Имея в виду, что $(1-\mu)\nu = \nu_{eff}$, найдем

$$\langle |\mathbf{w}_\omega|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} N \left\{ 2v^2 (1-\mu) - 2v^2 (1-\mu) \frac{\nu_{eff}^2}{\omega^2 + \nu_{eff}^2} \right\}$$

Подставляя это выражение в (1.1) и поделив dE_ω на время процесса N/ν, получим для излучения в одну секунду формулу (1.5).

Таким образом, интерференция парциальных волн, излученных при различных столкновениях, в среднем приводит к уменьшению интенсивности суммарной волны. Это, как мы видели, связано с тем, что амплитуды двух любых парциальных волн, которые определяются соответствующими значениями $\Delta\mathbf{v}$, в среднем всегда направлены в противоположные стороны.

На высоких частотах, при $\omega^2 \gg \nu_{eff}^2$ интерференция, в среднем, естественно, стремится к нулю и формула (1.5) превращается в (1.4).

Автор искренне признателен Я. Б. Зельдовичу, обратившему его внимание на эффект корреляции.

Поступила 22 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1960,
2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1960.
3. Bekefi G., Hirshfield I. L., Brown S. C. Закон Кирхгофа для плазмы с немаксвелловским распределением. Phys. Fluids, 1961, v. 4, No. 2, p. 173.

ИЗМЕРЕНИЕ РАСХОДА ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

А. Е. Якубенко (Москва)

Найдена связь между расходом жидкости в круглой трубе и разностью потенциалов на электродах, представляющих собой дуги окружности, при течении проводящей жидкости с заданным профилем скорости в поперечном магнитном поле.

Рассмотрим течение проводящей жидкости в круглой трубе радиуса R_0 с заданным профилем скорости, зависящим только от r

$$\mathbf{v} = V(r)\mathbf{e}_z, \qquad V(R_0) = 0$$

Здесь z — координата вдоль оси трубы, а r и θ — полярные координаты в некоторой плоскости, перпендикулярной оси трубы.

В дальнейшем будет предполагаться, что все величины от координаты z не зависят.

Пусть индуцированный под действием однородного магнитного поля

$$\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_y$$

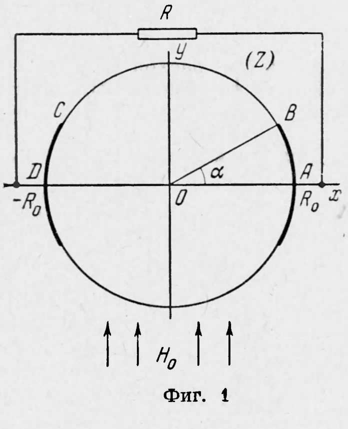
электрический ток снимается с дуг контура (электродов) во внешнюю цепь, как показано на фиг. 1.

Задача состоит в определении связи между разностью потенциалов на внешней нагрузке R с расходом жидкости в круглой трубе.

Для решения задачи запишем закон Ома в полярных координатах

$$j_r = \sigma\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{V(r)H_0}{c}\cos\theta\right)$$

$$j_\theta = \sigma\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{V(r)H_0}{c}\sin\theta\right) \qquad (1)$$



Фиг. 1

Здесь φ — потенциал электрического поля.

Для определения φ из уравнения неразрывности для плотности электрического тока получим

$$\Delta\varphi = -\frac{H_0 V'(r)}{c}\cos\theta \qquad (2)$$

Это уравнение решаем при следующих граничных условиях:

$$\varphi = -\varphi_e \quad \text{при } r = R_0, \qquad -\alpha < \theta < \alpha$$

$$\varphi = \varphi_e \quad \text{при } r = R_0, \qquad \pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R_0, \qquad \alpha < \theta < \pi - \alpha, \qquad \pi + \alpha < \theta < 2\pi - \alpha \tag{3}$$

$$2\varphi_e = RJ, \qquad J = \int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} j_r(R_0, \theta) R_0 d\theta$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$\varphi = \Phi(r, \theta) + \frac{H_0}{c}\left[\frac{r}{R_0^2}\int\limits_0^{R_0} rV(r)\,dr - \frac{1}{r}\int\limits_0^r rV(r)\,dr\right]\cos\theta \tag{4}$$

