, & T_A \leq T < T_B, \\ 1, & T \geq T_B. \end{cases}$$

В этом интервале температур теплоемкость c_ε и вязкость κ зависят от доли жидкой фазы η_L :

$$c_\varepsilon = \left[c_s + \frac{Q_m}{m} \left(\frac{\partial \eta_L}{\partial T} \right) \right] (1 - \eta_L) + c_L \eta_L, \quad \kappa = \kappa_s (1 - \eta_L) + \kappa_L \eta_L \quad (5)$$

(индекс s соответствует твердой фазе, индекс L — жидкой).

Изменение пористости в данной модели не учитывается. Однако следует отметить, что вязкости и теплоемкости порошковой среды, расплава с частицами, полностью расплавленной смеси частиц и конечного материала после затвердевания могут значительно различаться. В настоящее время экспериментально установленные или теоретически обоснованные законы, описывающие изменение вязкости в широком интервале температур, отсутствуют. Для того чтобы учесть отличие свойств исходной порошковой среды от свойств продукта реакции, в (5) можно положить

$$c_s = c_0(1 - \eta) + c_p\eta, \quad \varkappa_s = \varkappa_0(1 - \eta) + \varkappa_p\eta,$$

где η — доля продукта реакции или степень превращения; индекс “0” соответствует исходному порошковому слою; индекс p — продукту реакции.

2. Модель процесса обработки плоского слоя. В приближении плоского напряженного состояния, малых деформаций и при условии, что источник тепла движется вдоль оси Ox и однородно распределен вдоль оси Oy , а весь комплекс химических реакций можно описать схемой реагент — продукт реакции, система уравнений модели поверхностной обработки имеет вид

$$\begin{aligned} c_\varepsilon \rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W_{ch} + W_{ext} + D - \alpha_{eff}(T - T_0) - 3K\alpha_T T \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \frac{\mu}{\varkappa} \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varepsilon_{kk} - Kw) + \frac{\mu}{\varkappa} K(\varepsilon_{kk} - w) \right], \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} + \frac{\mu}{\varkappa} \sigma_{yy} &= \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varepsilon_{kk} - Kw) + \frac{\mu}{\varkappa} K(\varepsilon_{kk} - w), \\ 0 &= 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varepsilon_{kk} - Kw) + \frac{\mu}{\varkappa} K(\varepsilon_{kk} - w) \right], \\ \frac{d\eta}{dt} &= \Phi(\eta, \eta_L, T, \Pi), \end{aligned} \quad (6)$$

где η_L — доля жидкой фазы; $W_{ch} = Q(d\eta/dt)$ — тепловыделение в результате суммарной химической реакции; $D = \sigma_{xx}(\partial \varepsilon_{xx}/\partial t)$ — вязкая диссипация; α_{eff} — эффективный коэффициент теплоотдачи в окружающую среду и в подложку; $\Pi = -\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}$ — работа напряжений; $\varepsilon_{kk} \approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}$. Источник тепла представим в виде

$$W_{ext} = \begin{cases} q_0 \exp(-((x - Vt)/R_0)^2), & |y| \leq h_S, \\ 0, & |y| > h_S, \end{cases}$$

где $q_0 = W_0/(\pi R_0^2 h)$ — максимальная плотность мощности источника тепла, Дж/(м³·с); W_0 — мощность источника тепла, движущегося по поверхности; h — толщина слоя порошка; V — скорость движения источника тепла вдоль оси Ox ; R_0 — параметр, пропорциональный эффективному радиусу луча лазера или электронного луча, сканирующих поверхность с высокой частотой вдоль оси Oy ; h_S — ширина области сканирования. Если сканирование осуществляется по ширине пластины, то параметр h_S в модели отсутствует.

Для суммарной реакции имеем

$$w = 3[\alpha_T(T - T_0) + (\alpha - \alpha_0)\eta],$$

где α , α_0 — коэффициенты концентрационного расширения суммарного реагента и суммарного продукта реакции.

Предполагается, что скорость суммарной реакции зависит не только от температуры, но и от работы напряжений. В этом случае

$$\Phi(\eta, \eta_L, T, \Pi) = k_0 \varphi(\eta) \exp \left(- \frac{E_A \pm \alpha_V \Pi}{RT} \right),$$

где k_0 — предэкспоненциальный множитель; E_A — энергия активации суммарной химической реакции; α_V — коэффициент чувствительности реакции к работе напряжений Π ; $\varphi(\eta)$ — функция, учитывающая механизм реакции на микроуровне; R — универсальная газовая постоянная.

Полагаем, что на торцах пластины источник тепла отсутствует. В исходном порошке механические возмущения не возникают, т. е. при $x \rightarrow \infty$, как и в исходной смеси, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} = 0$.

