ПМТФ, № 2, 1971

О ВЛИЯНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

А. А. Иванов, В. Ф. Муравьев

(Москва)

Рассмотрено воздействие высокочастотного магнитного поля на низкочастотные неустойчивости плазмы. Учитывались появляющиеся при этом гармоники высокочастотного поля. Показано, что их влияние на уменьшение инкремента неустойчивости слабое. Однако при анализе спектра колебаний учет этих гармоник необходим, так как они имеют тот же инкремент, что и подавляемая неустойчивость.

Известно, что в плазме, находящейся в сильном магнитном поле H_{0z}, развиваются неустойчивые колебания, причем наиболее опасными являются электростатические колебания, распространяющиеся почти перпендикулярно магнитному полю ($k_\perp \gg k_\parallel$). Эти колебания имеют вид желобков, вытянутых почти вдоль H_{0z}.

Если бы каким-либо способом удалось создать условия, при которых частицы одного сорта (либо электроны, либо ионы) за время, значительно меньшее периода неустойчивых колебаний $2\pi/\omega$, успевали пройти расстояние между горбами желобков, тогда потенциал неустойчивости сглаживался бы, т. е. неустойчивость подавлялась. Это можно сделать, возбуждая в плазме высокочастотное магнитное поле $H_1(t) = H_1 \cos \Omega t$ ($\Omega \gg \omega$), ориентированное перпендикулярно постоянному H_{0z}. Тогда пересечение частицами желобков осуществляется за счет движения с тепловыми скоростями вдоль суммарного искривленного магнитного поля.

Для получения дисперсионного уравнения квазинейтральных электростатических колебаний плазмы, неоднородной по координате x и помещенной в магнитное поле

$$\mathbf{H}\{0, H_1 \cos \Omega t, H_0\}, \qquad H_1 \ll H_0, \qquad \Omega \ll \omega_{H\alpha} = e_\alpha H_0 / m_\alpha c$$

воспользуемся дрейфовым кинетическим уравнением для поправки f_1^α к стационарной функции распределения $f_0^\alpha(v_\parallel)$. (Здесь $v_\parallel$ — скорость вдоль направления суммарного магнитного поля.) [1]

$$\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial t} + v_\parallel (\mathbf{h}\nabla) f_1^\alpha + \frac{c}{H_0}([\mathbf{Eh}]\nabla) f_0^\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\mathbf{Eh})\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\parallel} = 0 \tag{1}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \qquad \mathbf{h} = \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y \frac{H_1}{H_0}\cos\Omega t$$

При помощи фурье-преобразования по координатам получаем

$$\frac{\partial f_k^\alpha}{\partial t} + i v_\parallel (\mathbf{kh}) f_k^\alpha - \frac{ic}{H_0}\varphi_k k_y \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial x} - i\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\varphi_k(\mathbf{kh})\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\parallel} = 0 \tag{2}$$

Интегрируем (2) по t методом вариации произвольной постоянной

$$f_k^\alpha(v_\parallel, t) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{v_\parallel}\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\parallel}\varphi_k - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{v_\parallel}\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\parallel}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial\varphi_k(t')}{\partial t'}\times \tag{3}$$

$$\times \exp\left[i\int\limits_t^{t'} v_\parallel(\mathbf{kh}(t''))\,dt''\right]dt' + i\frac{ck_y}{H_0}\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi_k(t')\exp\left[i\int\limits_t^{t'} v_\parallel(\mathbf{kh}(t''))\,dt''\right]dt'$$

Подставим сюда $\varphi_k(t)$, $f_k^\alpha(v_\parallel, t)$ в виде (ср. [1])

$$\varphi_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \exp i(-\omega + n\Omega)t,$$

$$f_k^\alpha(v_\parallel, t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^\alpha(v_\parallel) \exp i(-\omega + s\Omega)t \tag{4}$$

