УДК 532.581

КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

С. Е. Холодова

Мордовский государственный университет, 430000 Саранск
E-mail: kholodovase@yandex.ru

Рассматриваются крупномасштабные нелинейные колебания электропроводной идеальной жидкости переменной глубины с учетом магнитной, архимедовой и кориолисовой сил. На основе анализа масштабов квазигеострофических движений выводятся основные уравнения. В предположении, что числа Россби, являющиеся мерой отношения локального и адвективного ускорений к ускорению Кориолиса, одного порядка, решение задачи сводится к решению системы трех нелинейных уравнений для гидромагнитного давления и для двух функций, описывающих магнитное поле. Для бесконечно протяженной по горизонтали электропроводной вращающейся жидкости с учетом предположения о приблизительно постоянном наклоне поверхности, ограничивающей слой сверху, на расстоянии порядка длины волны получены точное решение системы соответствующих нелинейных уравнений и дисперсионное соотношение.

Ключевые слова: электропроводная вращающаяся жидкость, квазигеострофическое движение, числа Россби, нелинейные уравнения с частными производными, длинные волны.

Введение. Как известно, электромагнитные процессы лежат в основе ряда явлений. Например, в недрах Земли происходят электромагнитные процессы, которые приводят к возникновению общего магнитного поля планеты. Согласно общепринятым представлениям (см., например, [1–3]) магнитное поле Земли возбуждается движениями в жидкой части земного ядра, но детально этот процесс не изучен.

Интерес к исследованию земного ядра постоянно возрастает. Это обусловлено тем, что ядро оказывает существенное влияние на различные глобальные геофизические явления и процессы, происходящие и происходившие в Земле, которые могут проявляться и на ее поверхности.

Поскольку электропроводящие ядра планет, в частности ядро Земли, изучены слабо, развитие теории динамо планет может привести к появлению новых теорий при интерпретации результатов магнитных измерений, в частности данных о геомагнитных вековых вариациях.

Электромагнитные процессы в ядре Земли связаны с различными процессами в ее мантии, поэтому, как отмечено в работе [4], изучение геомагнитного поля является существенной частью геофизических исследований внутреннего строения и развития Земли.

Изучение строения глубоких недр Земли представляет собой важную и вместе с тем сложную проблему, которая решается прежде всего методами геофизики (сейсмическими и гравитационными).

Математическая задача, описывающая генерацию магнитных полей движениями электропроводной жидкости, называется задачей гидромагнитного динамо. Идея гидромагнитного динамо впервые высказана в 1919 г. Дж. Лармором при объяснении происхождения магнитных полей на Солнце [5]. Гидромагнитное динамо изучалось теоретически при исследовании магнитных полей в астрофизике и геофизике [6], однако известно, что это явление имеет более общее значение в магнитной гидродинамике. В основополагающих работах по теории динамо [1–3, 7] доказано существование стационарных и нестационарных решений уравнения магнитной индукции при задании некоторого специального вида поля скоростей. Тем самым доказана принципиальная возможность геодинамо.

Вследствие сложности уравнений, описывающих магнитогидродинамические процессы в земном ядре, усилия исследователей были направлены в основном на поиски решений уравнений Максвелла для заданных распределений скоростей. Модели, в которых скорость движения жидкости считается заданной и определяется только магнитное поле, называются кинематическими моделями земного динамо.

В работе [8] отмечено, что ни один лабораторный эксперимент не воспроизводит возбуждение планетных магнитных полей движениями электропроводящей жидкости, которые поддерживаются естественными для этих объектов силами. Лабораторное динамо Лоуэса и Уилкинсона [9, 10] является попыткой реализации существующих теоретических моделей типа динамо Герценберга [11]. Однако эти эксперименты неприменимы для проверки моделей динамо в геофизике. Вследствие очень больших размеров космических проводников и большой длительности явлений малые механические силы магнитного происхождения могут внести значительные изменения в движение самих проводников. Поэтому при перенесении результатов лабораторных экспериментов на космические объекты необходима их проверка. Нередко сами наблюдения за космическими объектами заменяют лабораторные эксперименты. Однако интерпретация результатов космических наблюдений без предварительного математического анализа недостаточно надежна. Таким образом, наряду с необходимостью разработки физических, геофизических, численных методов возникает необходимость проведения аналитических исследований с использованием математического аппарата.

Системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие рассматриваемые в данной работе физические явления, нелинейны, неавтономны и имеют большую размерность. Только для частных случаев систем возможно построение аналитических, в том числе точных решений. В общем случае исходная система аппроксимируется более простой системой, удовлетворительно описывающей свойства решений исходной системы.

В настоящей работе предпринята попытка построения аналитических, в частности точных, решений задачи о квазигеострофическом движении электропроводной идеальной вращающейся жидкости, моделирующей волновые движения в жидком ядре Земли, ограниченном поверхностями мантии и твердого ядра Земли.

Согласно работе [12] связь между электромагнитными и гидродинамическими явлениями усиливается по мере увеличения линейного масштаба явления. Для крупномасштабных явлений эта связь может быть очень сильной, например в недрах звезд и жидком ядре Земли.

Исследованию крупномасштабных движений электропроводной жидкости посвящены работы [8, 13–16], в которых рассматривалась модель, построенная в приближении быстрого вращения. В рамках этой модели в уравнении движения пренебрегается силой инерции, вследствие чего не учитываются инерциальные, альфвеновские волны и волны Россби. Кроме того, в пределе быстрого вращения скорость $\boldsymbol{v}$ находится не однозначно, а с точностью до слагаемого, представляющего собой геострофическую скорость. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что геострофическая скорость не удовлетворяет магнитострофическому уравнению. Для преодоления указанных трудностей вводятся вязкие силы и пренебрегается вязкостью (когда это допустимо).

В [8, 13] проанализирована аналогичная модель для слоя, заключенного между плоскостями $z = 0$ и $z = d$. В данной работе предполагается, что границы слоя представляют собой поверхности, изменяющиеся в пространстве и во времени, кроме того, в уравнении движения учитываются инерционные силы.

1. Основные уравнения. Будем использовать прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Под объемной силой понимается вектор $\boldsymbol{g}$, перпендикулярный поверхности $z = 0$ и направленный противоположно направлению вертикальной оси. Ось вращения жидкости совпадает с осью z, т. е. $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{k}\omega$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли.

Рассмотрим вращающийся слой электропроводной идеальной несжимаемой жидкости, сверху ограниченной твердой непроницаемой поверхностью $z = -Z(x, y)$ мантии Земли, снизу — поверхностью $z = -h_b(x, y, t)$ твердого ядра Земли. Система уравнений, описывающих движение невязкой электропроводной несжимаемой вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ жидкости, в переменных Эйлера имеет вид [12, 17–20]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} - g\boldsymbol{z} + \frac{1}{\mu\rho}\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\sigma\mu}\,\Delta\boldsymbol{B}; \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{B}$ — вектор магнитной индукции; $\boldsymbol{v}$ — скорость жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$; p — давление; ρ — плотность; g — ускорение свободного падения. Предполагается, что магнитная проницаемость μ и электропроводность σ постоянны.

Важное свойство уравнения (3) заключается в том, что при $1/(\sigma\mu) \to 0$ (бесконечно проводящая жидкость) сохраняется поток поля $\boldsymbol{B}$ через любую материальную поверхность в жидкости. Это означает, что поле $\boldsymbol{B}$ изменяется таким образом, как если бы магнитные силовые линии этого поля были "вморожены" в движущееся вещество. Поскольку в телах космических размеров силовые линии движутся очень медленно, можно считать, что они практически "вморожены" в вещество [12].

Таким образом, будем полагать, что жидкость обладает высокой электропроводностью, такой что магнитное число Рейнольдса велико:

$$\mathrm{Re}_m = LU/\lambda \gg 1$$

(L, U — характерные размер и скорость; $\lambda = 1/(\sigma\mu)$ — коэффициент магнитной диффузии). Случай $\mathrm{Re}_m \gg 1$ реализуется, например, в жидком ядре Земли. При $\mathrm{Re}_m \gg 1$ уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{5}$$