Таким образом, для того чтобы исследовать взаимодействие различных физических процессов и проанализировать изменение величин T , η , η_L , σ_{xx} , ε_{xx} , σ_{yy} , ε_{zz} в материале с переменной вязкостью, требуется решить систему уравнений (6) с начальными условиями

$$t = 0: \quad T = T_0, \quad \eta = 0, \quad \eta_L = 0, \quad \sigma_{ij} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 0.$$

3. Задача в безразмерных переменных. Введем безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \xi = \frac{x}{x_*}, \quad S_i = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_*}, \quad e_i = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_*}.$$

Здесь

$$T_* = T_0 + \frac{Q}{c_0 \rho_s}, \quad x_*^2 = \frac{\lambda_T t_*}{c_0 \rho_s}, \quad t_* = \frac{c_0 \rho_s R T_*^2}{E Q k_0} \exp \left(\frac{E_a}{R T_*} \right), \\ \varepsilon_* = 3 \alpha_T (T_* - T_0), \quad \sigma_* = K \varepsilon_*.$$

Тогда система уравнений принимает вид

$$F(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \gamma W_{ch}(\theta) + W_{ext} - N_u \theta - \omega(\theta + \sigma) \left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial \tau} \right) + \omega_{sxx} \frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau}, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = \gamma W_{ch}(\theta), \quad \frac{\partial^2 s_{xx}}{\partial \xi^2} = \Delta \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial s_{xx}}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau_V} s_{xx} = (3 - 2\gamma_1) \frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma_1 e_{zz} - w) + \frac{1}{\tau_V} ((e_{xx} + e_{zz}) - w) \right), \\ \frac{\partial s_{yy}}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau_V} s_{yy} = \frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma_1 (e_{xx} + e_{zz}) - w) + \frac{1}{\tau_V} ((e_{xx} + e_{zz}) - w), \\ 0 = (3 - 2\gamma_1) \frac{\partial e_{zz}}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma_1 e_{xx} - w) + \frac{1}{\tau_V} ((e_{xx} + e_{zz}) - w) \right).$$

В начальный момент времени $\tau = 0$ и в области реагентов имеем

$$\theta = 0, \quad \eta = 0, \quad \eta_L = 0, \quad s_{ij} = 0, \quad e_{ij} = 0.$$

Доля жидкой фазы определяется из соотношения

$$\eta_L = \begin{cases} 0, & \theta < \theta_A, \\ ((\theta - \theta_A)/(\theta_B - \theta_A))^2, & \theta_A \leq \theta < \theta_B, \\ 1, & \theta \geq \theta_B. \end{cases}$$

Выражения для величин w , W_{ch} , W_{ext} , D , Π в безразмерных переменных имеют вид

$$w = \theta + g\eta,$$

$$W_{ch}(\theta) = \varphi(\eta) \exp\left(\frac{1}{\beta} \frac{\theta - 1 \pm \gamma_V \omega s_{xx} e_{xx}}{\theta + \sigma}\right), \quad W_{ext} = \frac{q}{\delta} \exp\left(-\frac{(\xi + \xi_0 - \bar{V}\tau)^2}{\delta}\right),$$

$$\Pi = -\omega s_{xx} e_{xx}, \quad D = \omega s_{xx} \frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau}, \quad F(\theta) = \left[1 + (\kappa_p - 1)\eta + H\left(\frac{\partial \eta_L}{\partial \theta}\right)\right](1 - \eta_L) + \kappa_L \eta_L.$$

Вязкость изменяется в соответствии с соотношением

$$\tau_V = (\tau_0(1 - \eta) + \tau_p \eta)(1 - \eta_L) + \tau_L \eta_L.$$

Модель (6) содержит следующие параметры:

$$\gamma = \frac{c_0 \rho_s R T_*^2}{E Q}, \quad \beta = \frac{R T_*}{E_a}, \quad \sigma = \frac{T_0}{T_* - T_0}, \quad \theta_0 = \frac{T_* - T_0}{R T_*^2} E_a \quad \left(\gamma = \theta_0^{-1}, \quad \sigma = \frac{\gamma}{\beta} - 1\right),$$

$$H = \frac{Q_m \rho_s}{Q m}, \quad \gamma_V = \frac{\alpha_V T_* c_0 \rho_s}{E_a}, \quad \omega = \frac{3 K \alpha_T \varepsilon_*}{c_0 \rho_s} = \frac{9 K \alpha_T^2 (T_* - T_0)}{c_0 \rho_s}, \quad g = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_T (T_* - T_0)},$$