Умножая затем обе части уравнения на $\exp i(\omega - s\Omega)t$ и интегрируя по периоду $2\pi/\Omega$, получаем фурье-компоненту f_s^α, соответствующую s-й гармонике высокочастотного поля

$$f_s^\alpha(v_\parallel) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{v_\parallel}\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\parallel}\varphi_s + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\sum_{p,\,l=-\infty}^{+\infty}\varphi_p\left[\frac{1}{v_\parallel}\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_\parallel}(\omega - p\Omega) + \right.$$

$$\left. + \frac{k_y}{\omega_{H\alpha}}\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial x}\right]\frac{J_l(\mu v_\parallel)J_{l+p-s}(\mu v_\parallel)}{\Omega(l+p) + k_z v_\parallel - \omega}, \qquad \mu = \frac{k_y H_1}{\Omega H_0} \tag{5}$$

После интегрирования (5) по $v_\parallel$ получаем возмущение концентрации частиц α, связанное с неустойчивыми колебаниями

$$\frac{n_s^\alpha}{n_0} = -\frac{e_\alpha \varphi_s}{T_\alpha} -$$

$$-\frac{e_\alpha}{T_\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{p,\,l=-\infty}^{+\infty}\varphi_p \frac{\omega - p\Omega + \omega_\alpha^*}{\Omega(p+l) + k_z v_\parallel - \omega} J_l(\mu v_\parallel) J_{l+p-s}(\mu v_\parallel) f_0^\alpha(v_\parallel)\, dv_\parallel \tag{6}$$

$$\omega_\alpha^* = -\frac{c k_y T_\alpha}{e_\alpha H_0}\frac{\partial \ln n_0}{\partial x}\left(1 - \frac{\eta_\alpha}{2} + \eta_\alpha \frac{v_\parallel^2}{v_{T\alpha}^2}\right)$$

$$\eta_\alpha = \frac{\partial \ln T_\alpha}{\partial \ln n_0}, \qquad f_0^\alpha = \frac{n_0^\alpha(x)}{\sqrt{\pi} v_{T\alpha}} \exp\left(-\frac{m_\alpha v_\parallel^2}{2T_\alpha(x)}\right)$$

Принципиальную сторону вопроса учета гармоник высокочастотного магнитного поля выясним на примере дрейфово-температурной неустойчивости ($\omega \ll \omega_{Hi}$, $\omega/k_z \gtrsim v_{Ti}$). В этой низкочастотной неустойчивости электроны можно считать распределенными по Больцману, т. е. $n_s^e/n_0 = e\varphi_s/T_e$, а ионы — в соответствии с формулой (6). Из условия квазинейтральности колебаний ($n_s^e = n_s^i$) получаем бесконечную (вследствие учета гармоник высокочастотного поля) систему уравнений относительно φ_s

$$2\varphi_s + \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p,\,l=-\infty}^{+\infty}\varphi_p \frac{\omega - p\Omega + \omega_i^*}{\Omega(l+p) + k_z v_\parallel - \omega} J_l(\mu v_\parallel) J_{l+p-s}(\mu v_\parallel) f_0^i(v_\parallel)\, dv_\parallel = 0 \tag{7}$$

$$(T_e \sim T_i)$$

Равенство нулю бесконечного определителя этой системы и дает дисперсионное уравнение.

Докажем сходимость бесконечного определителя системы (7). Предварительно удобно в (7) вычислить сумму по l

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{J_l(\mu v_\parallel)J_{l+p-s}(\mu v_\parallel)}{\Omega(l+p) + \omega'} \equiv \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{J_l J_{l+k}}{l\Omega + \omega''} = -i\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty e^{i(\omega''+l\Omega)\tau} J_l J_{l+k}\, d\tau =$$

$$= -i(-1)^{k/2}\int_0^\infty e^{i(\omega''-k\Omega/2)\tau} J_k(2\mu v_\parallel \sin \Omega\tau/2)\, d\tau$$

Разбивая бесконечный интервал интегрирования на отрезки $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ... и используя формулу [2]

$$\int_0^\pi e^{i2\mu x} J_{2\nu}(2\beta \sin x)\,dx = \pi e^{i\mu\pi} J_{\nu-\mu}(\beta) J_{\nu+\mu}(\beta), \qquad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$$

