

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ТУПОГО ТЕЛА ПРИ АБЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ЗАЩИТНОГО СЛОЯ

Э. А. Трощ

(Ленинград)

При гиперзвуковом обтекании тупоносого тела газ, прошедший через головную ударную волну, разогревается до высоких температур, при которых в газе возникают явления диссоциации, ионизации и обратные явления (рекомбинация). Если ионизованный газ движется в магнитном поле, то возникающая пондеромоторная сила изменяет характер движения вблизи критической точки, уменьшая величину напряжения трения и теплопередачи на «стенке» (на контактной поверхности газ — обтекаемое тело). Интенсивные тепловые потоки от сильно разогретого газа к обтекаемому телу вызывают в рассматриваемом случае фазовые превращения поверхности тела (плавление, сублимация и др.). Эти процессы, в свою очередь, влияют на течение в окрестности критической точки благодаря реализации теплоты фазового перехода, отводу тепла с уносимой массой, диффузии испаряющегося материала в пограничный слой. Учету совместного влияния магнитогазодинамических эффектов и эффектов абляции посвящены работы [1,2]. В работе [1] рассматриваются магнитогазодинамические пограничные слои со степенным профилем внешней скорости («обтекание клиньев»), в [2] — частные случаи таких пограничных слоев — течение вблизи критической линии (плоский случай) и критической точки (осесимметричный случай) тупого тела. Плавление и испарение учитываются заданием отличных от нуля продольной и поперечной составляющих скорости на стенке — первая из них учитывает течение расплава, вторая — пиролиз паров материала поверхности в газовый пограничный слой. Однако величины этих составляющих, а равно и теплосодержание на стенке h_w (в [1,2] $h_w \approx 0$) заранее неизвестны и должны определяться из граничных условий на стенке, выражающих условия баланса вещества и тепла. Общая постановка задачи, изложенная в газодинамическом случае Г. А. Тирским в работах [3,4] и др., включает рассмотрение уравнений пограничного слоя в газе, уравнений пограничного слоя в расплаве и уравнения теплопроводности в твердом теле с граничными условиями на внешней границе пограничного слоя, на поверхности газ — расплав, на поверхности расплав — твердое тело и внутри твердого тела. Такой подход к задаче может быть осуществлен и в магнитогазодинамическом случае, что и сделано в настоящей работе при некоторых упрощающих предположениях по сравнению с [3,4]. В этом смысле настоящая работа представляет собой распространение результатов работ [3,4] в область магнитной газодинамики.

1. Рассмотрим обтекание полубесконечного тупого тела плоским и осесимметричным потоком вязкого тепло- и электропроводного газа (точнее, смеси реагирующих между собой газов; в случае сублимации к ним добавляются еще и пары вещества, из которого состоит поверхность тела). Приложено однородное магнитное поле, перпендикулярное поверхности тела; внешнее электрическое поле отсутствует; тогда можно показать [5], что индуцированное электрическое поле не возникает и газ не имеет избыточного заряда. Газ за ударной волной считается достаточно плотным, а приложенное магнитное поле — небольшим по величине, так что можно пренебречь током Холла и считать электропроводность скалярной величиной (более того, далее будем считать электропроводности газа и расплава постоянными). Пользуясь тем, что вязкий пограничный слой тонок, а электропроводность при термической ионизации незначительна (магнитное число Рейнольдса R_m мало), можно пренебречь влиянием индуцированного магнитного поля по сравнению с приложенным. Тогда магнитная индукция B оказывается постоянной, равной индукции при-

ложенного поля B_0 , а пондеромоторная сила сохраняет только продольную составляющую

$$F_x = -\sigma_i B_0^2 u_i \quad (i = 1, 2)$$

Здесь x — координатная ось, параллельная поверхности тела, u — проекция скорости на эту ось, σ — электропроводность, индекс 1 относится к газу, 2 — к расплаву; здесь и далее под величинами, относящимися к газу, понимаются суммарные для смеси газов величины.

