УДК 539.0

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ТЕНЗОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ

С. Н. Коробейников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Вводится понятие естественных тензоров напряжений — тензоров, которые получаются из тензоров напряжений Коши и Кирхгофа применением операций отображения, полуотображения и смешанного отображения из актуальной конфигурации на отсчетную, а также на две промежуточные конфигурации. Получен полный класс естественных тензоров напряжений и проведен их анализ.

Введение. В механике сплошной среды используется операция отображения тензоров [1] (постановки в соответствие одного тензора другому [2]) из одной конфигурации на другую. Для тензора второго ранга эта операция заключается в следующем. В некоторой материальной точке тензор задается компонентными разложениями по базисным диадам в выбранной конфигурации. Отображенный тензор получается замещением этих диад базисными диадами в той же материальной точке из другой конфигурации. Так как компоненты тензоров не изменяются, получается набор других (отображенных) тензоров. По аналогии вводим операцию полуотображения, когда замещается не вся базисная диада из другой конфигурации, а только один базисный вектор. Также вводим операцию смешанного отображения, когда один базисный вектор замещается в диаде соответствующим вектором из одной выбранной конфигурации, а второй — из другой.

Рассмотрим следующие конфигурации [3]: отсчетную, актуальную (текущую, деформированную), текущую с исключенным поворотом и повернутую отсчетную. В механике сплошной среды вводится тензор напряжений Коши (тензор истинных напряжений) s [2, 3]. Иногда более удобно использовать тензор напряжений Кирхгофа τ [3] (весовой тензор напряжений [2]), который отличается от тензора истинных напряжений скалярным множителем J. Введем понятие естественных тензоров напряжений — тензоров, которые можно получить из тензоров напряжений Коши и Кирхгофа операциями отображения, полуотображения и смешанного отображения из актуальной конфигурации на отсчетную, текущую с исключенным поворотом и повернутую отсчетную. Смысл термина "естественный" состоит в следующем. Тензоры напряжений Коши и Кирхгофа характеризуют элементарную силу, отнесенную к элементарнам площадкам в актуальной и отсчетной конфигурациях соответственно. Для тензоров, полученных операциями отображения тензоров напряжений Коши и Кирхгофа, существуют базисные диады, в которых компоненты отображенных тензоров равны компонентам порождающих их тензоров с сохранением их механического смысла. В некотором смысле все естественные тензоры напряжений "эквивалентны" тензорам напряжений Коши или Кирхгофа.

Целью работы является определение полного класса естественных тензоров напряжений и идентификация, когда это возможно, полученных тензоров с известными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00525, 00-15-96180) и программы "Университеты России — фундаментальные исследования" (грант № 1795).

Кинематика деформирования. Рассмотрим движение тела B в евклидовом трехмерном пространстве, в котором введена декартова система координат с ортонормальными базисными векторами $\boldsymbol{k}_i$ (здесь и далее индексы i, j пробегают значения 1, 2, 3). Для общности изложения наряду с декартовой рассмотрим криволинейную систему координат Θ^i, являющуюся системой отсчета. Пусть P — некоторая материальная точка тела B. Следуя [4], материальную точку с ее бесконечно малой окрестностью назовем материальной частицей. Пусть $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{x}$ — радиус-векторы точки P в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно. Предполагаем, что преобразование отсчетной конфигурации в актуальную описывается законом движения — непрерывной векторной функцией с требуемыми условиями гладкости

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \ : \ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t_0) = \boldsymbol{X}$$

при условии

$$0 < J \equiv \det F < \infty \quad \forall\, t > t_0,$$

где t — монотонно возрастающий параметр деформирования (время); t_0 — значение параметра t, соответствующее отсчетной конфигурации; F — тензор градиента деформации

$$F \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\, \boldsymbol{k}_i \otimes \boldsymbol{k}_j \quad (\boldsymbol{X} = X_i \boldsymbol{k}_i,\ \boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{k}_i).$$