в приближении $\omega'/\Omega \ll 1$ получаем

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{J_l J_{l+p-s}}{\Omega(l+p)+\omega'} = \frac{1}{\omega'} \begin{cases} (-1)^p J_{p+\omega'/\Omega} J_{-s-\omega'/\Omega} & (p \geqslant s) \\ (-1)^s J_{s+\omega'/\Omega} J_{-p-\omega'/\Omega} & (p \leqslant s) \end{cases}$$

Как известно [3], определитель сходится, если: а) абсолютно сходится произведение его диагональных элементов, б) абсолютно сходится сумма недиагональных элементов.

Приведем лишь доказательство пункта а) (пункт б) доказывается аналогично). Для абсолютной сходимости произведения диагональных элементов достаточна [3] абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} u_s \equiv \sum_{s=-\infty}^{\infty} s J_{s+\omega'/\Omega} J_{-s-\omega'/\Omega}$$

Воспользуемся формулой

$$J_{-s-\omega'/\Omega}(z) = (-1)^s [J_{s+\omega'/\Omega}(z) - \pi\omega'\Omega^{-1} N_{s+\omega'/\Omega}(z)] \qquad (s \geqslant 1)$$

а также асимптотическим представлением [4] функций Бесселя для $s > z$, справедливым равномерно по всем z, $0 < z < \infty$

$$J_s(z) \approx {}^1/_{12}\pi \sqrt{3\lambda}\, K_{1/3}(sw\lambda), \qquad \lambda = {}^1/_2 \ln[(1+w)/(1-w)]$$

$$N_s(z) \approx -\sqrt{\lambda}\,[2I_{1/3}(sw\lambda) + {}^1/_4\pi K_{1/3}(sw\lambda)], \qquad w = \sqrt{1 - z^2/s^2}$$

где $K_{1/3}$, $I_{1/3}$ — модифицированные функции Бесселя. Тогда получим

$$\lim_{s\to\infty} \frac{|u_{s+1}|}{|u_s|} = 1 - 2s^{-1} + O(s^{-2})$$

что и означает [3] абсолютную сходимость ряда u_s. Тем более сходящимся будет ряд, получающийся из рассмотренного интегрированием с экспоненциальным весом.

Таким образом, «зарезание» экспонентой функций Бесселя на аргументах μv_{Ti} при интегрировании по $v_\parallel$, как легко видеть, обеспечивает быструю сходимость определителя.

Эта сходимость может быть улучшена, если систему φ_s заменить другой, так чтобы исчезли большие члены $\sim \Omega/\omega$ из недиагональных элементов определителя системы (7).

Введем функции

$$\psi_s^+ = {}^1/_2[\varphi_s + (-1)^s \varphi_{-s}], \qquad \psi_s^- = [\varphi_s - (-1)^s \varphi_{-s}]\,\Omega/2\omega \qquad (8)$$

$$(s = 0, 1, 2, \ldots)$$

обладающие свойствами

$$\psi_{-s}^+ = (-1)^s \psi_s^+, \qquad \psi_{-s}^- = -(-1)^s \psi_s^-$$

Тогда вместо (7) имеем

$$2\psi_s^+ - \sum_{p\geqslant 0}\psi_p^+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega+\omega_i^*}{\omega-k_z v_\parallel}J_{-p}J_{-s}f_0^i\,dv_\parallel - \sum_{p>0}\psi_p^+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega+\omega_i^*}{\omega-k_z v_\parallel}J_{-p}J_{-s}f_0^i\,dv_\parallel +$$
$$+2\sum_{p>0}p\psi_p^-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega J_{-p}J_{-s}f_0^i}{\omega-k_z v_\parallel}dv_\parallel + \sum_{\substack{p>0\\ p+l\neq 0}}\frac{p\psi_p^+}{p+l}\int_{-\infty}^{+\infty}J_l\,[J_{l+p+s}+(-1)^s\times$$
$$\times J_{l+p-s}]\,f_0^i\,dv_\parallel = 0 \tag{9}$$

$$2\psi_s^- - \sum_{\substack{p>0\\ p+l\neq 0}}\frac{p\psi_p^-}{p+l}\int_{-\infty}^{\infty}J_l\,[J_{l+p-s}-(-1)^s J_{p+l+s}]\,f_0^i\,dv_\parallel = 0 \tag{10}$$

Здесь были учтены члены порядка Ω/ω, 1. Члены же порядка ω/Ω отброшены.