Уравнения магнитной гидродинамики (1), (2), (4), (5) для рассматриваемой задачи в проекциях на оси координат имеют вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\Big(p + \frac{b^2}{2\mu}\Big) + 2\omega v_y + \frac{1}{\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_x}{\partial z}\Big),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\Big(p+\frac{b^2}{2\mu}\Big)-2\omega v_x+\frac{1}{\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x}+b_y\frac{\partial b_y}{\partial y}+b_z\frac{\partial b_y}{\partial z}\Big),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}= \tag{6}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\Big(p+\frac{b^2}{2\mu}\Big)-g+\frac{1}{\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_z}{\partial x}+b_y\frac{\partial b_z}{\partial y}+b_z\frac{\partial b_z}{\partial z}\Big),$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial b_x}{\partial z}-b_x\frac{\partial v_x}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-b_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial b_y}{\partial z}-b_x\frac{\partial v_y}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_y}{\partial y}-b_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial b_z}{\partial z}-b_x\frac{\partial v_z}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_z}{\partial y}-b_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=0,\qquad b^2=b_x^2+b_y^2+b_z^2. \tag{9}$$

Перейдем от системы (6)–(9) к соответствующей системе в безразмерных переменных. Предварительно введем характерные масштабы изменения переменных системы. Пусть D — характерный вертикальный масштаб, равный характерному значению средней глубины слоя жидкости $-Z(x,y)+h_b(x,y,t)$, а L — характерный масштаб перемещения в горизонтальном направлении движения. Предположим, что

$$\delta=D/L\ll 1.$$

Введем также следующие характерные масштабы: U — характерный масштаб горизонтальной составляющей скорости движения, W — вертикальной составляющей скорости движения, B — величин b_x, b_y, H — величины b_z, T — времени t, P — поля давления.

В уравнении (8) первое и второе слагаемые имеют порядок $O(U/L)$, поэтому порядок третьего слагаемого $O(W/D)$ не больше $O(U/L)$. Следовательно, используя уравнение (8), получим

$$W\leqslant O(\delta U).$$

Аналогично, используя уравнение (9), получим

$$H\leqslant O(\delta B).$$

Учитывая соотношение масштабов, в системе (6), (7) перейдем к безразмерным переменным. В результате имеем систему

$$\frac{U}{T}\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{U^2}{L}\Big(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big)=$$

$$=-\frac{1}{\rho L}\Big(P+\frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(p+\frac{b^2}{2\mu}\Big)+2\omega U v_y+\frac{B^2}{L\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+b_y\frac{\partial b_x}{\partial y}+b_z\frac{\partial b_x}{\partial z}\Big),$$

$$\frac{U}{T}\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{U^2}{L}\Big(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\Big) = \tag{10}$$

$$= -\frac{1}{\rho L}\Big(P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial y}\Big(p + \frac{b^2}{2\mu}\Big) - 2\omega U v_x + \frac{B^2}{L\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_y}{\partial z}\Big);$$

$$\frac{\delta U}{T}\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\delta U^2}{L}\Big(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{\rho D}\Big(P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial z}\Big(p + \frac{b^2}{2\mu}\Big) - g + \frac{\delta B^2}{L\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_z}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_z}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_z}{\partial z}\Big); \tag{11}$$

$$\frac{B}{T}\frac{\partial b_x}{\partial t} + \frac{UB}{L}\Big(v_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_x}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big) = 0,$$

$$\frac{B}{T}\frac{\partial b_y}{\partial t} + \frac{UB}{L}\Big(v_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_y}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\Big) = 0,$$

$$\frac{\delta B}{T}\frac{\partial b_z}{\partial t} + \frac{\delta UB}{L}\Big(v_x\frac{\partial b_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_z}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_z}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_z}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big) = 0.$$

Здесь и далее для безразмерных переменных используются те же обозначения, что и для размерных.

Из уравнений (10) следует, что масштаб динамического давления P и магнитного давления B^2/μ равен наибольшему из значений параметров $\rho UL/T$, ρU^2, $2\omega\rho UL$, в противном случае ускорение потока движения будет нулевым.

Перейдем к упрощенному варианту исследуемой системы дифференциальных уравнений. Оставляя в уравнении (11) главные члены, получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(p + \frac{b^2}{2\mu}\Big) = -\rho g$$

или, интегрируя по z,

$$p + b^2/(2\mu) = -\rho g z + C(x, y, t).$$

Используя граничные условия $p(x, y, -h_b) = p_0$, $b(x, y, -h_b) = b_0$, где p_0, b_0 — постоянные величины, имеем

$$p + b^2/(2\mu) = p_0 + b_0^2/(2\mu) - \rho g(h_b + z). \tag{12}$$

Из выражения (12) следует, что горизонтальный градиент гидромагнитного давления не зависит от z:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(p + \frac{b^2}{2\mu}\Big) = -\rho g\,\frac{\partial h_b}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(p + \frac{b^2}{2\mu}\Big) = -\rho g\,\frac{\partial h_b}{\partial y},$$

поэтому горизонтальные компоненты скорости и магнитного поля также не зависят от z, если они не зависели от z в начальный момент времени.