Здесь и далее знак “$\otimes$” обозначает диадное произведение базисных векторов; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Полярное разложение этого тензора приводит к равенствам ($\det F > 0$)

$$F = R \cdot U = V \cdot R \quad (U^{\mathrm{т}} = U,\ V^{\mathrm{т}} = V,\ R \cdot R^{\mathrm{т}} = g,\ \det R = 1), \tag{1}$$

где g — метрический (единичный) тензор; U, V — симметричные положительно определенные (все главные значения положительны) правый и левый тензоры кратностей удлинений; R — собственно ортогональный тензор ротации; здесь и далее точка обозначает скалярное (внутреннее) произведение тензоров, индекс т — операцию транспонирования тензора. Из (1) получаем $U = R^{\mathrm{т}} \cdot V \cdot R$, $V = R \cdot U \cdot R^{\mathrm{т}}$, т. е. тензор U можно получить из тензора V операцией исключения поворота, и, наоборот, тензор V можно получить из тензора U операцией поворота.

При преобразованиях координат, соответствующих жесткому движению тела:

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X}, t) \equiv Q(t) \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) + \boldsymbol{c}(t), \tag{2}$$

где $Q(t)$ — собственно ортогональный тензор ($Q \cdot Q^{\mathrm{т}} = g,\ \det Q = 1$); $\boldsymbol{c}(t)$ — вектор, тензоры U и V преобразуются следующим образом:

$$U^* = U, \quad V^* = Q \cdot V \cdot Q^{\mathrm{т}}. \tag{3}$$

Тензоры, удовлетворяющие при преобразовании (2) первому соотношению в (3), назовем инвариантными, второму — индифферентными. Инвариантные и индифферентные тензоры составляют класс объективных тензоров [3]. Отметим, что тензор U — инвариантный, V — индифферентный, т. е. они объективны, а тензоры F и R необъективны.

Определим лагранжеву систему координат $\hat{\Theta}^i$ следующим образом: в отсчетной конфигурации при $t = t_0$ принимаем $\hat{\Theta}^i = \Theta^i$, в любой другой момент времени $t > t_0$ лагранжевы координаты фиксированной материальной точки имеют те же значения $\hat{\Theta}^i$. Определим материальные отсчетные и материальные текущие ковариантные базисные векторы:

$$\check{\boldsymbol{e}}_i(\hat{\Theta}^k) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \hat{\Theta}^i} = \frac{\partial X_j}{\partial \hat{\Theta}^i}\, \boldsymbol{k}_j, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_i(\hat{\Theta}^k, t) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \hat{\Theta}^i} = \frac{\partial x_j}{\partial \hat{\Theta}^i}\, \boldsymbol{k}_j : \quad \hat{\boldsymbol{e}}_i(\hat{\Theta}^k, t_0) = \check{\boldsymbol{e}}_i(\hat{\Theta}^k).$$

В соответствии с формулами тензорного анализа вводятся также контравариантные базисные векторы $\check{\boldsymbol{e}}^i$, $\hat{\boldsymbol{e}}^i$. Ковариантные и контравариантные базисные векторы в отсчетной и текущей конфигурациях связаны следующими формулами преобразования [3]:

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{e}}_i = F \cdot \check{\boldsymbol{e}}_i = \check{\boldsymbol{e}}_i \cdot F^{\mathrm{T}}, && \hat{\boldsymbol{e}}^i = F^{-\mathrm{T}} \cdot \check{\boldsymbol{e}}^i = \check{\boldsymbol{e}}^i \cdot F^{-1}, \\ &\check{\boldsymbol{e}}_i = F^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot F^{-\mathrm{T}}, && \check{\boldsymbol{e}}^i = F^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}^i = \hat{\boldsymbol{e}}^i \cdot F. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь и далее $F^{-\mathrm{T}} \equiv (F^{-1})^{\mathrm{T}} = (F^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Обозначим введенные ранее отсчетную и актуальную конфигурации через $\check{B}$ и $\hat{B}$ соответственно. Введем две промежуточные конфигурации [3].