Относительно газодинамических величин принимаем те же допущения, что и в [3]. Предполагаем, что форма тела в процессе фазового перехода меняется мало, тогда распределение давления над поверхностью тела будет таким же, как до оплавления или сублимации. В работе [3] в уравнении энергии отброшены члены, имеющие порядок M_∞^2 (M_∞ — число Маха за ударной волной, $M_\infty^2 \ll 1$ при сильных скачках). Эти члены — работа сил давления и вязкие тепловые потери. Заметим, что член в уравнении энергии, учитывающий джоулевы потери, имеет порядок

$$N_m^2 M_\infty^2, \quad N_m^2 = \frac{\sigma_i B_0^2 l}{\frac{1}{2} \rho_i u_\infty^2}$$

Здесь N_m — магнитный параметр, l , u_∞ , ρ_i — масштабы длины, скорости и плотности соответственно. При магнитных параметрах $N_m \sim 1$ джоулевы потери имеют тот же порядок, что и работа сил давления и вязкие тепловые потери, и отбрасываются вместе с ними. Наконец, как и в [4], пренебрегаем термодиффузией и считаем равными все коэффициенты диффузии.

При сделанных предположениях уравнения пограничного слоя в газе и расплаве отличаются от соответствующих уравнений газодинамического приближения [3,4] только членом, учитывающим пондеромоторную силу в уравнении движения. Как и в случае без магнитного поля, возможен стационарный автомодельный режим при произвольной зависимости свойств твердого тела, жидкости и газа от температуры, если эти зависимости выражаются известными дифференцируемыми функциями. С целью дальнейшего упрощения задачи будем считать теплофизические свойства твердого тела и жидкости постоянными, а для газа положим

$$\frac{h}{h_\infty} = \frac{p_\infty}{p}, \quad \frac{\rho \mu}{\rho_\infty \mu_\infty} = \text{const}, \quad P = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \text{const}, \quad L = \frac{\rho c_p D}{\lambda} = 1$$

Здесь h — теплосодержание, ρ — плотность, μ — динамическая вязкость, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, λ — теплопроводность, P — число Прандтля, D — коэффициент диффузии, L — число Льюиса, индекс ∞ относится к потенциальному потоку за скачком уплотнения. Наконец, будем рассматривать только предельное термодинамическое состояние — «замороженный» пограничный слой (скорость рекомбинации $w \approx 0$). При этом условии уравнение диффузии совпадает с уравнением энергии [6] и может быть проинтегрировано отдельно после того, как определится распределение скоростей в пограничном слое. Имея это в виду, не выписываем ниже ни уравнения диффузии, ни граничных условий для концентраций компонент смеси.

Теперь стационарный автомодельный режим течения в окрестности критической точки описывается следующими безразмерными уравнениями:

$$\varphi''' + n\varphi\varphi'' = \varphi'^2 - S + N_m^2 \varphi' S, \quad S'' + nP\varphi S' = 0; \quad (1.1)$$

$$\varphi_1''' + n\varphi_1\varphi_1'' = \varphi_1'^2 + N_m^2 \varphi_1', \quad \theta_1'' + nP\varphi_1\theta_1' = 0 \quad (1.2)$$

Безразмерные величины, входящие в (1.1), (1.2), связаны с соответствующими размерными следующими равенствами:

для газа

$$u = \beta x \varphi'(\eta), \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \sqrt{\beta v_\infty} \left[n \varphi(\eta) + \alpha \frac{\rho}{\rho_\infty} \right], \quad \beta = \left(\frac{\partial u_\infty}{\partial x} \right)_{x=0, N_m=0}$$

$$h = h_\infty S(\eta), \quad p = p_\infty - \frac{\rho_\infty \beta^2}{2} x^2, \quad \alpha = \frac{a^*}{\sqrt{\beta v_\infty}}$$

$$\int_0^\eta \frac{\rho_\infty}{\rho} d\eta = \left(\frac{\beta}{v_\infty} \right)^{1/2} (y + a^* t), \quad v_\infty = \frac{u_\infty}{\rho_\infty}, \quad N_m^2 = \frac{\sigma B_0^2}{\rho_\infty \beta^2} \quad (n=1, 2)$$

для пленки расплава

$$u_1 = \beta_1 x \varphi_1'(\eta_1), \quad v_1 = -\sqrt{\beta_1 v_1} [n \varphi_1(\eta_1) + \alpha_1], \quad T_1 = T_* \theta_1(\eta_1), \quad v_1 = \frac{u_1}{\rho_1},$$

$$p = p_{00} - \frac{\rho_1 \beta_1^2}{2} x^2, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha^*}{\sqrt{\beta_1 v_1}}, \quad \eta_1 = \left(\frac{\beta_1}{v_1} \right)^{1/2} (y + a^* t), \quad N_{m1}^2 = \frac{\sigma_1 B_0^2}{\rho_1 \beta_1}$$