Уравнения (10) принимают вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega v_y + g\,\frac{\partial h_b}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_x}{\partial y}\Big),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = 2\omega v_x + g\,\frac{\partial h_b}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_y}{\partial y}\Big).$$

Условие независимости v_x и v_y от z позволяет проинтегрировать уравнение (8) по z:

$$v_z(x, y, z, t) = -z\Big(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Big) + a(x, y, t).$$

Используя условие отсутствия нормальной компоненты скорости на твердой поверхности $z = -Z$, имеем

$$v_z(x, y, -Z, t) = -v_x \frac{\partial Z}{\partial x} - v_y \frac{\partial Z}{\partial y},$$

следовательно,

$$a(x, y, t) = -v_x \frac{\partial Z}{\partial x} - v_y \frac{\partial Z}{\partial y} - Z\Big(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Big),$$

поэтому

$$v_z(x, y, z, t) = -(Z + z)\Big(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Big) - v_x \frac{\partial Z}{\partial x} - v_y \frac{\partial Z}{\partial y}. \tag{13}$$

С учетом равенства (13) из краевого условия

$$v_z = -\frac{\partial h_b}{\partial t} - v_x \frac{\partial h_b}{\partial x} - v_y \frac{\partial h_b}{\partial y}, \qquad z = -h_b(x, y, t)$$

получаем

$$\frac{\partial h_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(-Z + h_b)v_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(-Z + h_b)v_y\right] = 0.$$

Проинтегрируем уравнение (9) по z:

$$b_z(x, y, z, t) = -z\Big(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}\Big) + \tilde{a}(x, y, t).$$

На поверхности $z = -h_b$ выполняется условие

$$b_z(x, y, -h_b, t) = b_{z0}(x, y, t),$$

поэтому

$$\tilde{a}(x, y, t) = b_{z0}(x, y, t) - h_b\Big(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}\Big),$$

следовательно,

$$b_z(x, y, z, t) = -(h_b + z)\Big(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}\Big) + b_{z0}(x, y, t). \tag{14}$$

С учетом условия на поверхности $z = -Z$

$$b_z(x, y, -Z, t) = b_{z0}^{(e)}(x, y, t)$$

равенство (14) имеет вид

$$(h_b - Z)\Big(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}\Big) + b_{z0}^{(e)}(x, y, t) - b_{z0}(x, y, t) = 0.$$

Таким образом, поскольку $\delta \ll 1$, имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 2\omega v_y + g\,\frac{\partial h_b}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho}\Big(b_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_x}{\partial y}\Big), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -2\omega v_x + g\,\frac{\partial h_b}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho}\Big(b_y \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial y}\Big); \end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial h_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(-Z + h_b)v_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(-Z + h_b)v_y\right] = 0; \tag{16}$$

$$
\begin{gathered}
(-Z+h_b)\Big(\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}\Big)+b_{z0}^{(e)}(x,y,t)-b_{z0}(x,y,t)=0,\\
\frac{\partial b_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_x}{\partial y}-b_x\frac{\partial v_x}{\partial x}-b_y\frac{\partial b_x}{\partial y}=0,\\
\frac{\partial b_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_y}{\partial y}-b_x\frac{\partial v_y}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.
\end{gathered}
\qquad (17)
$$

В результате уменьшилось количество динамических уравнений, искомых функций (за счет исключения v_z и b_z из уравнений исходной системы) и независимых переменных (так как z не входит в явном виде в (15)–(17)). Остальные переменные (v_x, v_y, b_x, b_y, h_b) являются функциями только x, y и t.

Из выражений (13), (14) следует, что z-компоненты скорости v_z и магнитного поля b_z являются линейными по z функциями.

Граничными условиями для уравнений (15)–(17) являются условия непротекания через вертикальные поверхности на границе рассматриваемой области (если они имеются) с заданным магнитным полем на них:

$$
\begin{gathered}
v_x\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+v_y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})=0,\\
b_x=b_x^{(L)},\qquad b_y=b_y^{(L)},\qquad (x,y)\in L
\end{gathered}
$$

($\boldsymbol{n}$ — нормаль к горизонтальному сечению границы области).