Система для ψ_s^- отщепляется. Если же учесть, что она не содержит частоты ω, то ψ_s^- следует считать равными нулю. Определитель оставшейся системы относительно ψ_s^+ в отличие от (7) уже не содержит больших членов порядка Ω/ω и, кроме того, является полубесконечным.

Сходимость определителя системы (9) позволяет ограничиться для получения приближенного дисперсионного уравнения конечным числом столбцов и строчек в нем. Приравняем нулю определитель второго порядка

$$\det\|\Phi_{kl}\| = 0 \qquad (k,\ l = 0,\ 1) \tag{11}$$

$$\Phi_{00} = 2 - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega+\omega_i^*}{\omega-k_z v_\parallel}J_0^2 f_0^i\,dv_\parallel, \quad \Phi_{10} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega+\omega_i^*}{\omega-k_z v_\parallel}J_0 J_1 f_0^i\,dv_\parallel$$

$$\Phi_{11} = 2 - 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega+\omega_i^*}{\omega-k_z v_\parallel}J_1^2 f_0^i\,dv_\parallel + \sum_{l\neq -1}\frac{1}{l+1}\int_{-\infty}^{+\infty}J_l\,[J_l - J_{l+2}]\,f_0^i\,dv_\parallel$$

$$\Phi_{01} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega+\omega_i^*}{\omega-k_z v_\parallel}J_0 J_1 f_0^i\,dv_\parallel + \sum_{l\neq -1}\frac{2}{l+1}\int_{-\infty}^{\infty}J_l J_{l+1} f_0^i\,dv_\parallel$$

Видно, что нулевое приближение, использованное в работе [1]

$$\Phi_{00} \equiv 2 - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega+\omega_i^*}{\omega-k_z v_\parallel}J_0^2(\mu v_\parallel)\,f_0^i(v_\parallel)\,dv_\parallel = 0 \tag{12}$$

верно с точностью до малого члена $\Phi_{01}\Phi_{10}$.

Малость эта следует из свойств функций Бесселя и факта их зарезания экспонентой на аргументах μv_{Ti}.

Таким образом, учет гармоник высокочастотного поля не приводит к качественно иным результатам в смысле влияния на инкремент неустойчивости. Как было показано в [1], при не слишком малой амплитуде высокочастотного магнитного поля (по крайней мере при $\mu v_{Ti} = k_y H_1 v_{Ti}/(\Omega H_0 = 2 \div 3)$ имеет место эффект уменьшения инкремента неустойчивости. Однако если говорить о спектре колебаний, то гармоники высокочастотного поля существенны. В самом деле, из разложения (4) и равенства нулю определителя системы (7) следует, что компоненты φ_n, соответствующие гармоникам высокочастотного поля, линейно связаны и раскачиваются с одним и тем же инкрементом. Таким образом, в спектре кроме низкой частоты ω должны быть представлены высокие частоты $\omega + n\Omega$, причем амплитуды спектральных линий должны падать с увеличением номера n. С точки зрения турбулентной диффузии появление в спектре высоких частот не опасно, так как диффузия при равенстве инкрементов и волновых чисел определяется низкочастотной составляющей колебаний [5].

Авторы благодарят А. В. Гордеева за плодотворные дискуссии.

Поступила 17 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. А., Рудаков Л. И., Тейхманн И. Влияние высокочастотного магнитного поля на неустойчивости плазмы. ЖЭТФ, 1968, т. 54, вып. 5.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
3. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1963.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1968.
5. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы», т. 4, М., Атомиздат, 1964.