ЛИТЕРАТУРА

1. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.
2. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
3. **Горев Б. В., Цвелодуб И. Ю.** Применение энергетических уравнений ползучести к расчету толстостенной цилиндрической трубы.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 17. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.

УДК 539.3

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СРЕДЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СДВИГОВЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

В. А. Баскаков

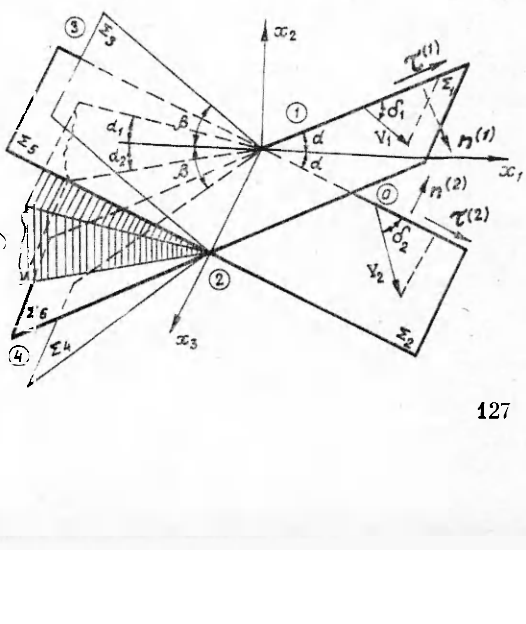
(Воронеж)

Рассматривается задача о взаимодействии сдвиговых ударных волн в пластически несжимаемой упругопластической среде с упрочнением. В рамках теории малых упругопластических деформаций математическая модель среды предполагает их аддитивность: $e_{ij} = e^e_{ij} + e^p_{ij}$ (слева — направо соответственно полные, упругие и пластические деформации). Напряженно-деформированное состояние материала определяется в окрестности точки взаимодействия, в которой на достаточно далеком расстоянии от источников возмущения фронты исходных волн Σ_1 и Σ_2 можно считать плоскими, образующими угол $0 < 2\alpha < \pi$ (см. фигуру). Оси x_1, x_2, x_3 ортогональны. Все искомые величины считаются не зависящими от x_3; перед фронтами волн Σ_1 и Σ_2 среда находится в свободном состоянии: $\sigma^{(0)}_{ij} = e^{(0)}_{ij} = u^{(0)}_i = 0$ (σ_{ij}, u_i — соответственно компоненты тензора напряжений и перемещений, $i, j = 1, 2, 3$). Индексом в круглых скобках наверху обозначаются номера зон, на которые разбивается пространство фронтами волн.

Модель среды предполагает учет двух механизмов упрочнения [1]: кинематического и изотропного. С использованием методики [2—4] строятся сначала упругое, а затем упругопластическое автомодельные решения задачи. В процессе взаимодействия волн могут образовываться как бездиссипативные области деформирования материала (упругие, нейтральные), так и области пластического течения. В бездиссипативных областях изменение напряжений и деформаций определяется упругими зависимостями, в то время как в пластических областях следует воспользоваться уравнением поверхности нагружения и ассоциированным законом пластического течения.

Отметим, что в [5] решалась аналогичная задача о взаимодействии безвихревых ударных волн в упругопластическом пространстве с упрочнением.

Рассмотрим, не конкретизируя пока тип волн, взаимодействие двух ударных фронтов, имеющих вид ступеньки. Этот случай примечателен тем, что он дает некоторые представления о характере распространения волн более общего вида и приближение для начального момента времени, необходимое для решения общей задачи. При этом может оказаться, что бездиссипативная область в результате взаимодействия волн заполняет все пространство. В системе координат $x = x_1 - St$, $y = x_2$ поле напряжений, скоростей и деформаций будет тогда стационарным за фронтами исходных волн и решение можно считать автомодельным, т. е. можно положить, что все искомые величины зависят только от $\xi = \operatorname{ctg} \varphi = xy^{-1}$, где φ — угол, отсчитываемый от положительного направления оси x против хода часовой стрелки (S—скорость подвижной системы координат, связанной с точкой взаимодействия волн). Как



следует из фигуры,

$$S = G(\sin\alpha)^{-1}, \tag{0.1}$$

где G — скорость распространения исходных волн.