Заметим, что уравнения (15), (16) без учета магнитной силы Лоренца представляют собой уравнения теории длинных волн, или, согласно [21], уравнения теории мелкой воды. При наличии магнитного поля изменяется количество основных уравнений теории мелкой воды (добавляются уравнение Максвелла индукции магнитного поля и проинтегрированное по глубине слоя уравнение соленоидальности магнитного поля), а также вид уравнений движения (15), что обусловлено присутствием последних слагаемых в правых частях этих уравнений.

2. Вывод и решение уравнений квазигеострофического движения. Введем функцию полной глубины $H=-Z+h_b$. Пусть толщина жидкого слоя в состоянии покоя равна $H_0(x,y)$. Функцию $H(x,y,t)$ представим в виде

$$
H(x,y,t)=H_0(x,y)+\eta(x,y,t)=D-Z+\eta(x,y,t),\qquad \eta\ll H_0. \qquad (18)
$$

В рамках нелинейных уравнений длинноволнового приближения с учетом представления (18) рассматриваемая задача имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=2\omega v_y+g\,\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{1}{\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+b_y\frac{\partial b_x}{\partial y}\Big),\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-2\omega v_x+g\,\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{1}{\mu\rho}\Big(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x}+b_y\frac{\partial b_y}{\partial y}\Big),\\
\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\,[(H_0+\eta)v_x]+\frac{\partial}{\partial y}\,[(H_0+\eta)v_y]=0,\\
(H_0+\eta)\Big(\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}\Big)+b_{z_0}^{(e)}(x,y,t)-b_{z_0}(x,y,t)=0,\\
\frac{\partial b_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_x}{\partial y}-b_x\frac{\partial v_x}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=0,\\
\frac{\partial b_t}{\partial t}+v_x\frac{\partial b_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial b_y}{\partial y}-b_x\frac{\partial v_y}{\partial x}-b_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.
\end{gathered}
\qquad (19)
$$

Проведем более подробный анализ порядков членов, входящих в уравнения системы (19). Пусть L — линейный масштаб, U — масштаб скорости, B — масштаб магнитного поля, T — масштаб времени, N — масштаб ординаты поверхности $\eta(x, y, t)$. Введем следующие безразмерные переменные:

$$x', \quad y', \quad t', \quad v'_x, \quad v'_y, \quad b'_x, \quad b'_y, \quad \eta', \quad x = Lx', \quad y = Ly',$$
$$t = Lt', \quad v_x = Uv'_x, \quad v_y = Uv'_y, \quad b_x = Bv'_x, \quad b_y = Bb'_y, \quad \eta = N\eta'.$$

Тогда основные уравнения (19) принимают вид (штрихи опущены)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_T \frac{\partial v_x}{\partial t} + \varepsilon\Big(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\Big) - v_y = \frac{gN}{L\alpha U}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho}\Big(\frac{B}{U}\Big)^2\varepsilon\Big(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_x}{\partial y}\Big),\\
&\varepsilon_T \frac{\partial v_y}{\partial t} + \varepsilon\Big(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\Big) + v_x = \frac{gN}{L\alpha U}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho}\Big(\frac{B}{U}\Big)^2\varepsilon\Big(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_y}{\partial y}\Big);
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\varepsilon_T F\,\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon F\Big(v_x\frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big) - v_x\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{Z}{D}\Big) - v_y\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{Z}{D}\Big) + \\
+ \Big(1 + \varepsilon F\eta - \frac{Z}{D}\Big)\Big(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Big) = 0; \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&\Big(1 + \varepsilon F\eta - \frac{Z}{D}\Big)\Big(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}\Big) + b^{(e)}_{z_0}(x, y, t) - b_{z_0}(x, y, t) = 0,\\
&\varepsilon_T \frac{\partial b_x}{\partial t} + \varepsilon\Big(v_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_x}{\partial y} - b_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\Big) = 0,\\
&\varepsilon_T \frac{\partial b_y}{\partial t} + \varepsilon\Big(v_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_y}{\partial y} - b_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\Big) = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь

$$\varepsilon_T = \frac{1}{T\alpha}, \quad \varepsilon = \frac{U}{L\alpha}, \quad F = \frac{f^2L^2}{gD}, \quad \alpha = 2\omega.$$