Здесь $n=1$ соответствует плоскому, а $n=2$ осесимметричному течению, величины без индекса относятся к газу, с индексом 1 — к жидкости (расплаву); x — расстояние от критической точки (линии) вдоль поверхности тела, y — расстояние от поверхности тела по нормали к ней, u и v — проекции вектора скорости соответственно на оси x и y ; t — время, T — абсолютная температура, p — давление, a^* — нормальная к поверхности тела скорость перемещения фронта плавления, T_* — температура плавления, v — кинематическая вязкость, p_{00} — давление в критической точке; η, η_1 — безразмерные координаты; α, α_1 — безразмерные скорости поверхностей разрыва.

В рамках сделанных допущений граничные условия к системе (1.2) будут те же, что и в газодинамической постановке. Исключение составит только условие для продольной составляющей скорости на внешней границе пограничного слоя. Следуя [1], из уравнения движения при $y \rightarrow \infty$ (в безразмерном виде из первого уравнения (1.1) при $\eta \rightarrow \infty$) получим

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u = u_\infty = u_* [-1/2 N_m^2 + (1/4 N_m^4 + 1)^{1/2}]$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \varphi' = -1/2 N_m^2 + (1/4 N_m^4 + 1)^{1/2} \quad (1.3)$$

Здесь $u_* = \beta x$ — скорость на внешней границе пограничного слоя при отсутствии магнитного поля. Отметим, что авторы [2] считают излишним учет изменения скорости u_∞ при наличии поля и полагают $\varphi'(\infty) = 1$.

Остальные граничные условия не меняют своего вида. Запишем их для случая оплавления (к испарению относится только один численный пример, имеющийся в работе; подробно случай испарения не рассматривается). В написанных ниже равенствах $\eta = 0$ соответствует поверхности тела, $\eta = -\eta_*$ — фронту плавления

$$S \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_1} \right)^{1/2} \varphi_1'(0), \quad B \varphi''(0) = \varphi_1''(0)$$

$$S(0) = m \theta_1(0), \quad q S'(0) = m \theta_1'(0) \quad (1.5)$$

$$\varphi_1'(-\eta_*) = 0, \quad \theta_1(-\eta_*) = 1 \quad (1.6)$$

$$r_2 n \varphi_1(-\eta_*) = -\alpha_1, \quad \theta_1'(-\eta_*) = \frac{\alpha_1}{l_2} [\Delta + P_2(1-k)] \quad (1.7)$$

Здесь к обозначениям работы [3]

$$P = \frac{\mu_{\infty} c_p}{\lambda_{\infty}}, \quad P_1 = \frac{\mu_1 c_1}{\lambda_1}, \quad P_2 = \frac{\mu_2 c_2}{\lambda_2}, \quad r_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$m = \frac{c_{pw} T_*}{h_{\infty}}, \quad q = l_1 \left(\frac{v_{\infty}}{v_1} \right)^{-1/2} \left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho_1} \right)^{-1/4}, \quad l_1 = \frac{\lambda_{\infty}}{\lambda_1}$$

$$B = \left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho_1} \right)^{1/4} \left(\frac{v_{\infty}}{v_1} \right)^{1/2}, \quad l_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad k = \frac{T_{20}}{T_*}, \quad \Delta = \frac{\rho_2 v_1 \delta}{\lambda_2 T_*}, \quad \eta_* = b \left(\frac{\beta_1}{v_1} \right)^{1/2}$$

добавлены определенные выше магнитные параметры. В последних равенствах, кроме определенных выше величин, T_{20} — температура в глубине твердого тела (при $y, \eta \rightarrow -\infty$), b — толщина слоя расплава, δ — удельная теплота плавления. При формулировке краевой задачи (1.1) — (1.7) уравнение теплопроводности в твердом теле было заранее проинтегрировано, и результат

$$\theta_2 = \frac{T_2}{T_*} = (1 - k) \exp(\alpha_1 P_2 (\eta_* + \eta)) + k$$

где T_2 — температура в твердом теле, подставлен в последнее из граничных условий (1.6).