$$\bar{V} = \frac{V t_*}{x_*}, \quad \delta = \left(\frac{R_0}{x_*}\right)^2, \quad q = \frac{W_0}{\pi h Q \kappa_T}, \quad N_u = \alpha_{eff} \frac{t_*}{c_0 \rho_s},$$

$$\theta_A = \frac{T_A - T_0}{T_* - T_0}, \quad \theta_B = \frac{T_B - T_0}{T_* - T_0}, \quad \kappa_L = \frac{c_L}{c_0}, \quad \kappa_p = \frac{c_p}{c_0} \frac{\lambda}{K} = \gamma_1,$$

$$\Delta = \frac{\rho_s x_*^2}{t_*^2 K} = \frac{(x_*/t_*)^2}{K/\rho_s}, \quad \tau_0 = \frac{\kappa_0}{\mu t_*}, \quad \tau_p = \frac{\kappa_p}{\mu t_*}, \quad \tau_L = \frac{\kappa_L}{\mu t_*}$$

(τ_0, τ_p, τ_L — времена релаксации вязких напряжений для различных состояний вещества).

Зафиксировав часть параметров, например для смеси порошков титана и алюминия, которая используется в комбинированной 3D-технологии [31] получения Ti_3Al , и используя справочные данные, находим $\gamma_1 \approx 0,638$, $\theta_A = 0,72$, $\theta_B = 1,85$, $H \approx 0,318$, $\theta_0 = 10 \div 18$, $\sigma = 0,30 \div 0,35$, $\omega = 0,03 \div 0,08$ (адиабатическая температура для данного состава $T_* = 1185$ K).

Характерное время реакций — величина, зависящая от температуры и факторов, которые не учитываются в макромоделях, что приводит к увеличению области изменения времен релаксации вязких напряжений. Можно предположить, что $\tau_L < \tau_0 < \tau_p$. В зависимости от характерного времени реакции параметр Δ может находиться в любом временном диапазоне $\tau_L < \tau_0 < \tau_p$, что будет приводить к появлению различных эффектов.

Параметры V, δ, q, N_u зависят от условий эксперимента. В данной работе примем $\sigma = 0,33$, $\theta_0 = 10$, $\kappa_p = 1,2$, $\kappa_L = 1$, $\omega = 0,65$, $\tau_L = 0,05$, $\tau_0 = 0,1$, $\tau_p = 0,2$, $\Delta = 0,03$, $\delta = 0,01$ и проанализируем влияние вязкости на начальной стадии процесса синтеза.

4. Метод решения задачи. Задача решается численно. Для этого система уравнений приведена к виду

$$F(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - N_u \theta + G; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 s_{xx}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau_V} \frac{\partial s_{xx}}{\partial \tau} = \frac{\alpha(3 - \gamma_1)}{\Delta} \frac{\partial^2 s_{xx}}{\partial \xi^2} + U; \quad (8)$$

$$\frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau} = V_x, \quad \frac{\partial e_{zz}}{\partial \tau} = V_z; \quad (9)$$

$$\frac{\partial s_{yy}}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau_V} s_{yy} = \gamma_1(V_x + V_z) - \Omega + \frac{1}{\tau_V} (e_{xx} + e_{zz} - \bar{\omega}), \quad (10)$$

где

$$V_x = \frac{1}{\alpha(1-\gamma_1)} \left(\frac{\partial s_{xx}}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau_V} s_{xx} \right) + \frac{1}{3-\gamma_1} \left(\Omega - \frac{1}{\tau_V} (e_{xx} + e_{zz} - \bar{\omega}) \right),$$

$$V_z = -\frac{1}{3-2\gamma_1} \left(\gamma_1 V_x - \Omega + \frac{1}{\tau_V} (e_{xx} + e_{zz} - \bar{\omega}) \right),$$

$$U = -\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{\tau_V} (V_x + V_z - \Omega) + (\alpha(e_{xx} + e_{zz} - \bar{\omega}) - s_{xx}) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\tau_V} \right),$$

$$G = F_{ch}(\theta) + \bar{W}_{ext} - \omega(\theta + \sigma)(V_x + V_z) + \omega s_{xx} V_x, \quad \alpha = \frac{3(1-\gamma_1)}{3-2\gamma_1}, \quad \Omega = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau}.$$

Кинетическое уравнение не изменяется.

Для решения уравнений (7), (8) используются неявная разностная схема и метод прогонки, уравнения (9) решаются по явной схеме Эйлера, для решения уравнения (10) и уравнения кинетики используется неявная схема Эйлера.