При этом, как нетрудно проверить, функция $\Phi(r, \theta)$ будет гармонической. Преобразуем закон Ома с помощью соотношения (4)

$$j_r = \sigma\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{H_0}{c}\left(\frac{1}{R_0^2}\int\limits_0^{R_0} rV(r)\,dr + \frac{1}{r^2}\int\limits_0^r rV(r)\,dr\right)\cos\theta\right]$$

$$j_\theta = \sigma\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{H_0}{c}\left(V(r) + \frac{1}{R_0^2}\int\limits_0^{R_0} rV(r)\,dr - \frac{1}{r^2}\int\limits_0^r rV(r)\,dr\right)\sin\theta\right] \tag{5}$$

Рассмотрим аналитическую функцию

$$w(z) = u + iv = r\frac{\partial \Phi}{\partial r} - i\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \qquad (z = x + iy)$$

Для определения $w(z)$ получаем следующую краевую задачу, которую в силу симметрии будем решать для верхнего полукруга,

$$v = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \pi, \text{ и при } z = R_0 e^{i\theta} \text{ для } 0 < \theta < \alpha, \ \pi - \alpha < \theta < \pi$$

$$u = -\frac{QH_0}{c\pi R_0}\cos\theta \quad \text{при } z = R_0 e^{i\theta} \text{ для } \alpha < \theta < \pi - \alpha \tag{6}$$

$$w(0, 0) = 0 \qquad \left(Q = 2\pi\int\limits_0^{R_0} rV(r)\,dr\right)$$

Здесь Q — расход жидкости в трубе.

Кроме перечисленных условий (6), функции u и v должны удовлетворять условию

$$2\varphi_e = RJ \tag{7}$$

Для $2\varphi_e$ и J имеем

$$2\varphi_e = \int\limits_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{\partial \varphi(R_0, \theta)}{\partial \theta} d\theta = -\int\limits_\alpha^{\pi-\alpha} v(R_0, \theta)\,d\theta \tag{8}$$

$$J = 2R_0\int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi} j_r(R_0, \theta)\,d\theta = -2\sigma\left[\int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi} u(R_0, \theta)\,d\theta - \frac{H_0 Q}{c\pi R_0}\sin\alpha\right] \tag{9}$$

Учитывая (8) и (9), из соотношения (7) получим

$$\int\limits_\alpha^{\pi-\alpha} v(R_0, \theta)\,d\theta = 2\sigma R\left[\int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi} u(R_0, \theta)\,d\theta - \frac{QH_0}{c\pi R_0}\sin\alpha\right] \tag{10}$$

Таким образом, помимо условий (6), функция $w(z)$ должна еще удовлетворять условию (10).

Для решения задачи (6), (10) отобразим полукруг плоскости z на верхнюю полуплоскость ζ так, чтобы начало координат перешло в бесконечно удаленную точку при помощи конформного отображения

$$\zeta = \xi + i\eta = -\frac{(z - R_0)^2}{4zR_0} \tag{11}$$

Точки A, B, C, D, O контура полуокружности плоскости z перейдут при этом в точки, лежащие на действительной оси плоскости ζ с координатами $A_1(0, 0)$, $B_1(\xi_1 = (\sin {}^1/_2\,\alpha)^2, 0)$, $C_1(\xi_2 = (\cos {}^1/_2\alpha)^2, 0)$, $D_1(1, 0)$, $O_1(\infty, 0)$. Используя (11), получим формулы, связывающие новые переменные со старыми на отрезке A_1D_1

$$\xi = (\sin {}^1/_2\,\theta)^2, \qquad \cos\theta = 1 - 2\xi$$

На плоскости ζ имеем краевую задачу. Найти в верхней полуплоскости аналитическую функцию, удовлетворяющую следующим краевым условиям на оси ξ