Используя линейный закон Гука, формулы Коши и положив $u_1 = yu(\xi)$, $u_2 = yv(\xi)$, $u_3 = yw(\xi)$, получим следующую систему уравнений движения (штрих обозначает производную по ξ, λ, μ — параметры Ламэ, ρ — плотность среды):

$$(\lambda + 2\mu + \mu\xi^2 - \rho S^2)u'' - (\lambda + \mu)\xi v'' = 0, \tag{0.2}$$

$$(\lambda + \mu)\xi u'' - ((\lambda + 2\mu)\xi^2 + \mu - \rho S^2)v'' = 0, \quad (\mu + \mu\xi^2 - \rho S^2)w'' = 0.$$

Решение этой системы всюду тривиально

$$u = a\xi + b, \ v = c\xi + d, \ w = l\xi + f, \tag{0.3}$$

здесь определитель отличен от нуля (a, b, c, d, l, f — константы). Нетривиальное решение системы (0.2) имеет место при условии

$$(\rho G^2 - \mu)^2(\rho G^2 - (\lambda + 2\mu)) = 0, \tag{0.4}$$

где G — новая переменная, определяемая соотношением

$$G^2(\xi^2 + 1) = S^2. \tag{0.5}$$

Из (0.4) следует $G_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}$, $G_{2,3}^2 = \mu\rho^{-1}$, т. е. в теле могут распространяться как безвихревые, так и сдвиговые ударные волны.

1. Упругое решение. Рассмотрим случай взаимодействия двух сдвиговых ударных волн, распространяющихся под углом 2α друг к другу. Тогда соотношение (0.1) принимает вид $S^2\sin^2\alpha = \mu\rho^{-1}$. Если при этом положить $G = G_1$, то из (0.5) имеем $\varphi = \pm\beta + k\pi = \pm\arcsin\,[((\lambda + 2\mu)\mu^{-1})^{1/2}\sin\alpha] + k\pi$, что определяет положение безвихревых ударных волн. Если положить $G = G_{2,3}$, то из (0.5) имеем $\varphi = \pm\alpha + k\pi$ — положение сдвиговых ударных волн. При этом из физических соображений следует, что $k = 1$. Так как $|\sin\beta| \leqslant 1$, то $|(2(1-\nu)/(1-2\nu))^{1/2}\times\sin\alpha| \leqslant 1$, где ν — коэффициент Пуассона, откуда

$$0 < \alpha \leqslant \pi/4. \tag{1.1}$$

Будем обозначать волны в верхней полуплоскости $y > 0$ нечетными индексами Σ_1, Σ_3, Σ_5, а в нижней $y < 0$ — четными Σ_2, Σ_4, Σ_6. Здесь Σ_3, Σ_4 — безвихревые, а остальные — сдвиговые волны, причем Σ_6 и Σ_5 являются продолжением соответственно Σ_1 и Σ_2 в левую полуплоскость $x < 0$; номера зон между поверхностями Σ_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) указаны на фигуре.

Покажем, однако, что на самом деле в определяемом нами решении волны Σ_3 и Σ_4 отсутствуют.

Пусть интенсивность Σ_1 равна γ_1, а интенсивность Σ_2 — γ_2, тогда из условия совместности Адамара для касательной скорости перемещения v_τ имеем (в плоскости $x_3 = 0$)

$$[v_\tau]^{(0,1)} = -G[u_{\tau,n}]^{(0,1)} = G\gamma_1, \quad [v_\tau]^{(0,2)} = -G[u_{\tau,n}]^{(0,2)} = G\gamma_2,$$

где $G \equiv G_{2,3}$—скорость распространения исходных волн; n—нормаль к поверхности; [ ] — скачок соответствующей величины. Наряду с γ_1, γ_2 следует на Σ_1 и Σ_2 задать еще $v_3^{(1)}$ и $v_3^{(2)}$. Тогда вместо γ_1, γ_2, $v_3^{(1)}$, $v_3^{(2)}$ можно было бы задать величины V_1, V_2, δ_1, δ_2, например, по формулам: $V_1\cos\delta_1 = -G\gamma_1$, $V_2\cos\delta_2 = -G\gamma_2$, $V_1\sin\delta_1 = v_3^{(1)}$, $V_2\sin\delta_2 = v_3^{(2)}$. С учетом того, что компоненты вектора единичной нормали к поверхности Σ_1 равны $(\sin\alpha, -\cos\alpha)$, а к Σ_2 — $(\sin\alpha, \cos\alpha)$, скорости перемещений в областях *1*, *2* имеют вид