На каждом шаге по времени последовательно рассчитываются доля жидкой фазы, теплоемкость, вязкость, диссипация, температура, степень превращения, химическое тепловыделение, объемное расширение и его производная, напряжения s_{xx} , скорости V_x , V_z ,

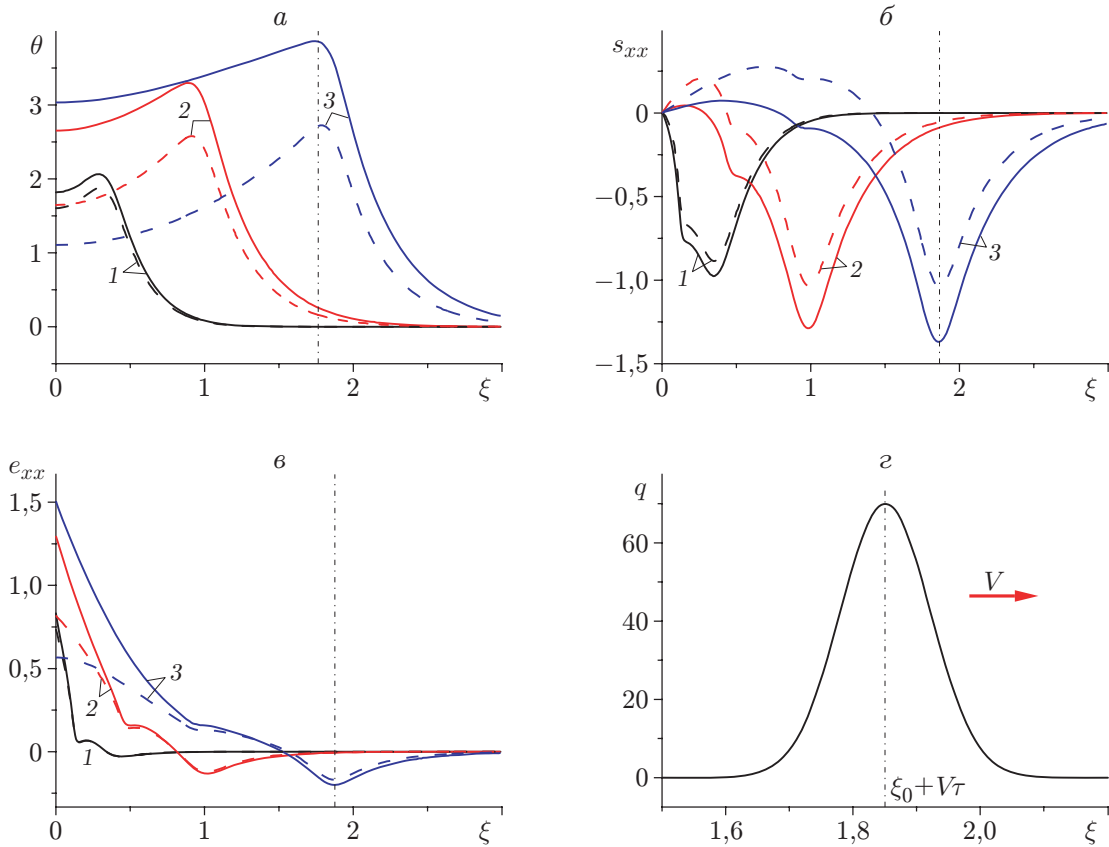


Рис. 1. Распределения температуры θ (а), компонент тензоров напряжений s_{xx} (б) и деформаций e_{xx} (в) и мощности источника тепла q (г) при $\omega = 0,065$ в отсутствие плавления и химических реакций в различные моменты времени: сплошные линии — $N_u = 0$, штриховые — $N_u = 2,5$; 1 — $\tau = 0,1$, 2 — $\tau = 0,35$, 3 — $\tau = 0,7$

деформации e_{xx} , e_{zz} , напряжения s_{yy} . Итерации не используются. Сходимость проверяется путем сгущения разностной сетки и варьирования шага по времени. Удовлетворительная сходимость имела место при незначительном различии времен релаксации и параметра Δ .

5. Анализ результатов. Пусть источник начинает движение из точки $\xi_0 = 0,1$. Химические реакции и плавление отсутствуют. Очевидно, что по мере движения источника тепла вдоль поверхности зона прогрева постепенно увеличивается (рис. 1, *a*), максимум напряжений (рис. 1, *б*) сдвигается вместе с максимумом температуры, деформации (рис. 1, *в*) на поверхности отличны от нуля, что определяется заданными граничными условиями. Положения максимумов напряжений и температуры соответствуют положению максимума источника тепла (рис. 1, *з*). Положение экстремумов в момент времени $\tau = 0,7$ показано штрихпунктирной линией, перпендикулярной оси абсцисс.

Учет потерь тепла, очевидно, приводит к уменьшению температуры и, соответственно, напряжений и деформаций (штриховые линии на рис. 1, *a–в*). При этом напряжения меняют знак. В дальнейшем процесс выходит на квазистационарный режим, которому соответствуют постоянные максимальные значения температуры, напряжений и деформаций.