1. Текущая с исключенным поворотом конфигурация $\bar{B}$ получается из конфигурации $\hat{B}$ операцией исключения поворота. Базисные векторы материального текущего $\hat{\boldsymbol{e}}_i$, $\hat{\boldsymbol{e}}^i$ и материального текущего с исключенным поворотом $\bar{\boldsymbol{e}}_i$, $\bar{\boldsymbol{e}}^i$ базисов связаны формулами преобразования

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{e}}_i \equiv R^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot R, && \bar{\boldsymbol{e}}^i \equiv R^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}^i = \hat{\boldsymbol{e}}^i \cdot R, \\ &\hat{\boldsymbol{e}}_i = R \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i = \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot R^{\mathrm{T}}, && \hat{\boldsymbol{e}}^i = R \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^i = \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot R^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Повернутая отсчетная конфигурация $\tilde{B}$ получается из конфигурации $\check{B}$ операцией поворота. Базисные векторы материального отсчетного $\check{\boldsymbol{e}}_i$, $\check{\boldsymbol{e}}^i$ и повернутого материального отсчетного $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$, $\tilde{\boldsymbol{e}}^i$ базисов преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{e}}_i \equiv R \cdot \check{\boldsymbol{e}}_i = \check{\boldsymbol{e}}_i \cdot R^{\mathrm{T}}, && \tilde{\boldsymbol{e}}^i \equiv R \cdot \check{\boldsymbol{e}}^i = \check{\boldsymbol{e}}^i \cdot R^{\mathrm{T}}, \\ &\check{\boldsymbol{e}}_i = R^{\mathrm{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot R, && \check{\boldsymbol{e}}^i = R^{\mathrm{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}^i = \tilde{\boldsymbol{e}}^i \cdot R. \end{aligned} \tag{6}$$

Эти конфигурации определяются только локальными преобразованиями для каждой материальной частицы тела. В общем случае, в отличие от отсчетной и актуальной конфигураций, они не образуют реальных конфигураций деформируемого тела.

Из (1), (4)–(6) получаем следующие формулы преобразования базисных векторов [3]:

$$\begin{aligned} &\check{\boldsymbol{e}}_i = U^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i = \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot U^{-1}, && \check{\boldsymbol{e}}^i = U \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^i = \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot U, \\ &\bar{\boldsymbol{e}}_i = U \cdot \check{\boldsymbol{e}}_i = \check{\boldsymbol{e}}_i \cdot U, && \bar{\boldsymbol{e}}^i = U^{-1} \cdot \check{\boldsymbol{e}}^i = \check{\boldsymbol{e}}^i \cdot U^{-1}, \\ &\hat{\boldsymbol{e}}_i = V \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot V, && \hat{\boldsymbol{e}}^i = V^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}^i = \tilde{\boldsymbol{e}}^i \cdot V^{-1}, \\ &\tilde{\boldsymbol{e}}_i = V^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot V^{-1}, && \tilde{\boldsymbol{e}}^i = V \cdot \hat{\boldsymbol{e}}^i = \hat{\boldsymbol{e}}^i \cdot V. \end{aligned} \tag{7}$$

Класс естественных тензоров напряжений. Обозначим через s индифферентный симметричный тензор напряжений Коши (тензор истинных напряжений), характеризующий напряженное состояние материальной частицы. Введем также индифферентный симметричный тензор напряжений Кирхгофа

$$\tau \equiv Js. \tag{8}$$

Рассмотрим следующие представления этого тензора:

$$\tau = \hat{\tau}^{ij}\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}_{ij}\, \hat{\boldsymbol{e}}^i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}_i{}^j\, \hat{\boldsymbol{e}}^i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}^i{}_j\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}^j.$$