Таким образом, поставлена краевая задача для системы обыкновенных нелинейных уравнений десятого порядка (1.1), (1.2) с десятью граничными условиями (1.3) — (1.6). Два соотношения (1.7), представляющие собой уравнения сохранения массы и тепла на поверхности плавления, дают два трансцендентных уравнения относительно неизвестных параметров α_1 — безразмерной скорости фронта плавления и η_* — безразмерной толщины слоя расплава.

2. В первую очередь рассмотрим режим, когда электропроводность набегающего газа пренебрежимо мала и магнитное поле влияет только на течение электропроводного расплава. При этом $N_m = 0$, и можно воспользоваться решением для газа в газодинамическом случае. Из этого решения получим значения безразмерных напряжений трения $\varphi_1''(0)$ и теплопередачи $\theta_1'(0)$ на поверхности газ — расплав в функции от двух аргументов — безразмерной температуры $\theta_1(0)$ и безразмерной продольной скорости $\varphi_1'(0)$.

Будем искать решение первого из уравнений (1.2) с относящимися к нему граничными условиями из (1.5), (1.6) в виде отрезка ряда Маклорена для искомой функции φ_1' . Пользуясь тем, что слой расплава тонок, ограничиваемся членами $O(\eta^3)$:

$$\varphi_1' = \sum_{k=0}^3 \frac{\varphi_1^{(k+1)}}{k!} \eta^k + O(\eta^4) \quad (2.1)$$

Решение второго уравнения (1.2) при известном φ_1' сводится к квадратуре. Обозначим $\varphi_1'(0) = \varepsilon_1$, $\varphi_1''(0) = a_1$, $N_{m1}^2 = \xi_1$. Определим коэффициенты в (2.1) из дифференциального уравнения (1.2) при $n = 1$ (плоский случай)

$$\varphi_1'(\eta) = \varepsilon_1 + a_1 \eta + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \xi_1 \varepsilon_1 - 1) \eta^2 + \frac{1}{6}(\varepsilon_1 + \xi_1) a_1 \eta^3 + O(\eta^4) \quad (2.2)$$

Удовлетворяя первому из условий (1.6), получим соотношение безразмерной толщины слоя η_* с параметрами ε_1 и a_1 , которое для удобства разрешим относительно ε_1

$$\varepsilon_1 = a_1 \eta_* + \frac{1}{2} \eta_*^2 - \frac{1}{3} a_1 \xi_1 \eta_*^3 + O(\eta_*^4) \quad (2.3)$$

Используя (2.2) и (2.3), можно определить

$$\varphi_1(-\eta_*) = \int_0^{-\eta_*} \varphi_1'(\eta) d\eta$$

и из первого соотношения (1.7) — безразмерную скорость фронта плавления

$$\alpha_1 = r_2 (1/2 a_1 \eta_*^2 + 1/6 \eta_*^3 - 1/6 a_1 \zeta \eta_*^4) + O(\eta_*^5) \quad (2.4)$$

Кроме скорости фронта плавления и толщины слоя расплава, интерес представляет еще и защитный эффект пленки расплава, выражающийся в уносе тепла этой пленкой. Из второго уравнения (1.2) с учетом (2.2) и (2.3) получим

$$\vartheta = \frac{\theta_1'(-\eta_*)}{\theta_1'(0)} = \exp \left(-P_1 \int_0^{-\eta_*} \varphi_1 d\eta_1 \right) = 1 - P_1 (1/3 a_1 \eta_*^3 + 5/24 \eta_*^4) + O(\eta_*^5) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) и (2.5) во второе соотношение (1.7), получим алгебраическое уравнение относительно η_*

$$\frac{l_2 \theta_1'(0)}{r_2 [\Delta + P_2 (1-k)]} = \frac{1/2 a_1 \eta_*^2 + 1/6 \eta_*^3 - 1/6 a_1 \zeta \eta_*^4}{1 - P_1 (1/3 a_1 \eta_*^3 + 5/24 \eta_*^4)} \quad (2.6)$$