При учете в модели плавления (рис. 2, *a–в*) значения всех параметров изменяются. Диапазон значений температуры плавления показан штрихпунктирными линиями на

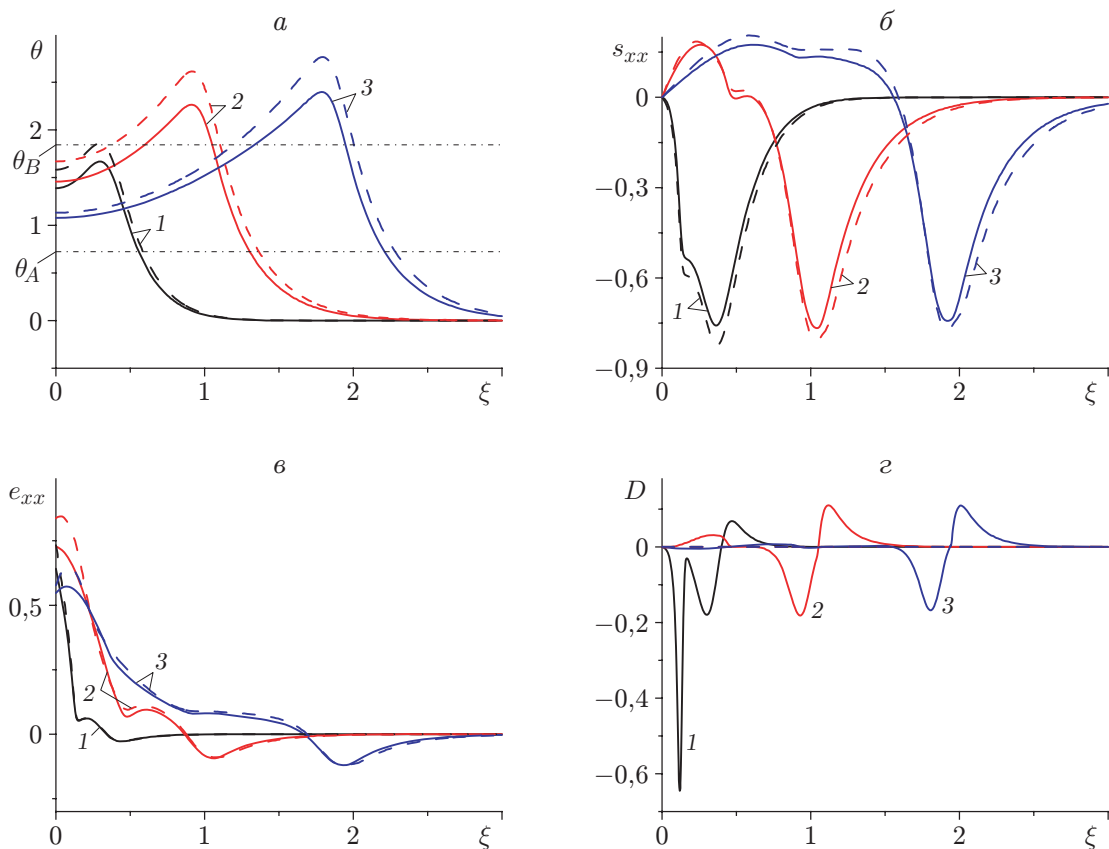


Рис. 2. Распределения температуры θ (*a*), компонент тензоров напряжений s_{xx} (*б*) и деформаций e_{xx} (*в*) и вязкой диссипации D (*г*) при $N_u = 2,5$ в различные моменты времени:

сплошные линии — связанная модель ($\omega = 0,2$), штриховые — несвязанная модель ($\omega = 0$); 1 — $\tau = 0,1$, 2 — $\tau = 0,35$, 3 — $\tau = 0,7$