$$v_1^{(1)} = V_1\cos\delta_1\cos\alpha, \quad v_2^{(1)} = V_1\cos\delta_1\sin\alpha, \quad v_3^{(1)} = V_1\sin\delta_1,$$

$$v_1^{(2)} = V_2\cos\delta_2\cos\alpha, \quad v_2^{(2)} = -V_2\cos\delta_2\sin\alpha, \quad v_3^{(2)} = V_2\sin\delta_2.$$

Так как в подвижной системе координат $v_j = -S\partial u_j/\partial x$ $(j = 1, 2, 3)$, то, полагая на основании (0.3)

$$(1.2)\qquad u_1^{(i)} = a_i x + b_i y,\quad u_2^{(i)} = c_i x + d_i y,\quad u_3^{(i)} = l_i x + f_i y,$$

получим $(i = 1,\ 2)$

$$(1.3)\qquad a_i = \varkappa_i \sin\alpha,\ c_i = \omega_i \sin\alpha,\ l_i = (-1)^i \omega_i \operatorname{tg}\delta_i,$$
$$\varkappa_i = \gamma_i \cos\alpha,\ \omega_i = (-1)^{i-1}\gamma_i \sin\alpha.$$

Из условия непрерывности перемещений на Σ_1 и Σ_2 имеем

$$(1.4)\qquad l_i = (-1)^i \varkappa_i \cos\alpha,\ d_i = (-1)^i \omega_i \cos\alpha,\ f_i = -\omega_i \operatorname{tg}\delta_i \operatorname{ctg}\alpha.$$

Используя (1.3), (1.4), можно получить деформации по формулам Коши и напряжения из закона Гука в зонах *1*, *2* (по i не суммировать)

$$(1.5)\qquad \sigma_{11}^{(i)} = \mu\gamma_i \sin 2\alpha,\quad \sigma_{22}^{(i)} = -\mu\gamma_i \sin 2\alpha,\quad \sigma_{33}^{(i)} = 0,$$
$$\sigma_{12}^{(i)} = (-1)^i \mu\gamma_i \cos 2\alpha,\quad \sigma_{13}^{(i)} = \mu\gamma_i \sin\alpha \operatorname{tg}\delta_i,\quad \sigma_{23}^{(i)} = (-1)^i \mu\gamma_i \cos\alpha \operatorname{tg}\delta_i;$$

$$(1.6)\qquad e_{11}^{(i)} = 0{,}5\gamma_i \sin 2\alpha,\quad e_{22}^{(i)} = -0{,}5\gamma_i \sin 2\alpha,\quad e_{33}^{(i)} = 0,$$
$$e_{12}^{(i)} = (-1)^i \gamma_i \cos 2\alpha,\quad e_{13}^{(i)} = 0{,}5\gamma_i \sin\alpha \operatorname{tg}\delta_i,\quad e_{23}^{(i)} = (-1)^i 0{,}5\gamma_i \cos\alpha \operatorname{tg}\delta_i.$$

Принимая для $i = 3,\ 4,\ 5$ структуру записи коэффициентов такой же, как в (1.3), (1.4), из условия непрерывности перемещений на $\Sigma_3(\xi = \operatorname{ctg}(\pi - \beta))$, $\Sigma_4(\xi = \operatorname{ctg}(\pi + \beta))$, $\Sigma_5(\xi = \operatorname{ctg}(\pi - \alpha))$, $\Sigma_6(\xi = \operatorname{ctg}(\pi + \alpha))$ и равенства выражений для b_5, d_5, f_5, полученных, с одной стороны, при переходе через Σ_5, а с другой — через Σ_6 в пятую зону, получим

$$(1.7)\qquad 2\varkappa_5 \operatorname{ctg}\alpha = (\varkappa_3 + \varkappa_4)(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) + (\varkappa_1 + \varkappa_2)(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta),$$
$$2\omega_5 \operatorname{ctg}\alpha = (\omega_3 + \omega_4)(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) + (\omega_1 + \omega_2)(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta).$$
$$2\omega_5 \operatorname{tg}\delta_5 \operatorname{ctg}\alpha = (\omega_3 \operatorname{tg}\delta_3 - \omega_4 \operatorname{tg}\delta_4)(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) + (\omega_1 \operatorname{tg}\delta_1 - {}$$
$${} - \omega_2 \operatorname{tg}\delta_2)(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta).$$

Естественно предположить, что волны Σ_3 и Σ_4 не могут изменить направление поляризации движения среды; они только усиливают или ослабляют ее интенсивность, поэтому в дальнейшем считаем, что $\delta_1 = \delta_3$, $\delta_2 = \delta_4$.