Применяя операции отображения тензора τ из актуальной $\hat{B}$ на отсчетную конфигурацию $\check{B}$, получим четыре тензора напряжений

$$\begin{aligned} &S_1 \equiv \hat{\tau}^{ij}\, \check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_j && \Leftrightarrow \quad S_1 \equiv F^{-1} \cdot \tau \cdot F^{-\mathrm{T}}, \\ &S_2 \equiv \hat{\tau}_{ij}\, \check{\boldsymbol{e}}^i \otimes \check{\boldsymbol{e}}^j && \Leftrightarrow \quad S_2 \equiv F^{\mathrm{T}} \cdot \tau \cdot F, \\ &S_3 \equiv \hat{\tau}_i{}^j\, \check{\boldsymbol{e}}^i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_j && \Leftrightarrow \quad S_3 \equiv F^{\mathrm{T}} \cdot \tau \cdot F^{-\mathrm{T}}, \\ &S_4 \equiv \hat{\tau}^i{}_j\, \check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}^j && \Leftrightarrow \quad S_4 \equiv F^{-1} \cdot \tau \cdot F. \end{aligned} \tag{9}$$

Используя операции смешанного отображения тензора τ из актуальной $\hat{B}$ на конфигурации $\check{B}$ и $\bar{B}$, получим еще четыре тензора напряжений

$$\begin{aligned} S_5 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\,\bar{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}_i{}^j\,\bar{\boldsymbol{e}}^i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad S_5 \equiv R^{\text{т}} \cdot \tau \cdot F^{-\text{т}}, \\ S_6 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\,\check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}^i{}_j\,\check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad S_6 \equiv F^{-1} \cdot \tau \cdot R, \\ S_7 &\equiv \hat{\tau}_{ij}\,\check{\boldsymbol{e}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}_i{}^j\,\check{\boldsymbol{e}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad S_7 \equiv F^{\text{т}} \cdot \tau \cdot R, \\ S_8 &\equiv \hat{\tau}_{ij}\,\bar{\boldsymbol{e}}^i \otimes \check{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}^i{}_j\,\bar{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad S_8 \equiv R^{\text{т}} \cdot \tau \cdot F. \end{aligned} \tag{10}$$

Отобразим тензор τ из конфигурации $\hat{B}$ на конфигурацию $\bar{B}$:

$$\bar{\tau} \equiv \hat{\tau}^{ij}\,\bar{\boldsymbol{e}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}_{ij}\,\bar{\boldsymbol{e}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}_i{}^j\,\bar{\boldsymbol{e}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}^i{}_j\,\bar{\boldsymbol{e}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \bar{\tau} \equiv R^{\text{т}} \cdot \tau \cdot R, \quad \tau = R \cdot \bar{\tau} \cdot R^{\text{т}}. \tag{11}$$

Из (7) следует, что тензоры в (9) можно рассматривать как тензоры напряжений, полученные операциями отображения тензора $\bar{\tau}$ из конфигурации $\bar{B}$ на конфигурацию $\check{B}$:

$$S_1 = U^{-1} \cdot \bar{\tau} \cdot U^{-1}, \quad S_2 = U \cdot \bar{\tau} \cdot U, \quad S_3 = U \cdot \bar{\tau} \cdot U^{-1}, \quad S_4 = U^{-1} \cdot \bar{\tau} \cdot U. \tag{12}$$

Аналогично тензоры, определенные в (10), можно считать тензорами напряжений, полученными операциями полуотображения тензора $\bar{\tau}$ из конфигурации $\bar{B}$ на конфигурацию $\check{B}$:

$$S_5 = \bar{\tau} \cdot U^{-1}, \quad S_6 = U^{-1} \cdot \bar{\tau}, \quad S_7 = U \cdot \bar{\tau}, \quad S_8 = \bar{\tau} \cdot U. \tag{13}$$