Величину $\theta_1'(0)$ — тепловой поток от газа к пленке расплава можно считать независимой от магнитного параметра ζ_1 , так как газ неэлектропроводен; тогда левая часть (2.6) не зависит от ζ_1 и будет иметь тот же вид при $\zeta_1 = 0$. Корень измененного таким образом уравнения назовем η_{10} , тогда уравнение (2.6) можно переписать в виде

$$\frac{1/2 a_1 \eta_{10}^2 + 1/6 \eta_{10}^3}{1 - P_1 (1/3 a_1 \eta_{10}^3 + 5/24 \eta_{10}^4)} = \frac{1/2 a_1 \eta_*^2 + 1/6 \eta_*^3 - 1/6 a_1 \zeta \eta_*^4}{1 - P_1 (a_1 \eta_*^3 + 5/24 \eta_*^4)} \quad (2.7)$$

Теперь можно сделать некоторые заключения о влиянии магнитного поля на величины параметров абляции — толщину слоя, скорость фронта плавления и защитный эффект. Эти величины удобно выражать через безразмерную толщину слоя при отсутствии магнитного поля η_{10} . Начнем с решения уравнения (2.7). Решаем его методом касательных, начиная с нулевого приближения $\eta_*^{(0)} = \eta_{10}$ и ограничиваясь первым приближением. Получим в результате

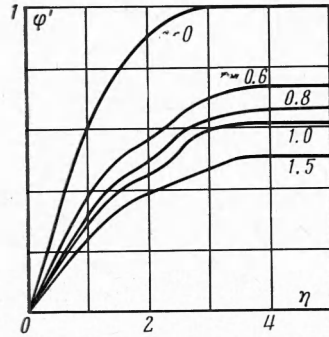
$$\eta_* = \eta_{10} + \frac{\zeta_1 \eta_{10}^3}{6} - \frac{\zeta_1 \eta_{10}^4}{12 a_1} + O(\eta_{10}^5)$$

Подставляя последний результат в (2.4) и (2.5) и относя значения параметров при наличии магнитного поля к их значениям в газодинамическом случае (эти значения снабдим индексом 0), получим следующие приближенные формулы:

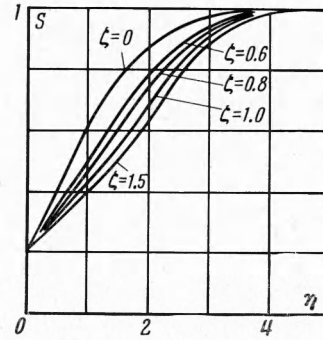
$$\begin{aligned} \eta_*/\eta_{10} &= 1 + 1/6 \zeta_1 \eta_{10}^2 + O(\eta_{10}^3) \\ \alpha_1/\alpha_{10} &= 1 + 1/36 (a_1^2 \zeta_1 + 3 \zeta_1 - 8 a_1^2 \zeta_1^2) \eta_{10}^4 + O(\eta_{10}^5) \\ \vartheta/\vartheta_0 &= 1 + 1/6 a_1 \zeta_1 \eta_{10}^5 + O(\eta_{10}^6) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из формулы (2.8) видно, что более или менее заметные изменения под действием магнитного поля претерпевает только толщина слоя расплава, а скорость фронта плавления и защитный эффект практически не меняются. Такой же результат следует из экспериментальной работы Бойнтонна [7].

3. Изменений в режиме оплавления можно ожидать только в случае, когда набегающий газ электропроводен. Рассмотрим систему уравнений газового пограничного слоя (1.1) в этом случае. Граничные условия для этой системы (1.3), (1.4), первое, второе и четвертое из (1.5). Для типичных материалов защитного слоя величина $(\rho_\infty / \rho_1)^{1/2} \ll 1$, так что значение продольной составляющей скорости $\varphi'(0) = \varepsilon$ мало.



Фиг. 1



Фиг. 2

Решим систему (1.1) сначала при условии $\varphi'(0) = 0$; влияние течения расплава ($\varepsilon \neq 0$) учтем позже.

Имея в виду искать решение системы (1.1) в виде ряда по малому параметру, выберем этот параметр из следующих соображений.