$$v(\xi,\ 0) = 0 \qquad \text{при } \xi < \xi_1 \text{ и } \xi > \xi_2$$

$$u(\xi,\ 0) = \frac{QH_0}{c\,\pi R_0}(2\xi - 1) \qquad \text{при } \xi_1 < \xi < \xi_2 \quad w(\infty) = 0 \tag{12}$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{v(\xi,\ 0)\,d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} = 2\sigma R\left[\int_{\xi_2}^{1} \frac{u(\xi,\ 0)\,d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} - \frac{QH_0}{c\pi R_0}\sin\alpha\right] \tag{13}$$

Решение краевой задачи получаем при помощи формулы Келдыша — Седова [1].

$$w(\zeta) = \frac{QH_0}{c\pi R_0}\left[2\zeta - 1 - 2\sqrt{(\zeta - \xi_1)\ (\zeta - \xi_2)}\right] + \frac{\gamma}{\sqrt{(\zeta - \xi_1)(\zeta - \xi_2)}} \tag{14}$$

Здесь под $\sqrt{(\zeta - \xi_1)\ (\zeta - \xi_2)}$ понимается та ветвь функции, которая при $\eta = 0$ и $\xi > \xi_2$ берется со знаком плюс.

Входящую в (14) постоянную γ определяем из условия (13). В результате простых выкладок получим

$$\gamma = \frac{H_0Q}{2\pi R_0 c}\,\frac{\sigma R\,[\mathrm{E}(\sin\alpha) - \cos^2\alpha\,\mathrm{K}(\sin\alpha)] - \mathrm{E}(\cos\alpha) + \sin^2\alpha\,\mathrm{K}(\cos\alpha)}{\mathrm{K}(\cos\alpha) + \sigma R\,\mathrm{K}(\sin\alpha)} \tag{15}$$

Здесь $\mathrm{E}(k)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода, а $\mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Определением γ решение задачи заканчивается. Найдем теперь при помощи полученного решения электрические величины во внешней цепи.

Для разности потенциалов и полного тока по формулам (8) и (7) найдем (16)

$$2\varphi_e = \frac{QH_0}{cR_0}\,\frac{\sigma R}{\mathrm{K}(\cos\alpha) + \sigma R\,\mathrm{K}(\sin\alpha)}, \qquad J = \frac{QH_0\sigma}{cR_0}\,\frac{1}{\mathrm{K}(\cos\alpha) + \sigma R\mathrm{K}(\sin\alpha)}$$

Формулы (16) дают искомую связь между расходом жидкости в трубе Q и электрическими характеристиками во внешней цепи.

Исследуем полученные формулы. При $R \to \infty$, что соответствует случаю разомкнутой внешней цепи или включению в цепь вольтметра с большим сопротивлением, получим

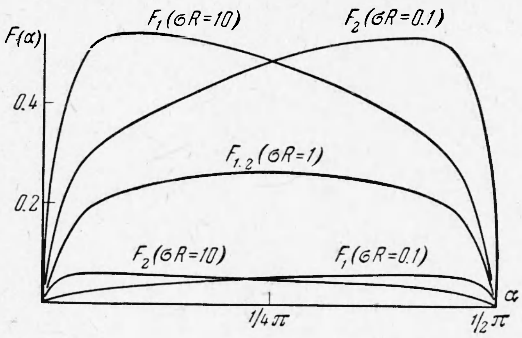
$$2\varphi_e = \varepsilon = \frac{QH_0}{cR_0K(\sin\alpha)} \tag{17}$$

Из формулы (16) видно, что максимальное значение ε достигается при $\alpha = 0$, т. е. в случае точечных электродов. При $\alpha = 0$

$$2\varphi_e = \frac{2QH_0}{c\pi R_0} \tag{18}$$

При $\alpha = {}^1/_2\pi$ величина ε достигает минимума, который равен нулю. При конечной внешней нагрузке

$$2\varphi_e = 0 \quad \text{при } \alpha = 0 \text{ и } \alpha = {}^1/_2\pi$$



Фиг. 2

Таким образом, при некотором $\alpha = \alpha(\sigma R)$ функция $2\varphi_e$ достигает максимального значения.