Из (11) следует, что тензор $\bar{\tau}$ инвариантен. Как отмечено выше, тензор U также инвариантен. Поэтому из (12) и (13) следует, что тензоры S_k (здесь и далее индекс k пробегает значения от 1 до 8) инвариантны. Тензоры $\bar{\tau}$, S_k представляют собой полный набор инвариантных тензоров напряжений, которые можно получить из тензора напряжений Кирхгофа τ операциями отображения (включая смешанные) из конфигурации $\hat{B}$ на конфигурации $\check{B}$ и $\bar{B}$. В то же время эти тензоры являются базовыми в семействе инвариантных тензоров напряжений, полученном в [5] на основе четырех принципов: объективности, изотропии, согласованности и регулярности. Приведем названия этих тензоров напряжений [5]: S_1 — второй Пиола — Кирхгофа ($S_1 = S_1^{\text{т}}$); S_2 — Грина — Ривлина ($S_2 = S_2^{\text{т}}$); S_3, S_4 — первый и второй Атлури ($S_3 = S_4^{\text{т}}$); S_5, S_6 — первый и второй Био ($S_5 = S_6^{\text{т}}$); S_7, S_8 — первый и второй Хилла ($S_7 = S_8^{\text{т}}$); $\bar{\tau}$ — Нолла, или тензор напряжений Кирхгофа с исключенным поворотом ($\bar{\tau} = \bar{\tau}^{\text{т}}$).

Получим четыре тензора напряжений операциями отображения тензора τ из конфигурации $\hat{B}$ на конфигурацию $\tilde{B}$:

$$\begin{aligned} s_1 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad s_1 \equiv V^{-1} \cdot \tau \cdot V^{-1}, \\ s_2 &\equiv \hat{\tau}_{ij}\,\tilde{\boldsymbol{e}}^i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad s_2 \equiv V \cdot \tau \cdot V, \\ s_3 &\equiv \hat{\tau}_i{}^j\,\tilde{\boldsymbol{e}}^i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad s_3 \equiv V \cdot \tau \cdot V^{-1}, \\ s_4 &\equiv \hat{\tau}^i{}_j\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad s_4 \equiv V^{-1} \cdot \tau \cdot V. \end{aligned}$$

Используя операции полуотображения тензора τ из конфигурации $\hat{B}$ на конфигурацию $\tilde{B}$, получим еще четыре тензора напряжений:

$$\begin{aligned} s_5 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\,\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}_i{}^j\,\hat{\boldsymbol{e}}^i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad s_5 \equiv \tau \cdot V^{-1}, \\ s_6 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}^i{}_j\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad s_6 \equiv V^{-1} \cdot \tau, \\ s_7 &\equiv \hat{\tau}_{ij}\,\tilde{\boldsymbol{e}}^i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}_i{}^j\,\tilde{\boldsymbol{e}}^i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad s_7 \equiv V \cdot \tau, \\ s_8 &\equiv \hat{\tau}_{ij}\,\hat{\boldsymbol{e}}^i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}^i{}_j\,\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad s_8 \equiv \tau \cdot V. \end{aligned}$$

Тензоры s_k представляют собой полный набор индифферентных тензоров напряжений, которые можно получить из тензора τ операциями отображения и полуотображения из конфигурации $\hat{B}$ на конфигурацию $\tilde{B}$. Следуя [5], эти тензоры, включая τ, можно назвать базовыми в семействе индифферентных тензоров напряжений, полученном на основе четырех принципов, указанных выше (под объективностью вместо инвариантности здесь понимается индифферентность).

Тензоры s_k и S_k связаны преобразованиями поворота и исключения поворота (так же как τ и $\bar{\tau}$ (см. (11)): $S_k = R^{\text{т}} \cdot s_k \cdot R$, $s_k = R \cdot S_k \cdot R^{\text{т}}$. Поэтому тензоры s_k можно назвать повернутыми тензорами напряжений S_k. Справедливы следующие равенства: $s_1 = s_1^{\text{т}}$, $s_2 = s_2^{\text{т}}$, $s_3 = s_4^{\text{т}}$, $s_5 = s_6^{\text{т}}$, $s_7 = s_8^{\text{т}}$. Тензоры s_5 и s_6 можно также назвать первым и вторым тензорами напряжений Белла, так как, по-видимому, тензор s_6 впервые введен в [6] (в [6] тензор s_6 ошибочно считается симметричным).