Известно, что на безвихревых ударных волнах $[v_\tau] = 0$ (или $[u_{\tau,n}] = 0$), а на сдвиговых — $[v_n] = 0$ (или $[u_{n,n}] = 0$). При этом $u_{\tau,n} = u_{k,j}\tau_k n_j$, $u_{n,n} = u_{k,j} n_k n_j$, где τ_k — компоненты единичного вектора касательной к поверхности волны. Имеем на $\Sigma_3 : \tau_1^{(3)} = \cos\beta$, $\tau_2^{(3)} = -\sin\beta$, $n_1^{(3)} = \sin\beta$, $n_2^{(3)} = \cos\beta$; на $\Sigma_4 : \tau_1^{(4)} = \cos\beta$, $\tau_2^{(4)} = \sin\beta$, $n_1^{(4)} = \sin\beta$, $n_2^{(4)} = -\cos\beta$; на $\Sigma_5 : \tau_1^{(5)} = \cos\alpha$, $\tau_2^{(5)} = -\sin\alpha$, $n_1^{(5)} = \sin\alpha$, $n_2^{(5)} = \cos\alpha$; на $\Sigma_6 : \tau_1^{(6)} = \cos\alpha$, $\tau_2^{(6)} = \sin\alpha$, $n_1^{(6)} = \sin\alpha$, $n_2^{(6)} = -\cos\alpha$. Тогда с учетом (1.2)—(1.4) после преобразований получим

$$(1.8)\quad (\varkappa_1 - \varkappa_3)\operatorname{ctg}\beta = \omega_1 - \omega_2,\ (\varkappa_2 - \varkappa_4)\operatorname{ctg}\beta = \omega_4 - \omega_2,\ (\varkappa_3 - \varkappa_5)\times$$
$$\times \operatorname{tg}\alpha = \omega_5 - \omega_3,\ (\varkappa_4 - \varkappa_5)\operatorname{tg}\alpha = \omega_4 - \omega_5.$$

Система уравнений (1.7), (1.8) имеет решение:

$$(1.9)\qquad \varkappa_1 = \varkappa_3,\ \varkappa_2 = \varkappa_4,\ \varkappa_5 = \varkappa_1 + \varkappa_2,\ \omega_1 = \omega_3,\ \omega_2 = \omega_4,$$
$$\omega_5 = \omega_1 + \omega_2,\ \operatorname{tg}\delta_5 = (\omega_1 \operatorname{tg}\delta_1 - \omega_2 \operatorname{tg}\delta_2)(\omega_1 + \omega_2)^{-1}.$$

Определяя из (1.3), (1.4), где теперь $i = 3,\ 4,\ 5$, соответствующие коэффициенты, можно получить компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в окрестности точки взаимодействия волн. При этом в соотношениях (1.2), (1.5), (1.6) можно считать $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Следовательно, в пакете волн поверхностей Σ_3 и Σ_4 нет, и ограничение (1.1) данного пункта снимается. Решение в зоне *5* является суперпозицией решений в зонах *1*, *2*. Для нее имеем

(1.10) $$u_1^{(5)} = 0{,}5\,(\gamma_1 + \gamma_2)\,x \sin 2\alpha - (\gamma_1 + \gamma_2)\,y \cos^2 \alpha,$$

$$u_2^{(5)} = (\gamma_1 - \gamma_2)\,x \sin^2 \alpha + 0{,}5\,(\gamma_2 - \gamma_1)\,y \sin 2\alpha, \quad u_3^{(5)} = \gamma\,(x \sin \alpha - y \cos \alpha), \quad \gamma \equiv \gamma_1 \operatorname{tg} \delta_1 + \gamma_2 \operatorname{tg} \delta_2;$$