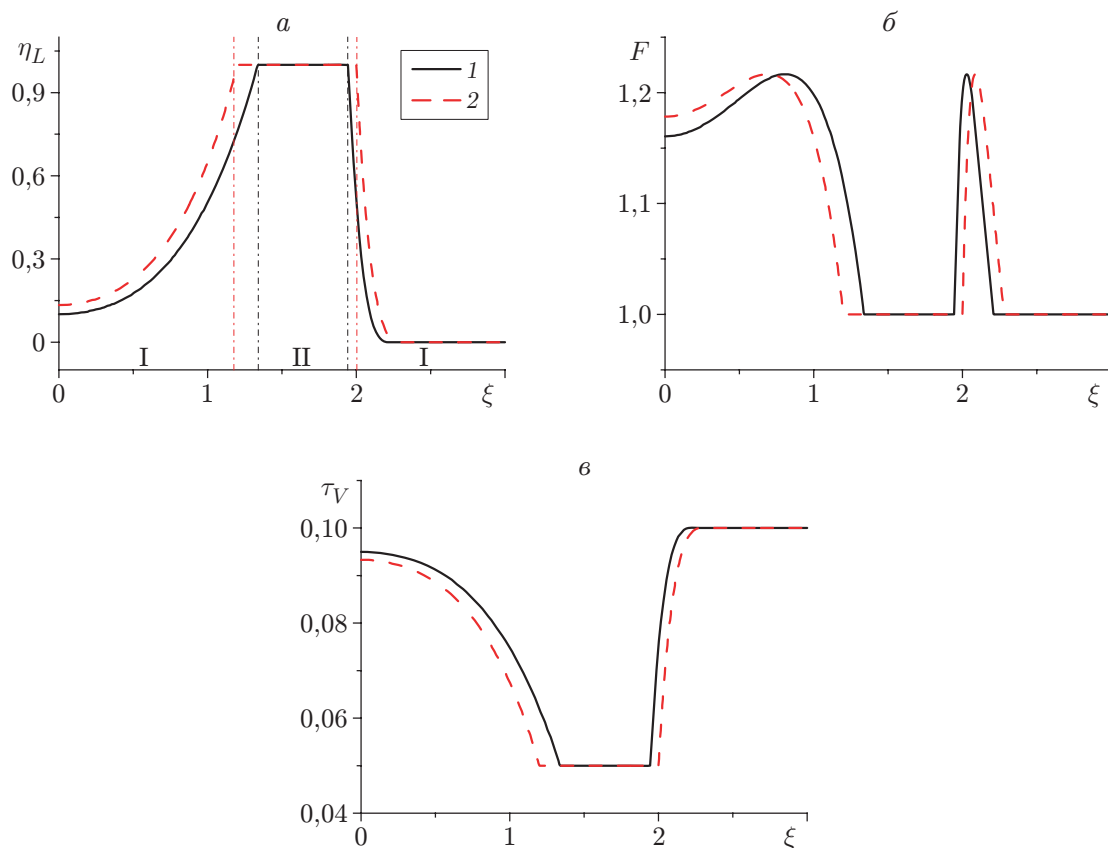


Рис. 3. Распределения доли жидкой фазы η_L (*a*), безразмерных теплоемкости F (*б*) и вязкости τ_V (*в*) при $N_u = 2,5$, $\tau = 0,7$:

I — двухфазная зона, II — зона расплава; 1 — связанная модель ($\omega = 0,2$), 2 — несвязанная модель ($\omega = 0$)

рис. 2, *a*. Максимальные потери на диссипацию наблюдаются на начальной стадии процесса (рис. 2, *г*).

Сравнение рис. 1, 2 показывает, что при данном наборе параметров учет связанности процессов приводит к незначительному изменению температуры и компонент тензоров напряжений и деформаций. Однако при учете связанности уменьшаются размеры области, занятой расплавом, и двухфазной зоны, соответственно изменяются теплоемкость и вязкость (рис. 3).

При наличии химической реакции картина существенно меняется (рис. 4). Во-первых, вследствие тепловыделения в ходе реакции повышается температура. Распределения напряжения и деформации становятся более немонотонными, что обусловлено немонотонным изменением теплоемкости и вязкости. Во-вторых, если напряжения ускоряют реакцию (штриховые кривые на рис. 3), то она ускоряется перед движущимся источником тепла, что приводит к выделению тепла перед внешним источником и дополнительному искажению профилей напряжений и деформаций. Если напряжения замедляют реакцию, то область расплава и зона реакции сужаются. При появлении химических напряжений ($g \neq 0$) также возможно ускорение реакции перед движущимся источником и выход ее на стационарный режим.

Заключение. Таким образом, в работе представлена связанная модель обработки поверхности подвижным источником тепла, построенная на основе модели вязкоупругой