Операциями полуотображения тензора τ из актуальной $\hat{B}$ на отсчетную конфигурацию $\check{B}$ получаем четыре тензора напряжений

$$\begin{aligned}
P_1 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}_i{}^j\, \hat{\boldsymbol{e}}^i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad P_1 \equiv \tau \cdot F^{-\text{т}} = R \cdot S_5 = s_5 \cdot R,\\
P_2 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\, \check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}^i{}_j\, \check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad P_2 \equiv F^{-1} \cdot \tau = S_5 \cdot R^{\text{т}} = R^{\text{т}} \cdot s_5,\\
P_3 &\equiv \hat{\tau}_{ij}\, \check{\boldsymbol{e}}^i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}_i{}^j\, \check{\boldsymbol{e}}^i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad P_3 \equiv F^{\text{т}} \cdot \tau = S_8 \cdot R^{\text{т}} = R^{\text{т}} \cdot s_8,\\
P_4 &\equiv \hat{\tau}_{ij}\, \hat{\boldsymbol{e}}^i \otimes \check{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}^i{}_j\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad P_4 \equiv \tau \cdot F = R \cdot S_8 = s_8 \cdot R.
\end{aligned}$$

Отметим, что $P_1 = P_2^{\text{т}}$, $P_3 = P_4^{\text{т}}$. Тензор P_1 называется первым тензором напряжений Пиола — Кирхгофа (иногда первым тензором напряжений Пиола — Кирхгофа называют транспонированный к нему тензор P_2). Тензоры P_l (здесь и далее индекс l пробегает значения от 1 до 4) необъективны (неинвариантны, неиндифферентны).

Применяя операции полуотображения тензора τ из актуальной конфигурации $\hat{B}$ на текущую с исключенным поворотом $\bar{B}$, получим еще два тензора напряжений

$$\begin{aligned}
T_1 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}_{ij}\, \hat{\boldsymbol{e}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}_i{}^j\, \hat{\boldsymbol{e}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}^i{}_j\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad T_1 \equiv \tau \cdot R = R \cdot \bar{\tau},\\
T_2 &\equiv \hat{\tau}^{ij}\, \bar{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}_{ij}\, \bar{\boldsymbol{e}}^i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}^j = \hat{\tau}_i{}^j\, \bar{\boldsymbol{e}}^i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\tau}^i{}_j\, \bar{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}^j \quad \Leftrightarrow \quad T_2 \equiv R^{\text{т}} \cdot \tau = \bar{\tau} \cdot R^{\text{т}},
\end{aligned}$$

для которых справедливо равенство $T_1 = T_2^{\text{т}}$. Эти тензоры напряжений необъективны.

Тензоры напряжений $\bar{\tau}$, S_k, s_k, P_l, T_m (здесь и далее индекс m принимает значения 1, 2) представляют собой полный набор тензоров напряжений, полученных из тензора τ операциями отображения, полуотображения и смешанного отображения из актуальной конфигурации $\hat{B}$ на конфигурации $\check{B}$, $\bar{B}$, $\tilde{B}$. Эти тензоры, включая τ, назовем τ-семейством естественных тензоров напряжений.

Используя (8), получим s-семейство естественных тензоров напряжений: s, $\bar{s}$, $J^{-1}S_k$, $J^{-1}s_k$, $J^{-1}P_l$, $J^{-1}T_m$. Здесь введен тензор напряжений Коши с исключенным поворотом [7] $\bar{s} \equiv R^{\text{т}} \cdot s \cdot R = J^{-1}\bar{\tau}$. Тензор $J^{-1}S_1$ называется также энергетическим тензором напряжений [8]. Семейства τ и s составляют класс естественных тензоров напряжений.