(1.11) $$\sigma_{11}^{(5)} = ((\lambda + \mu)\,\gamma_2 + \mu\gamma_1) \sin 2\alpha, \quad \sigma_{22}^{(5)} = ((\lambda + \mu)\,\gamma_2 - \mu\gamma_1) \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_{33}^{(5)} = \lambda\gamma_2 \sin 2\alpha, \quad \sigma_{12}^{(5)} = -\mu\,(\gamma_1 \cos 2\alpha + \gamma_2), \quad \sigma_{13}^{(5)} = \gamma\mu \sin \alpha, \quad \sigma_{23}^{(5)} = -\gamma\mu \cos \alpha;$$

(1.12) $$e_{11}^{(5)} = 0{,}5\,(\gamma_1 + \gamma_2) \sin 2\alpha, \quad e_{22}^{(5)} = 0{,}5\,(\gamma_2 - \gamma_1) \sin 2\alpha, \quad e_{33}^{(5)} = 0,$$

$$e_{12}^{(5)} = -0{,}5\,(\gamma_1 \cos 2\alpha + \gamma_2), \quad e_{13}^{(5)} = 0{,}5\gamma \sin \alpha, \quad e_{23}^{(5)} = -0{,}5\gamma \cos \alpha.$$

Таким образом, полученное упругое решение задачи завершает доказательство нашего утверждения по поводу поверхностей Σ_3 и Σ_4. В дальнейшем зоны *1* и *3* будем обозначать цифрой *1*, зоны *2* и *4* — цифрой *2*, а зону *5* цифрой *3*.

2. Упругопластическое решение. С целью получения аналитического решения задачи рассмотрим случай плоскополяризованного вдоль x_3 движения среды. Для этого положим $\delta_1 = \delta_2 = \pi/2$, отсюда $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $V_1 = v_3^{(1)}$, $V_2 = v_3^{(2)}$, а величина γ конечна. Тогда отличными от нуля являются только σ_{13}, σ_{23}, e_{13}^p, e_{23}^p, u_3, следовательно, $S_{i3} = \sigma_{i3}$ $(i = 1,\ 2)$, где S_{i3} — компоненты девиатора напряжений.

Предположим, что в зонах 1, 2 справедливо решение, полученное в п. 1. Математически это условие запишем в виде

$$I_{(m)} = S_{i3}^{(m)} S_{i3}^{(m)} = z_m^2 k^2,$$

где m — номер зоны; $0 < z_m \leqslant 1$; k — предел текучести при чистом сдвиге; I_m — величина, характеризующая интенсивность напряжений. При этом в зоне *3* могут образоваться диссипативные области только в том случае, когда волны Σ_5 и Σ_6 становятся нейтральными [2, 3]. Границами этих областей должны являться поверхности слабого разрыва α_1 и α_2, принадлежащие зоне *3*, на которых напряжения, пластические деформации и скорости перемещений непрерывны, а их первые производные терпят разрыв. Принимая такую схему построения кинематики движения, выясним условие, при котором она может реализоваться. Так как $\gamma_1 \operatorname{tg} \delta_1 = -V_1 G^{-1}$, $\gamma_2 \operatorname{tg} \delta_2 = -V_2 G^{-1}$, то, используя (1.5), (1.11), для зон *1*, *2*, *3* получим соответственно

(2.1) $$I_{(1)} = \mu\rho V_1^2 = z_1^2 k^2, \quad I_{(2)} = \mu\rho V_2^2 = z_2^2 k^2, \quad I_{(3)} = \mu\rho\,(V_1 + V_2)^2 = \left(\sqrt{I_{(1)}} + \sqrt{I_{(2)}}\right)^2.$$

Материал в третьей зоне может перейти в пластическое состояние при условии $I_{(3)} k^{-2} \geqslant 1$, откуда

(2.2) $$(z_1 + z_2)^2 \geqslant 1.$$

Пусть это неравенство выполнено. Пластический веер в третьей зоне должен находиться между двумя нейтральными областями этой зоны.