Перепишем (1.3) в виде

$$\varphi'(\infty) = -1/2 N_m^2 + (1/4 N_m^4 + 1)^{1/2} = 1 - z \quad (3.1)$$

Здесь z — отклонение скорости на внешней границе пограничного слоя от ее значения в отсутствие магнитного поля. Величину z удобно выбрать в качестве малого параметра. Действительно, из (3.1) видно, что при изменении N_m^2 от 0 до ∞ величина z меняется от 0 до 1 и остается малой даже при больших значениях N_m^2 ($N_m^2 = 2.5$, $z = 0.5$; $N_m^2 = 5$, $z = 0.65$). Таким образом, первых приближений будет достаточно для рассмотрения практически интересных случаев. Величина N_m^2 , входящая в систему (1.1) и граничное условие (1.3), выражается через z следующим образом:

$$N_m^2 = \frac{z^2 + 2z}{1 - z} = 2z + 3 \sum_{n=2}^{\infty} z^n \quad (3.2)$$

Будем искать функции φ и S в виде рядов по степеням z

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n. \quad (3.3)$$

Предполагая ряды (3.3) и ряды, полученные их формальным дифференцированием (соответственно три и два раза), равномерно-сходящимися, подставим ряды (3.3) и ряды для производных в (1.1). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , получим бесконечное число систем уравнений пятого порядка. Нулевое приближение получим, положив N_m^2 равным нулю в (1.1).

Система уравнений линейного приближения по z имеет вид

$$\varphi_1''' + \varphi^\circ \varphi_1'' - 2\varphi^\circ \varphi_1' + \varphi'' \varphi_1 = 2\varphi^\circ S', \quad S_1'' + \varphi^\circ S_1' = -\varphi_1 S'' \quad (3.4)$$

Граничные условия системы нулевого приближения будут те же, что и для основной системы (1.1), только условие (3.1) примет вид

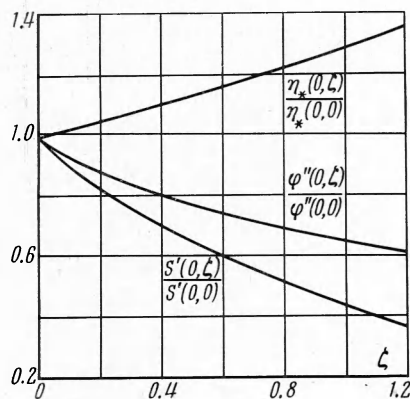
$$\varphi'(\infty) = 1 \quad (3.5)$$

Граничные условия для системы первого приближения запишутся в виде

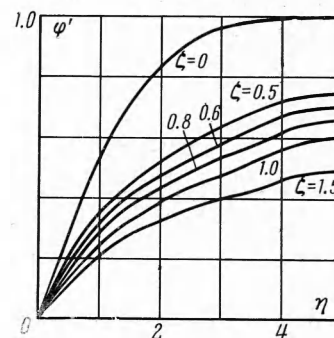
$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = S_1(0) = S_1(\infty) = 0, \quad \varphi_1'(\infty) = -1 \quad (3.6)$$

Граничные условия для следующих приближений будут полностью однородными.

Решение системы «нулевого» приближения получено Коэнном и Решотко [8]. Из этого решения взяты коэффициенты системы (3.4) при $S(0) = 0.2$. Краевая задача (3.4), (3.6) решалась известным способом сведения к задаче Коши. При численном интегрировании (3.4) применялся метод Адамса, начальные точки определялись разложением решения в ряд Маклорена в окрестности $\eta = 0$. Вычисления производились



Фиг. 3



Фиг. 4

вручную на настольной полуавтоматической машине. Результаты расчетов приведены на фиг. 1—3. На фиг. 1, 2 для значений $\zeta = 0; 0.6; 0.8; 1.0; 1.5$ приведены профили безразмерной продольной скорости $\varphi'(\eta)$ и безразмерной энтальпии $S'(\eta)$ в линейном приближении по z . Кривые $\varphi'(\eta)$ и $S'(\eta)$ построены при различных значениях магнитного параметра $\zeta = N_m^2$. Из кривых фиг. 1, 2 видно, что с ростом магнитного поля падают касательное напряжение $\varphi''(0)$ и тепловой поток $S'(0)$ на стенке. Изменение этих параметров в зависимости от магнитного параметра ζ показано на фиг. 3.