Анализ естественных тензоров напряжений. Все введенные тензоры напряжений имеют механический смысл напряжений в силу равенства их компонент компонентам тензоров напряжений Кирхгофа τ или Коши s в специально выбранных базисных диадах. В определяющих соотношениях целесообразно использовать объективные (инвариантные или индифферентные) тензоры напряжений и деформаций. Представим тензоры τ и s в каноническом виде

$$\tau = \tau_i\, \boldsymbol{m}_i \otimes \boldsymbol{m}_i, \quad s = s_i\, \boldsymbol{m}_i \otimes \boldsymbol{m}_i \qquad (\tau_i = J s_i), \tag{14}$$

где τ_i, s_i — главные значения тензоров τ и s соответственно; $\boldsymbol{m}_i$ — орты главных взаимно ортогональных осей. Напряженное состояние в материальной частице характеризуется как абсолютной величиной, так и знаками главных значений τ_i или s_i. Сохранение таких же знаков главных значений тензоров напряжений, как у тензоров τ или s, желательно, так как положительные главные значения τ_i или s_i $(J > 0)$ соответствуют растяжению материала вдоль соответствующей главной оси, отрицательные — его сжатию.

Проведем анализ инвариантных тензоров напряжений $\bar{\tau}$, S_k, $\bar{s}$, $J^{-1}S_k$. Из (12) и (13) следует, что тензор напряжений Нолла $\bar{\tau}$ центрирует инвариантные естественные тензоры напряжений τ-семейства. Аналогично тензор напряжений Коши с исключенным поворотом $\bar{s}$ центрирует инвариантные естественные тензоры напряжений s-семейства. Из (11) и (14) получаем следующие канонические представления тензоров $\bar{\tau}$ и $\bar{s}$: $\bar{\tau} = \tau_i \boldsymbol{M}_i \otimes \boldsymbol{M}_i$, $\bar{s} = s_i \boldsymbol{M}_i \otimes \boldsymbol{M}_i$, $\boldsymbol{M}_i \equiv R^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{m}_i \cdot R$. Отсюда следует, что тензоры $\bar{\tau}$ и $\bar{s}$ точно воспроизводят напряженное состояние материальной частицы в повернутых главных осях с ортами $\boldsymbol{M}_i$.

В любой выбранной системе координат компоненты тензоров второго ранга представляются квадратными матрицами 3×3. Равенства (12) и (13) можно трактовать как матричные преобразования компонент тензора $\bar{\tau}$ в компоненты тензоров S_k. Следуя [5], для тензорных преобразований (12), (13) используем терминологию матричных преобразований линейной алгебры. Тензорные преобразования в (12), (13) являются преобразованиями эквивалентности (преобразования эквивалентности сохраняют ранг матриц). В этом смысле все тензоры S_k эквивалентны тензору $\bar{\tau}$. Первые два равенства в (12) являются преобразованиями конгруэнтности (преобразования конгруэнтности сохраняют как главные направления, так и знаки главных значений). Следуя [5], S_1 и S_2 назовем тензорами, конгруэнтными тензору $\bar{\tau}$. Вторые два равенства в (12) есть преобразования подобия (преобразования подобия сохраняют главные значения, но в общем случае не сохраняют ортогональность главных направлений порождающей симметричной матрицы). Следуя [5], назовем несимметричные тензоры S_3 и S_4 подобными тензору $\bar{\tau}$. Преобразования (13) для матриц являются полутождественными. (Полутождественным преобразованиям соответствует одна единичная матрица из двух (слева или справа) матриц, окаймляющих порождающую матрицу. В общем случае эти преобразования не сохраняют ни главные значения, ни ортогональность главных направлений порождающей матрицы.) Поэтому несимметричные тензоры S_n $(n = \overline{5,8})$ полутождественны тензору $\bar{\tau}$ [5].