Начиная построение упругопластического решения с полуплоскости $y > 0$ против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси x_3, определим положение волны нагрузки $\varphi_1 = \pi - \alpha_1$ из соотношения

(2.3) $$c_1 \sin \alpha = G \sin \alpha_1,$$

где c_1 — скорость ее распространения, подлежащая определению. Найдем ее из следующих соображений. Основная система уравнений, определяющая непрерывное решение задачи в диссипативной области зоны 3, в переменных x_i, t имеет вид

$$\sigma_{i3,i}-\rho\dot{v}_3=0,\quad \dot{\sigma}_{i3}-\mu v_{3,i}+2\mu\dot{e}^p_{i3}=0, \tag{2.4}$$

$$(k+r\varkappa)\dot{e}^p_{i3}-(\sigma_{i3}-qe^p_{i3})\dot{\varkappa}=0,\quad (\sigma_{i3}-qe^p_{i3})(\dot{\sigma}_{i3}-q\dot{e}^p_{i3})-r(k+r\varkappa)\dot{\varkappa}=0,$$

где $r\geqslant 0$, $q\geqslant 0$—параметры упрочнения материала; $\varkappa=\int\limits_0^t\sqrt{\dot{e}^p_{i3}\dot{e}^p_{i3}}\,dt$ — параметр Одквиста; точка и запятая обозначают дифференцирование по времени и по координатам соответственно. Вид поверхности нагружения определяется умножением самого на себя третьего соотношения (2.4): $(\sigma_{i3}-qe^p_{i3})(\sigma_{i3}-qe^p_{i3})=(k+r\varkappa)^2$. Последнее соотношение (2.4) получено дифференцированием поверхности нагружения по времени.

Записав (2.4) в разрывах и применив геометрические и кинематические условия совместности первого порядка, получим аналогично [3]

$$c_1=G\sqrt{1-(\sigma^{(3)}_{i3}n_i)^2k^{-2}(1+a)^{-1}}, \tag{2.5}$$

где $n_1=\sin\alpha_1$; $n_2=\cos\alpha_1$; $a=(r+q)/2\mu\geqslant 0$; $\sigma^{(3)}_{i3}$ — неизвестные пока напряжения в третьей зоне на поверхности α_1 и перед ней. Для определения $\sigma^{(3)}_{i3}$ воспользуемся следующим соотношением на волне Σ_5:

$$-G[\sigma_{i3}]^{(1,3)}=\mu[v_3]^{(1,3)}n^{(5)}_i. \tag{2.6}$$

Находя V_1 из первого соотношения (2.1) и используя (1.5), для компонент напряжений в первой зоне получим $\sigma^{(1)}_{13}=-z_1k\sin\alpha$, $\sigma^{(1)}_{23}=z_1k\cos\alpha$. Подставляя эти значения в (2.6), определим из условия $I_{(3)}=\sigma^{(3)}_{i3}\sigma^{(3)}_{i3}=k^2$ интенсивность волны Σ_5:

$$[v_3]^{(1,3)}=-kt_1(\sqrt{\mu\rho})^{-1},\quad t_1=z_1\cos 2\alpha\pm\sqrt{1-z_1^2\sin^2 2\alpha}. \tag{2.7}$$

Знак — перед корнем не подходит, так как, например, при $z_1=1$ получаем, что Σ_5 отсутствует, что невозможно. Тогда из (2.6) имеем

$$\sigma^{(3)}_{13}=-k(z_1+t_1)\sin\alpha,\quad \sigma^{(3)}_{23}=k(z_1-t_1)\cos\alpha. \tag{2.8}$$

Кроме этого, на волне $\varphi=\varphi_1$ и перед ней

$$v^{(3)}_3=k(z_1+t_1)(\sqrt{\mu\rho})^{-1},\quad e^{p(3)}_{i3}=\varkappa^{(3)}=0. \tag{2.9}$$

Таким образом, подставляя (2.8) в (2.5), из (2.3) получим трансцендентное уравнение, определяющее положение волны α_1, для различных значений z_1 и α:

$$z_1\cos(\alpha+\alpha_1)-t_1\cos(\alpha-\alpha_1)=1-\sin^2\alpha_1(\sin\alpha)^{-2}. \tag{2.10}$$

Если бы построение упругопластического решения начиналось с полуплоскости $y<0$ по ходу часовой стрелки, то мы, рассуждая аналогично предыдущему, получили бы следующие соотношения: $\sigma^{(2)}_{13}=-z_2k\sin\alpha$, $\sigma^{(2)}_{23}=-z_2k\cos\alpha$, а вместо (2.7)

$$[v_3]^{(2,3)}=-kt_2(\sqrt{\mu\rho})^{-1},\quad t_2=z_2\cos 2\alpha\pm\sqrt{1-z_2^2\sin^2 2\alpha}. \tag{2.11}$$

В выражении для t_2 выбирается знак + по тем же соображениям, что и в (2.7).