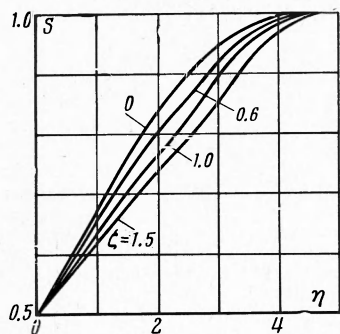
3. Из формул (2.5) и (1.7) можно заключить, что для материалов с низким числом Прандтля жидкой фазы P_1 защитный эффект мал (2.5) и скорость фронта плавления пропорциональна тепловому потоку на поверхности газ — расплав $S'(0)$. Поэтому кривая на фиг. 3, показывающая изменение $S'(0)$ в зависимости от ζ , одновременно показывает изменение α в зависимости от того же параметра. Третья кривая на фиг. 3 показывает изменение безразмерной толщины слоя расплава в зависимости от магнитного параметра ζ . Эта кривая получена по формуле (2.6); входящие в левую часть (2.6) параметры рассчитаны по теплофизическим свойствам кобальта. Итак, взаимодействие магнитного поля с электропроводным набегающим газом приводит к замедлению оплавления и утолщению слоя расплава.

Если заменить первое из условий (1.5) на условие $\varphi(0) = \varphi_w \neq 0$, то при сделанных в начале статьи оговорках система уравнений (1.1) будет описывать ламинарный пограничный слой в газе при испарении (вдуве) со стенки. Систему (1.1) с новым граничным условием можно решить точно тем же способом, что и выше при $\varphi_w = 0$. «Нулевое» приближение было взято из работы Беквиса [9] при $S(0) = 0.5$, $\varphi_w = -0.5$. Результаты расчетов приведены на фиг. 4—6: на фиг. 4, 5 — семейства профилей безразмерной скорости и энтальпии, на фиг. 6 — изменение касательного напряжения и теплопередачи на стенке в зависимости от магнитного параметра (обозначения на фиг. 6 те же, что и на фиг. 3). В полном согласии с [1, 2] и другими работами, получено, что при наличии испарения (вдува) влияние магнитного поля проявляется больше, чем при $\varphi_w = 0$. Кривые на фиг. 4—6 построены, как и раньше, в линейном приближении по параметру z .

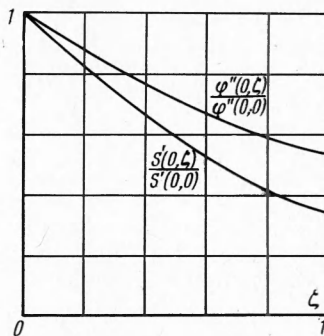
4. Выше в граничных условиях в системе (1.1) было положено $\varphi'(0) = 0$, тем самым была решена задача для пограничного слоя в газе как бы при наличии твердой стенки, без учета течения расплава. Вернемся к решению системы (1.1), восстановив граничное условие $\varphi'(0) = \varepsilon \neq 0$. Введем обозначение

$$\varphi''(0) = a(\varepsilon, S_w, P), \quad S_w = S(0)$$

Значения напряжения трения на стенке $a(\varepsilon, S_w, P)$ можно найти, если воспользоваться, как и в [3], разложением решения в ряд по ε , причем



Фиг. 5



Фиг. 6

граничное условие для нулевого приближения для функции S_0 взять в виде

$$S_0(0) = t_0 = S_w - \frac{\varepsilon S_0'}{a(0, t_0, P)}$$

После простых вычислений получим формулу, точно совпадающую с аналогичной формулой в газодинамическом случае [3]

$$a(\varepsilon, S_w, P) = a(0, t_0, P) - \frac{\varepsilon S_w}{a(0, t_0, P)} + O(\varepsilon^2) \quad (4.1)$$

Для определения теплопередачи при $\varepsilon \neq 0$ воспользуемся формулой

$$S'(0) = \frac{1 - S_w}{\omega(\infty, P, \varepsilon, S_w)} \quad (4.2)$$

$$\omega(\eta, P, \varepsilon, S_w) = \int_0^\eta \exp\left(-nP \int_0^{\eta_1} \varphi(\eta_2) d\eta_2\right) d\eta_1$$