В заключение отметим, что среди тензоров S_k наиболее точно воспроизводят напряженное состояние в материальной частице только два конгруэнтных тензора напряжений S_1 и S_2. Они сохраняют как главные направления, так и знаки главных значений тензора $\bar{\tau}$. Несмотря на то что тензоры S_n $(n = \overline{3,8})$ инвариантны и эквивалентны тензору $\bar{\tau}$, использование их в определяющих соотношениях нецелесообразно. Во-первых, они могут исказить механический смысл напряженного состояния материальной частицы, во-вторых, в общем случае они несимметричны. Рассмотрим симметричные составляющие этих тензоров $\tilde{S}_3 \equiv (S_3 + S_4)/2$, $\tilde{S}_5 \equiv (S_5 + S_6)/2$, $\tilde{S}_7 \equiv (S_7 + S_8)/2$. Тензор $\tilde{S}_3$ назовем симметричным тензором напряжений Атлури, а тензоры $\tilde{S}_5$ и $\tilde{S}_7$ — тензорами напряжений Яумана [5] (симметричный Био) и Черных [4] (симметричный Хилла). Такие симметричные тензоры не имеют механического смысла напряжений [5]. В общем случае они неэквивалентны тензору напряжений $\bar{\tau}$. Отметим, что эти тензоры напряжений не входят в класс естественных.

Из аналогичного анализа индифферентных тензоров напряжений следует, что симметричные тензоры напряжений s_1, s_2 конгруэнтны, несимметричные тензоры s_3, s_4 подобны, а тензоры s_n $(n = \overline{5,8})$ полутождественны тензору напряжений Кирхгофа τ.

Несимметричные тензоры напряжений P_l, T_m нецелесообразно использовать при формулировке определяющих соотношений, но тензоры P_1 или P_2 могут быть использованы для компактной записи уравнений движения в отсчетной конфигурации [3, 8].

Выше рассмотрена целесообразность использования введенных естественных тензоров напряжений τ-семейства. Такими же качествами обладают инвариантные и индифферентные тензоры s-семейства, но необъективные тензоры этого семейства не находят применения.

Отметим, что все естественные тензоры напряжений эквивалентны тензору напряжений Коши s или Кирхгофа τ.

Заключение. С помощью операций отображения, полуотображения и смешанного отображения тензоров напряжений Коши s и Кирхгофа τ из актуальной на отсчетную и две промежуточные конфигурации получены некоторые известные ранее тензоры напряжений, а также ряд новых, названных естественными. Они разбиты на два семейства (τ и s) по названию порождающих тензоров. В каждом семействе выделены четыре подсемейства. Например, для τ-семейства подсемейства тензоров напряжений следующие: инвариантные $\bar{\tau}$, S_k; индифферентные τ, s_k; необъективные P_l; необъективные T_m.

Проведенный следуя [5] анализ тензоров показал, что оптимальными для построения определяющих соотношений в τ-семействе являются инвариантные тензоры $\bar{\tau}$, S_1, S_2 и индифферентные тензоры τ, s_1, s_2. При этом тензоры S_1, S_2 конгруэнтны тензору $\bar{\tau}$, а s_1, s_2 — тензору τ. В s-семействе конгруэнтными тензорам $\bar{s}$ и s являются соответственно инвариантные тензоры напряжений $J^{-1}S_1$, $J^{-1}S_2$ и индифферентные $J^{-1}s_1$, $J^{-1}s_2$. Отмечена целесообразность использования необъективных тензоров напряжений P_1 и P_2 при формулировке уравнений движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Meyers A., Schieße P., Bruhns O. T.** Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates // Acta Mech. 2000. V. 139, N 1/4. P. 91–103.
2. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
3. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. **Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.** Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.
5. **Curnier A., Rakotomanana L.** Generalized strain and stress measures: critical survey and new results // Engng Trans. 1991. V. 39, N 3/4. P. 461–538.
6. **Bell J. F.** Experiments on the kinematics of large plastic strain in ordered solids // Intern. J. Solids Structures. 1989. V. 25, N 3. P. 267–278.
7. **Herrmann W.** Inelastic constitutive relations // High-pressure shock compression of solids. Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 115–185.
8. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 7/VI 2001 г.