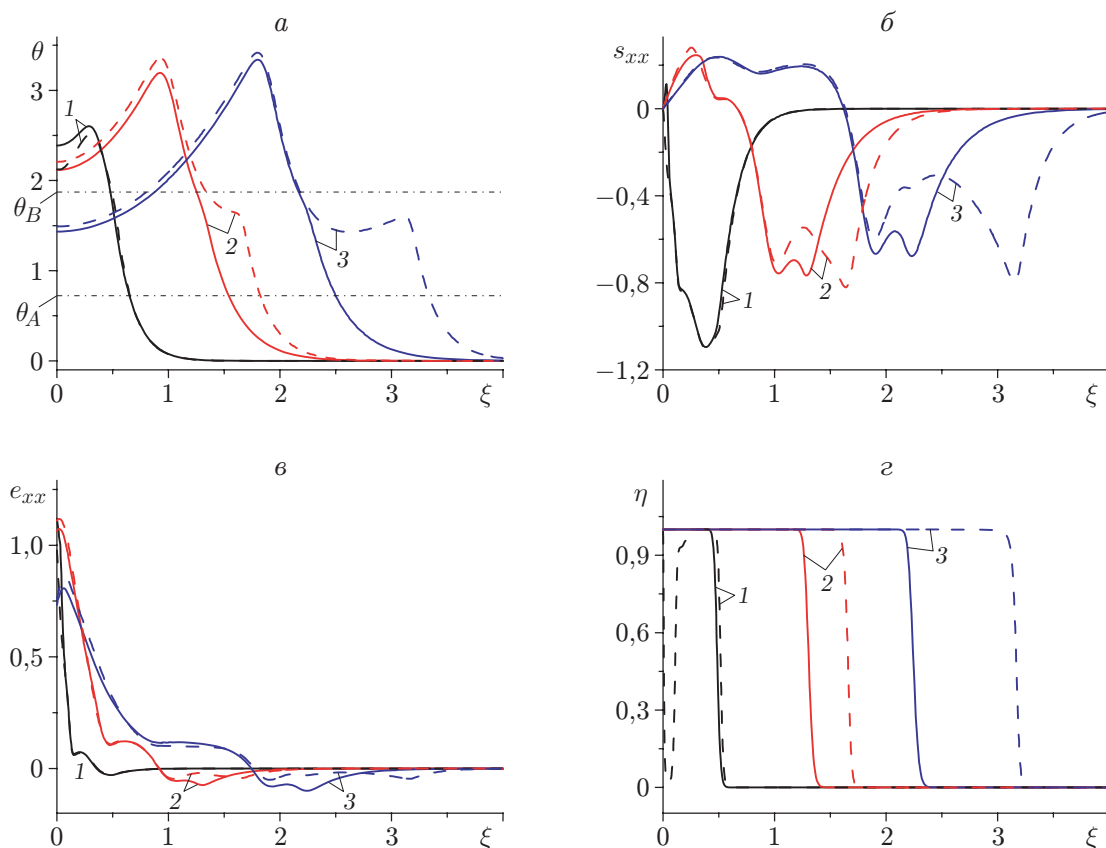


Рис. 4. Распределения температуры θ (а), компонент тензоров напряжений s_{xx} (б) и деформаций e_{xx} (в) и степени превращения η (г) при $N_u = 2,5$, $\omega = 0,065$, $g = 0$ в различные моменты времени:

1 — $\tau = 0,1$, 2 — $\tau = 0,35$, 3 — $\tau = 0,7$; сплошные линии — $\alpha_V = 0$, штриховые — $\alpha_V = 100$

среды максвелловского типа с учетом изменения при плавлении теплоемкости и вязкости. Разработан алгоритм численного решения задачи. Исследовано влияние плавления на распределения компонент тензоров напряжений и деформаций. Показано, что связанность процессов теплопереноса и деформирования приводит к сужению области расплава. Обнаружено, что вследствие влияния напряжений химическая реакция перед движущимся источником тепла ускоряется. Однако вследствие отсутствия данных о величине параметра α количественная оценка ускорения реакции затруднена. В модели может быть также учтено изменение других величин, например коэффициента теплового расширения, в окрестности температуры плавления. Кроме того, при учете разных режимов сканирования поверхности, приводящих к сложным термическим циклам, могут появиться новые эффекты [32].

ЛИТЕРАТУРА

1. Jandyal A., Chaturvedi I., Wazir I., et al. 3D printing: A review of processes, materials and applications in industry 4.0 // Sustainable Operat. Comput. 2022. V. 3. P. 33–42.
2. Durai Murugan P., Vijayananth S., Natarajan M. P., et al. A current state of metal additive manufacturing methods: A review // Materials Today: Proc. 2022. V. 59, pt 2. P. 1277–1283.