Здесь интеграл вычисляется, как и в [3], при помощи асимптотического интегрирования при $\eta \rightarrow \infty$. Повторяя вывод [3], получим

$$\begin{aligned} \omega(\infty, P, \varepsilon, S_w) = & \frac{1}{3} \left(\frac{6}{anP} \right)^{1/3} \Gamma(1/3) \left\{ 1 + \frac{S_w - \varepsilon^2 - \zeta \varepsilon S_w}{36} \left(\frac{6}{a} \right)^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} (nP)^{-1/3} + \right. \\ & + \left[\frac{(S_w - \varepsilon^2 - \zeta \varepsilon S_w)^2}{16a^2} - \frac{(2-n)\varepsilon a - S'(0) + \zeta(aS_w + \varepsilon S'(0))}{20a} - \right. \\ & - \left. \frac{nP\varepsilon}{2} \right] \left(\frac{6}{a} \right)^{2/3} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1/3)} (nP)^{-2/3} + \left[\frac{35(S_w - \varepsilon^2 - \zeta \varepsilon S_w)^3}{648a^4} + \right. \\ & + \frac{(27n+10)(\varepsilon + \zeta S_w)(\varepsilon^2 - S_w + \zeta \varepsilon S_w) - 2(2-n)a^2 - 4\zeta a S'(0)}{90a^2} + \\ & \left. \left. + \frac{7(S_w - \varepsilon^2 - \zeta \varepsilon S_w)[S'(0) - \zeta(aS_w + \varepsilon S'(0))]}{90a^3} \right] \frac{1}{nP} + \dots \right\} \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, $n = 1$ — для плоского, $n = 2$ — для осесимметричного течения. При $\zeta = N_m^2 = 0$ формула (4.3) переходит в соответствующую формулу газодинамического случая [3]. Формулы (4.2) и (4.3) вместе дают квадратное уравнение относительно $S'(0)$. Его в общем виде можно записать так:

$$[a_1 + a_2\varepsilon + O(\varepsilon^2)] S'^2(0) + [b_1 + b_2\varepsilon + O(\varepsilon^2)] S'(0) + c = 0 \quad (4.4)$$

Коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2, c найдутся из (4.2) и (4.3). Из уравнения (4.4) нетрудно получить формулу, аналогичную (4.1)

$$S'(0, \varepsilon, S_w, P) = S'(0, 0, S_w, P) + \frac{\varepsilon}{2a_1} \left[-b_2 + \frac{b_2 - 2a_2c}{b_1^2 - 4a_1c} + \right. \\ \left. + \frac{a_2}{a_1} S'(0, 0, S_w, P) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (4.5)$$

Коэффициенты, входящие в (4.5), не выписываем ввиду их громоздкости. В частности, для плоского течения ($n = 1$) получим

$$S'(0) = 0.53(0.716\varepsilon + 1) \quad \text{при } S_w = 0, P = 1 \quad (4.6)$$

Интересно сравнить формулу (4.6), полученную для профиля скорости на внешней границе пограничного слоя $U_\infty = cx^m, m = 1$ с аналогичной формулой из [1] для $m = 1/3$

$$S'(0) = 0.49(0.73\varepsilon + 1)$$

Влияние течения, расплава на величину теплопередачи в критической точке в том и другом случаях примерно одинаково.

В заключение автор благодарит К. А. Лурье за предложенную тему и полезные обсуждения.

Поступила 17 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Lykoudis P. S. Discussion of Magnetic Boundary Layers with Boundary Conditions Assimilating Combustion, Blowing or Sublimation on the Wall. Rarefied Gas Dynamics, London — Oxford — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, p. 407—415.
2. Sparrow E. M., Eckert E. R. G., Minkowycz W. J. Transpiration Cooling in a Magneto-hydrodynamic Stagnation Point Flow. Appl. Sci. Res. A, 1962, vol. 11, No. 1, p. 125—147.
3. Тирский Г. А. Оплавление тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке газа. Ж. вычислит. матем. и математич. физ., 1961, т. 1, № 3.
4. Тирский Г. А. Сублимация тупого тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке смеси газов. Ж. вычислит. матем. и математич. физ., 1961, т. 1, № 5.
5. Байши и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Изд. «Мир», 1964.
6. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962, стр. 278—279.
7. Boynton J. H., Experimental Study of an Ablating Sphere with Hydromagnetic Effect Included. J. Aerospace Sci., 1960, vol. 27, No. 4.
8. Cohen C. B., Reshotko E., Similar Solutions for the Compressible Laminar Boundary Layer with Heat Transfer and Pressure Gradient. NACA Report 1293, 1956.
9. Beckwith I. E. Similar Solutions for the Compressible Boundary Layer on a Labeled Cylinder with Transpiration Cooling. NACA TR R-42, 1959.