Далее примем

$$\frac{gN}{L\alpha U} = 1. \tag{23}$$

Тогда $N = L\alpha U/g$. Из проведенного выше анализа следует $B^2/(\mu\rho U^2) = O(1)$, $F = O(1)$. Кроме того, будем предполагать, что

$$Z/D = \varepsilon\eta_b, \qquad b^{(e)}_{z_0} - b_{z_0} = \varepsilon b_h \tag{24}$$

(η_b, b_h имеют порядок единицы). Условие (24) означает, что число Россби ε, оставаясь малым, еще настолько велико, что движение существенно отличается от строго геострофического движения.

Числа Россби ε_T и ε являются мерой отношения локального и адвективного ускорений к ускорению Кориолиса. Отношение локального ускорения к адвективному определяется параметром

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} = \frac{L}{UT}.$$

В случае, когда этот параметр велик, уравнения, по сути, являются линейными, т. е. локальная производная по времени преобладает над нелинейными адвективными членами.

Предположим, что нелинейные члены так же важны, как и локальное ускорение. Иными словами, будем считать, что $\varepsilon_T/\varepsilon = 1$, т. е. будем рассматривать такие случаи, когда время адвекции L/U имеет тот же порядок, что и временной масштаб локальных изменений.

Используя условия (23), (24) и применяя к уравнениям (20) оператор rot, с учетом уравнения (21) при $\varepsilon_T = \varepsilon$ из системы уравнений (20)–(22) в первом приближении ($\varepsilon = 0$) получим уравнения

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y}\Big)(\Omega - F\eta + \eta_b) = M\Big(b_x\frac{\partial\zeta}{\partial x} + b_y\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big); \tag{25}$$

$$v_x = \frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\eta}{\partial x}, \qquad \Omega = -\Delta\eta, \qquad \zeta = \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}; \tag{26}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0; \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial b_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_x}{\partial y} - b_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0,\\ \frac{\partial b_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_y}{\partial y} - b_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,\end{gathered} \tag{28}$$

где $M = B^2/(\mu\rho U^2)$. В отсутствие магнитного поля такое приближение в гидродинамике называют квазигеострофическим [21].

Решения системы нелинейных уравнений (25)–(28) будем искать в виде зависимости компонент магнитного поля от функции η:

$$b_x = f_1(\eta), \qquad b_y = f_2(\eta). \tag{29}$$

Тогда уравнения (25), (28) в терминах функции η принимают вид

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)&(-\Delta\eta - F\eta + \eta_b) =\\ &= M\Big[f_2''\Big(f_1\Big(\frac{\partial\eta}{\partial x}\Big)^2 + f_2\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big) - f_1''\Big(f_1\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\frac{\partial\eta}{\partial y} + f_2\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)^2\Big) +\\ &\qquad + f_2'\Big(f_1\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + f_2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\Big) - f_1'\Big(f_1\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + f_2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\Big)\Big];\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{gathered}f_1'\,\frac{\partial\eta}{\partial t} - f_1\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} - f_2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = 0,\\ f_2'\,\frac{\partial\eta}{\partial t} + f_1\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + f_2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} = 0.\end{gathered} \tag{31}$$

Члены в выражении $-\Delta\eta - F\eta + \eta_b$ полностью определяются относительным движением.

Итак, задача определения квазигеострофического движения сводится к решению системы трех нелинейных уравнений для возмущения поверхности η (или, что то же, для гидромагнитного давления) и для функций $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$, описывающих магнитное поле. Получив решения η, f_1, f_2 уравнений (30), (31), компоненты скорости v_x, v_y и поля b_x, b_y можно определить из соотношений (26), (29).