При этом на волне нагрузки $\varphi_2=\pi+\alpha_2$ и перед ней в третьей зоне (при переходе через Σ_6) имели бы

$$\sigma^{(3)}_{13}=-k(z_2+t_2)\sin\alpha,\quad \sigma^{(3)}_{23}=k(t_2-z_2)\cos\alpha; \tag{2.12}$$

$$v^{(3)}_3=k(z_2+t_2)(\sqrt{\mu\rho})^{-1},\quad e^{p(3)}_{i3}=\varkappa^{(3)}=0. \tag{2.13}$$

Для получения решения в зоне *3* необходимо проинтегрировать систему уравнений (2.4), предварительно записав ее в переменной φ, с граничными условиями (2.8), (2.9) на волне φ_1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений примет вид

$$(2.14)\quad (\sigma_{13}' - \sigma_{23}' \operatorname{ctg}\varphi)\sin\alpha + \sqrt{\mu\rho}\, v_3' = 0,\quad \sigma_{13}' + \sqrt{\mu\rho}\, v_3' \sin\alpha + 2\mu e_{13}^{p'} = 0,$$
$$\sigma_{23}' - \sqrt{\mu\rho}\, v_3' \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\varphi + 2\mu e_{23}^{p'} = 0,\quad K e_{i3}^{p'} - \Sigma_{i3}\varkappa' = 0;\quad \Sigma_{i3}\Sigma_{i3}' - KK' = 0,$$

где $\Sigma_{i3} = \sigma_{i3} - q e_{i3}^p$; $K = k + r\varkappa$; $r\varkappa' = K'$ $(i = 1,\ 2)$. Имеем шесть уравнений с шестью неизвестными σ_{i3}, e_{i3}^p, v_3, $\varkappa$. Эти уравнения дают тривиальное решение

$$(2.15)\qquad \sigma_{13}' = \sigma_{23}' = e_{13}^{p'} = e_{23}^{p'} = v_3' = \varkappa' = 0,$$

определяющее нейтральное состояние среды в зоне *3*. Для этого состояния имеем значения (2.8), (2.9) или (2.12), (2.13) $(z_1 = z_2)$. Нетривиальное (пластическое) решение системы (2.14) возможно при условии

$$(2.16)\quad K^2(a\sin^2\alpha(\sin\varphi)^{-2} - (1 + a)) + \sin^2\alpha(\Sigma_{13}\operatorname{ctg}\varphi + \Sigma_{23})^2 = 0.$$

Удовлетворяя уравнению поверхности нагружения подстановкой

$$(2.17)\qquad \Sigma_{13} = K\cos\psi,\ \Sigma_{23} = K\sin\psi,$$

соотношение (2.16) преобразуем к виду

$$(2.18)\qquad \cos(\psi - \varphi) = ((\sin^2\varphi/\sin^2\alpha)(1 + a) - a)^{1/2} \equiv \eta(\varphi).$$

Это соотношение определяет ψ как функцию φ. Заметим, что при подстановке (2.17) в (2.14) последнее уравнение удовлетворяется тождественно.

Решая остальные, получим

$$(2.19)\qquad K = C\exp\left[b\int_{\varphi_1}^{\varphi}\psi'\operatorname{tg}(\psi - \varphi)\,d\varphi\right],$$

где $\psi' = 1 - \eta'(1 - \eta^2)^{-1/2}$; $b = r(r + q + 2\mu)^{-1}$; C — постоянная интегрирования, которая определяется из условия непрерывности величины (2.19) при $\varphi = \varphi_1$, откуда $C = k$ (считаем, что $\psi - \varphi \neq \pm\pi/2$.) Окончательно (2.19) может быть представлено в виде

$$(2.20)\qquad K = k(\eta_1/\eta)^b\exp\left[b\int_{\varphi_1}^{\varphi}\left(\frac{1 - \eta^2(\varphi)}{\eta^2(\varphi)}\right)^{1/2} d\varphi\right],$$

где $\eta_1 = \eta(\varphi_1)$.