При $\sigma R = 1$, например, максимальное значение достигается при $\alpha = {}^1/_4\pi$. На фиг. 2 приведены графики функций

$$F_1(\alpha) = \frac{\sigma R}{K(\cos\alpha) + \sigma R K(\sin\alpha)}, \qquad F_2(\alpha) = \frac{1}{K(\cos\alpha) + \sigma R K(\sin\alpha)}$$

для $\sigma R = 0.1$, 1 и 10.

Нетрудно показать, что при $\sigma R < 1$ максимум $F_1(\alpha)$ будет лежать на отрезке $({}^1/_4\pi, {}^1/_2\pi)$, а при $\sigma R > 1$ — на отрезке $(0, {}^1/_4\pi)$.

При фиксированном угле α разность потенциалов будет возрастать от 0 при $\sigma R = 0$ до ε при $\sigma R \to \infty$.

Полный ток при этом будет изменяться от значения

$$J = \frac{QH_0\sigma}{cR_0K(\cos\alpha)}$$

соответствующего короткому замыканию, когда $\sigma R = 0$, до нуля при $R \to \infty$, когда внешняя цепь разомкнута.

Поступила 26 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1958.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ В УДАРНЫХ ТРУБАХ

М. К. Березкина, А. Н. Семенов, М. П. Сыщикова

(Ленинград)

Ударная труба может быть использована для изучения ряда нестационарных задач газовой динамики. Одной из таких задач является возникновение и развитие течения около модели, когда течение создается проходящей ударной волной. Процесс формирования течения, состоящий из отражения и дифракции ударных волн, образования головной ударной волны перед телом, возникновения и развития пограничного слоя, формирования течения в следе за телом, представляет интерес для теории нестационарных газодинамических процессов, а также имеет большое практическое значение. Поскольку длительность процессов очень мала, необходима специальная регистрирующая аппаратура. В настоящей статье дается описание простой ударной трубы, ее оборудования и методов, применявшихся для исследования такого рода процессов.

1. Конструкция и оборудование ударной трубы. Схематическое изображение экспериментальной установки дано на фиг. 1. Труба имеет прямоугольное поперечное сечение 150×50 *мм*. Длина канала 8 *м*, длина камеры 2 *м*. Канал трубы заканчивается баком, отделяемым от канала тонкой диафрагмой.

Канал трубы неподвижно закреплен на станине. Камера высокого давления и бак могут перемещаться вдоль нее. Это перемещение и одновременно уплотнение диафрагм (между баком и каналом, между каналом и камерой) осуществляются двумя грузовыми винтами с опорами на торцевых стенках бака и камеры.

Канал и камера трубы перед наполнением их рабочими газами откачиваются форвакуумными насосами типа ВН-1М и ВН-2 до давления $1 \cdot 10^{-2}$ *мм* Hg. Насос ВН-1М снабжен газобалластным устройством, позволяющим производить откачку газов с парами воды. Начальное давление газа в канале трубы регистрируется термопарным вакуумметром ВТ-2 (диапазон измеряемых давлений от $1 \cdot 10^{-2}$ до 1 *мм* Hg), масляным манометром (от 1 до 50 *мм* Hg) и ртутным манометром при давлениях свыше 50 *мм* Hg.

Разрыв диафрагмы между каналом и камерой трубы осуществляется иглой, приводимой в движение электромагнитом. Наличие иглы позволяет с хорошей точностью воспроизводить начальные условия в камере ударной трубы.

Канал трубы состоит из ряда заменяемых секций, длиной 1 *м* каждая. Секции оборудованы станциями измерения скорости фронта ударной волны.

Для получения теневых картин потока применяются простая теневая фотография, искровая скоростная съемка и специальная схема получения временных разверток, использующая теневой прибор ИАБ-451 и ждущий фоторегистратор ЖФР-1.