Решение η будем искать в виде

$$\eta = A\,\mathrm{e}^{i(kx + ly - \sigma t)}\,.$$

Тогда система (30), (31) принимает вид

$$i\Big(-\sigma(k^2+l^2)+\sigma F+l\,\frac{\partial\eta_b}{\partial x}-k\,\frac{\partial\eta_b}{\partial y}\Big)=$$

$$=\frac{1}{\mu\rho}\big(f_1''(klf_1+l^2f_2)-f_2''(k^2f_1-klf_2)\big)A\,\mathrm{e}^{i(kx+ly+\sigma t)}+$$

$$+\big(f_1'(klf_1+l^2f_2)-f_2'(k^2f_1+klf_2)\big); \qquad (32)$$

$$-i\sigma f_1'+klf_1+l^2f_2=0, \qquad i\sigma f_2'+k^2f_1+klf_2=0. \qquad (33)$$

Функции $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ в аналитическом виде найдем из системы уравнений (33). Исключив из этой системы функцию f_2, получим

$$f_2=\frac{i\sigma}{l^2}\,f_1'-\frac{k}{l}\,f_1.$$

Тогда для функции $f_1(\eta)$ имеем уравнение

$$f_1''(\eta)=0$$

и его общее решение

$$f_1(\eta)=C_1\eta+C_2. \qquad (34)$$

Следовательно,

$$f_2(\eta)=\frac{i\sigma C_1}{l^2}-\frac{kC_2}{l}-\frac{kC_1}{l}\,\eta. \qquad (35)$$

С учетом выражений (34) и (35) уравнение (32) принимает вид

$$-\sigma(k^2+l^2)+\sigma F+l\,\frac{\partial\eta_b}{\partial x}-k\,\frac{\partial\eta_b}{\partial y}=\frac{\sigma C_1^2M}{l^2}\,(k^2+l^2). \qquad (36)$$

Заметим, что уравнение (27), представляющее собой условие квазисоленоидальности магнитного поля, выполняется тождественно.

Таким образом, справедлив следующий вывод. Для бесконечно протяженной по горизонтали электропроводной вращающейся жидкости при $\nabla\eta_b=\mathrm{const}$, что эквивалентно предположению о приблизительно постоянном наклоне поверхности $z=-Z(x,y)$ на расстоянии порядка длины волны, имеем точное решение системы нелинейных уравнений (25)–(28)

$$\eta=A\,\mathrm{e}^{i(kx+ly-\sigma t)}, \qquad v_x=\frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad v_y=-\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$b_x=C_1\eta+C_2, \qquad b_y=\frac{i\sigma C_1}{l^2}-\frac{kC_2}{l}-\frac{kC_1}{l}\,\eta.$$

Из уравнения (36) следует дисперсионное соотношение

$$\sigma=\frac{k\,\partial\eta_b/\partial y-l\,\partial\eta_b/\partial x}{F-(1+k^2/l^2)(l^2+C_1^2M)}.$$

Отметим, что в случае $C_1M=0$ дисперсионное соотношение имеет тот же вид, что и для низкочастотной волны Россби в неэлектропроводной жидкости. В обоих случаях волны с более высокой частотой не учитываются в силу априорного предположения о квазигеострофическом характере движения.

Основные характеристики движения можно записать следующим образом:

$$\eta(x,y,t) = A\,\mathrm{e}^{\sigma_2 t}\cos{(kx+ly-\sigma_1 t)},$$

$$b_x = (-a\sin{(kx+ly-\sigma_1 t)} + b\cos{(kx+ly-\sigma_1 t)})A\,\mathrm{e}^{\sigma_2 t} + C_2,$$

$$b_y = -\frac{k}{l}\,(-a\sin{(kx+ly-\sigma_1 t)} + b\cos{(kx+ly-\sigma_1 t)})A\,\mathrm{e}^{\sigma_2 t} - \Big(\frac{\sigma_1 a + \sigma_2 b}{l^2} - \frac{kC_2}{l}\Big),$$

$$v_x = -lA\,\mathrm{e}^{\sigma_2 t}\sin{(kx+ly-\sigma_1 t)}, \qquad v_y = kA\,\mathrm{e}^{\sigma_2 t}\sin{(kx+ly-\sigma_1 t)}.$$

Здесь

$$\sigma_1 = \frac{(k\,\partial\eta_b/\partial y - l\,\partial\eta_b/\partial x)(FM - (1+k^2/l^2)(l^2M + a^2 - b^2))M}{(FM - (1+k^2/l^2)(l^2M + a^2 - b^2))^2 + 4a^2b^2(1+k^2/l^2)^2M^4},$$

$$\sigma_2 = \frac{2ab(1+k^2/l^2)(k\,\partial\eta_b/\partial y - l\,\partial\eta_b/\partial x)M^3}{(FM - (1+k^2/l^2)(l^2M + a^2 - b^2))^2 + 4a^2b^2(1+k^2/l^2)^2}.$$