Доказательство невозможности образования в классе ограниченных решений пластической ударной волны, на которой $[e_{i3}^p] \neq 0$, можно провести аналогично работе [3], поэтому па нем не останавливаемся.

Условие положительности скорости диссипации энергии в области, деформирующейся пластически, т. е. $\sigma_{i3}\dot{e}_{i3}^p > 0$, равносильно двум неравенствам: $\sigma_{i3}e_{i3}^{p'} < 0$ при $y > 0$ и $\sigma_{i3}e_{i3}^{p'} > 0$ при $y < 0$. Каждое из этих неравенств следует учитывать при конкретных расчетах. В частном случае идеально пластической среды указанные неравенства переходят в следующие: $\varkappa' < 0$ при $y > 0$, $\varkappa' > 0$ при $y < 0$.

Используя (2.20), можно получить

$$(2.21)\qquad \varkappa' = K(r + q + 2\mu)^{-1}\operatorname{tg}(\psi - \varphi)\cdot\psi'.$$

Тогда из четвертого и пятого уравнений (2.14) следует

$$(2.22)\qquad e_{13}^p = \int_{\varphi_1}^{\varphi}\psi'\cos\psi\,d\varphi + C_{13},\ e_{23}^p = \int_{\varphi_1}^{\varphi}\psi'\sin\psi\,d\varphi + C_{23},$$

причем $C_{13} = C_{23} = 0$, так как при $\varphi = \varphi_1$ $e_{13}^p = e_{23}^p = 0$.

Из (2.17) получаем компоненты напряжений

$$\sigma_{13} = qe_{13}^p + K\cos\psi,\ \sigma_{23} = qe_{23}^p + K\sin\psi, \tag{2.23}$$

а из первых трех уравнений (2.14) выражение для скорости перемещения

$$v_3 = 2G\sin\alpha\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{\sin\varphi\sin(\varphi-\psi)}{(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)}\varkappa' d\varphi + C_3. \tag{2.24}$$

Постоянная C_3 определяется из условия, что при $\varphi = \varphi_1$ соотношение (2.24) равно (2.9), откуда

$$C_3 = k(z_1 + t_1)(\sqrt{\mu\rho})^{-1}. \tag{2.25}$$

Положение волны разгрузки φ_2 определим из условия непрерывности напряжений при $\varphi = \varphi_2$. Так, приравнивая (2.23) к (2.12), с учетом второго соотношения (2.13) имеем

$$\cos\psi = -(z_2 + t_2)\sin\alpha,\ \sin\psi = (t_2 - z_2)\cos\alpha. \tag{2.26}$$

Добавив сюда соотношение (2.18), в котором вместо φ подставлено φ_2, получим

$$\cos(\psi - \alpha_2) = \eta(\alpha_2), \tag{2.27}$$

причем в (2.26), (2.27) $\psi = \psi(\varphi_2)$. Умножая первое уравнение (2.26) на $\cos\alpha_2$, второе — на $\sin\alpha_2$ и складывая, получим с учетом (2.27) трансцендентное уравнение для определения α_2 для различных значений z_2 и α:

$$\eta(\alpha_2) + t_2\sin(\alpha + \alpha_2) + z_2\cos 2\alpha\sin(\alpha - \alpha_2) = 0. \tag{2.28}$$

Заметим, что при вычислении α_1 из (2.10) и α_2 из (2.28) следует брать только те их значения, которые принадлежат сектору $\Sigma_5\Sigma_6$. Определив положение волны α_2 по формуле (2.28), скорость ее распространения c_2 найдем из соотношения, аналогичного (2.3). Критерием правильности численных расчетов для α_2 служит равенство (2.24) при $\varphi = \varphi_2$ первому выражению (2.13). Задача решена.

Поступила 20 XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
2. **Блейх Г. Г., Мэтьюз А. Т.** Движение со сверхсейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства.— Сб. пер. Механика, 1968, № 1 (107).
3. **Баскаков В. А., Быковцев Г. И.** Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
4. **Баскаков В. А.** О плоскополяризованном волновом движении упругопластической среды.— Изв. ВГПИ, Воронеж, 1978, т. 200, с. 84.
5. **Баскаков В. А.** Взаимодействие ударных волн в упругопластической среде с упрочнением.— ПМТФ, 1979, № 6.