3. Маликов А. Г., Голышев А. А., Витошкин И. Е. Современные тенденции лазерной сварки и аддитивных технологий (обзор) // ПМТФ. 2023. Т. 64, № 1. С. 36–59.
4. Колубаев Е. А., Рубцов В. Е., Чумаевский А. В., Астафурова Е. Г. Научные подходы к микро-, мезо- и макроструктурному дизайну объемных металлических и полиметаллических материалов с использованием метода электронно-лучевого аддитивного производства // Физ. мезомеханика. 2022. Т. 25, № 4. С. 5–18.
5. Nandhakumar R., Venkatesan K. A process parameters review on selective laser melting-based additive manufacturing of single and multi-material: Microstructure, physical properties, tribological, and surface roughness // Materials Today Comm. 2023. V. 35. 105538.
6. Низьев В. Г., Колдоба А. В., Мирзаде Ф. Х. и др. Численное моделирование плавления двухкомпонентных порошков при лазерном спекании // Мат. моделирование. 2011. Т. 23, № 4. С. 90–102.
7. Ökten K., Biyikoğlu A. Development of thermal model for the determination of SLM process parameters // Optics Laser Technol. 2021. V. 137. 106825.
8. Li Sh., Liu D., Mi H., et al. Numerical simulation on evolution process of molten pool and solidification characteristics of melt track in selective laser melting of ceramic powder // Ceramics Intern. 2022. V. 48. P. 18302–18315.
9. He Q., Xia H., Liu J., et al. Modeling and numerical studies of selective laser melting: Multiphase flow, solidification and heat transfer // Materials Design. 2020. V. 196. 109115.
10. Li J., Zhou X., Brochu M., et al. Solidification microstructure simulation of Ti-6Al-4V in metal additive manufacturing: A review // Additive Manufactur. 2020. V. 31. 100989.
11. Zhao F., Ao X., Xia H., et al. Simulations of microstructure coupling with moving molten pool by selective laser melting using a cellular automaton // Materials Design. 2020. V. 185. 108230.
12. Yang M., Wang L., Yan W. Phase-field modeling of grain evolutions in additive manufacturing from nucleation, growth, to coarsening // npj Comput. Materials. 2021. V. 17. 56.
13. Ковальченко М. С. Теоретические основы горячей обработки пористых материалов давлением. Киев: Наук. думка, 1980.
14. Jing Qi, Liu Q., Wang D., et al. Calculation model for drag coefficient and multi-phase flow characteristics in dust removal process: Comparison between flake aluminum powder and spherical aluminum powder // Powder Technol. 2022. V. 405. 117550.
15. Скороход В. В. Реологические основы теории спекания. Киев: Наук. думка, 1972.
16. Olevsky E. A. Theory of sintering: from discrete to continuum // Materials Sci. Engng. R: Reports. 1998. V. 23, iss. 2. P. 41–100.
17. Бураго Н. Г., Никитин И. С. Математическая модель и алгоритм расчета прессования и спекания // Мат. моделирование. 2019. Т. 31, № 2. С. 3–17.
18. Друянов Б. А. Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989.
19. Трусов П. В., Кондратьев Н. С. Двухуровневая упруговязкопластическая модель: применение к анализу эволюции зеренной структуры при статической рекристаллизации // Физ. мезомеханика. 2018. Т. 21, № 2. С. 21–32.
20. Poluektov M., Freidin A. B., Figiel L. Modelling stress-affected chemical reactions in non-linear viscoelastic solids with application to lithiation reaction in spherical Si particles // Intern. J. Engng Sci. 2018. V. 128. P. 44–62.
21. Li H., Luo X., Ma F., Zhang Y. Micromechanics modeling of viscoelastic asphalt-filler composite system with and without fatigue cracks // Materials Design. 2021. V. 209. 109983.
22. Янковский А. П. Вязкоупругопластическое деформирование пластин с пространственными структурами армирования // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 118–132.

23. **Léo Desboi L., Tchoreloff P., Mazel V.** Characterization and modeling of the viscoelasticity of pharmaceutical tablets // Intern. J. Pharmaceut. 2020. V. 587. 119695.
24. **Xu Q., Engquist B., Solaimanian M., Yan K.** A new nonlinear viscoelastic model and mathematical solution of solids for improving prediction accuracy // Sci. Rep. 2020. V. 10. 2202.
25. **Giorgi C., Morro A.** Magneto-viscoelastic materials: Memory functionals and rate equations // Materials. 2022. V. 15. 6699.
26. **Годунов С. К., Пешков И. М.** Термодинамически согласованная нелинейная модель упругопластической среды Максвелла // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 8. С. 1481–1498.
27. **Мержиевский Л. А., Реснянский А. Д., Роменский Е. И.** Модель вязкоупругого композита с микронапряжениями // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1992. Т. 22. С. 151–167.
28. **Пухначев В. В.** Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 116–126.
29. **Шитикова М. В.** Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 3–40.
30. **Боли Б.** Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.: Мир, 1964.
31. **Shishkovsky I., Missemmer F., Smurov I.** Direct metal deposition of functional graded structures in Ti-Al system // Phys. Procedia. 2012. V. 39. P. 382–391.
32. **Князева А. Г.** Нестационарная термокинетическая модель лазерного сканирования поверхности // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 6. С. 130–137.

*Поступила в редакцию 3/X 2023 г.,
после доработки — 19/X 2023 г.
Принята к публикации 30/X 2023 г.*