При этом $a, b, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$, $C_1 = a + ib$, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$. Знак σ_2 зависит от знака выражения $ab(k\,\partial\eta_b/\partial y - l\,\partial\eta_b/\partial x)$. Для существования ограниченного решения необходимо, чтобы значения a и b удовлетворяли неравенству

$$ab\Big(k\,\frac{\partial\eta_b}{\partial y} - l\,\frac{\partial\eta_b}{\partial x}\Big) < 0.$$

Проецируя уравнения магнитной индукции на вертикальную ось, можно установить связь между амплитудой внешнего магнитного поля, рельефом мантии и амплитудой колебаний границы твердого ядра Земли. Действительно, в рассматриваемой задаче уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial b_{z0}^{(e)}}{\partial t} + \frac{\mathcal{D}(\eta, b_{z0}^{(e)})}{\mathcal{D}(x,y)} + \frac{i\sigma C_1}{l^2}\,\frac{\mathcal{D}(\partial\eta/\partial y, Z)}{\mathcal{D}(x,y)} = 0.$$

Из этого уравнения для периодического по горизонтальным координатам и времени поля $b_{z0}^{(e)}$, т. е., например, при $b_{z0}^{(e)} = B\,\mathrm{e}^{i(kx+ly-\sigma t)}$, следует

$$A = \frac{B}{C_1((k/l)\,\partial Z/\partial y - \partial Z/\partial x)}.$$

Итак, представленные аналитические решения позволяют определить влияние рельефа мантии и динамики твердого ядра Земли на магнитогидродинамические характеристики волнового процесса в жидком ядре. Результаты этих исследований могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Elzasser W. M.** Induction effects in terrerstrial magnetism. Pt 1. Theory // Phys. Rev. 1946. V. 69. P. 106–116.
2. **Elzasser W. M.** Induction effects in terrerstrial magnetism. Pt 2. The secular variation // Phys. Rev. 1946. V. 70. P. 202.
3. **Bullard E. C.** The magnetic field withing the Earth // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1949. V. 197. P. 433–453.
4. **Брагинский С. И.** Об основах теории гидромагнитного динамо Земли // Геомагнетизм и аэрономия. 1967. Т. 7. С. 401–416.

5. **Каулинг Т.** Магнитная гидродинамика / Пер. с англ. В. Г. Петрова. М.: Атомиздат, 1978.
6. **Брагинский С. И.** О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1964. Т. 47, вып. 3. С. 1084–1098.
7. **Жарков В. Н.** Физика планетных недр / В. Н. Жарков, В. П. Трубицын. М.: Наука. Физматлит, 1980.
8. **Космическая** магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худа. М.: Мир, 1995.
9. **Lowes F. J., Wilkinson I.** Geomagnetic dynamo: a laboratory model // Nature. 1963. V. 198. P. 1158–1160.
10. **Lowes F. J., Wilkinson I.** Geomagnetic dynamo: an improved laboratory model // Nature. 1968. V. 219. P. 717–718.
11. **Herzenberg A.** Geomagnetic dynamos // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 250. P. 543–585.
12. **Альфвен Г.** Космическая электродинамика / Г. Альфвен, К.-Г. Фельтхаммар. М.: Мир, 1967.
13. **Busse F. H.** Generation of planetary by convection // Phys. Earth Planet. Inter. 1976. V. 12. P. 350–358.
14. **Zhang K.-K., Busse F. H.** Finite amplitude convection and magnetic field generation in a rotating spherical shell // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1988. V. 44. P. 33–54.
15. **Zhang K.-K., Busse F. H.** Convection driven magnetohydrodynamic dynamos in rotating spherical shell // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1989. V. 49. P. 97–116.
16. **Zhang K.-K., Busse F. H.** Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // Phys. Earth Planet. Inter. 1990. V. 59. P. 208–222.
17. **Алешков Ю. З.** Математическое моделирование физических процессов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2001.
18. **Гунько Ю. Ф.** Электромагнитная газодинамика плазмы / Ю. Ф. Гунько, А. В. Норин, Б. В. Филиппов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2003.
19. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1992. Т. 8.
20. **Шерклиф Дж.** Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967.
21. **Педлоски Дж.** Геофизическая гидродинамика: В 2 т. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 9/VIII 2007 г.,
в окончательном варианте — 21/II 2008 г.