УДК 532.68

Л. К. Антановский

ВЛИЯНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ НА НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПАДЕНИЕ КАПЛИ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

Вопросам динамики капель вязкой жидкости посвящено большое число работ (см. [1—13]). Особенный интерес в настоящее время вызывают вопросы движения капель под действием сил поверхностного натяжения, которые существенно зависят от температуры и концентрации поверхностно-активных веществ (ПАВ) на границе раздела жидкостей. Этот интерес в первую очередь определяется запросами химических технологий [3, 7] и развитием космических исследований [5, 14], где необходимо уметь предсказывать поведение жидкости в слабых силовых полях и при невесомости. В данной работе построено явное решение линейной задачи о движении капли в безграничной жидкости в присутствии ПАВ, число которых может быть любым (химические реакции в первом приближении не учитываются).

Пусть капля вязкой несжимаемой жидкости находится в другой жидкости с растворенным ПАВ малой концентрации и начинает медленное движение под действием переменного ускорения массовых сил $\mathbf{g}(t)$ (t — время). В результате дилатации границы раздела Г происходит смещение термодинамического равновесия ПАВ в объеме и на поверхности, что приводит к дополнительной капиллярной силе, замедляющей движение капли. Другими словами, справедлив принцип Ле Шателье: внешнее воздействие на систему, находящуюся в состоянии устойчивого термодинамического равновесия, вызывает в ней такую реакцию, которая уменьшает результат внешнего воздействия. Последнее важное свойство реактивности капиллярных сил напрямую связано с фундаментальными началами термодинамики, последовательное применение которых дает возможность записать уравнения термодиффузии ПАВ в объеме и на границе раздела в симметричном виде [12, 15] и довольно просто найти решение линеаризованной задачи.

Предположим, что слабая концентрация молекул ПАВ и температура не влияют на физические свойства капли и объемлющей жидкости (плотность ρ и динамический коэффициент вязкости $\mu = \rho\nu$ кусочно-постоянны с поверхностью разрыва Г), но изменяют коэффициент поверхностного натяжения σ. Запишем уравнения Навье — Стокса в неинерциальной системе координат $(\mathbf{x}, t)$, связанной с центром масс капли, положение которого в инерциальной системе координат наблюдателя задается вектором $\mathbf{z}(t)$. Предполагая, что в начальный момент времени сферическая капля покоится, получим задачу со свободной границей [16]

$$\rho d\mathbf{v}/dt = \rho\mathbf{g} - \rho d^2\mathbf{z}/dt^2 - \operatorname{div}\mathbf{P},\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ вне } \Gamma; \tag{1}$$

$$[\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}] = \operatorname{div}_\Gamma(\sigma\nabla_\Gamma\mathbf{x}),\ d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v},\ [\mathbf{v}] = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma; \tag{2}$$

$$\mathbf{v} \to -d\mathbf{z}/dt,\ p - \mathbf{x}\cdot\nabla p \to 0 \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty; \tag{3}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0},\ \mathbf{z} = \mathbf{0},\ d\mathbf{z}/dt = \mathbf{0},\ \Gamma = \{|\mathbf{x}| = a\} \text{ при } t = 0. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость; p — давление; $\mathbf{P} = p\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{D}$ — тензор давлений ($\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформаций); $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали; a — средний радиус капли; нижним индексом Г снабжены поверхностные дифференциальные операторы; квадратные скобки соответствуют операции вычисления скачка функции при прохождении поверхности Г вдоль $\mathbf{n}$, а именно: $[F] = F_+ - F_-$, $F_\pm(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\delta\to\pm 0} F(\mathbf{x} + \delta\mathbf{n}(\mathbf{x}))$.

Заметим, что $\operatorname{div}_\Gamma(\sigma\nabla_\Gamma\mathbf{x}) = \nabla_\Gamma\sigma + \sigma k\mathbf{n}$ (k — сумма главных кривизн Г), поэтому капиллярные силы при переменном σ вызывают не только скачок давления на Г, но и скачок касательных напряжений, что может существенно повлиять на динамику капли [3]; σ является термодинамическим параметром и, следовательно, определяется термодинамическим состоянием среды.

Пусть e — удельная и ε — поверхностная плотности внутренней энергии; c — объемная и γ — поверхностная концентрации молекул ПАВ; $\mathbf{q}$, $\mathbf{j}$ — векторы потоков тепла и ПАВ в жидкости. Тогда дифференциальные законы сохранения энергии и массы ПАВ запишутся в виде

(5) $$\rho de/dt = 2\mu|\mathbf{D}|^2 - \operatorname{div}\mathbf{q} \text{ вне } \Gamma;$$

(6) $$\rho dc/dt = -\operatorname{div}\mathbf{j} \text{ вне } \Gamma;$$

(7) $$d\varepsilon/dt + \varepsilon \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = \sigma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} - [\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}] \text{ на } \Gamma;$$

(8) $$d\gamma/dt + \gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = -[\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}] \text{ на } \Gamma.$$

Выберем в качестве независимых термодинамических параметров абсолютную температуру θ и химический потенциал ζ ПАВ, тогда экстенсивные переменные можно выразить через частные производные термодинамического потенциала $f(\theta, \zeta)$ в объеме

(9) $$s = -\partial f/\partial\theta,\quad c = -\partial f/\partial\zeta,\quad e = f - \theta\partial f/\partial\theta - \zeta\partial f/\partial\zeta$$

и через коэффициент поверхностного натяжения $\sigma(\theta, \zeta)$ на поверхности Γ [17]

(10) $$\eta = -\partial\sigma/\partial\theta,\quad \gamma = -\partial\sigma/\partial\zeta,\quad \varepsilon = \sigma - \theta\partial\sigma/\partial\theta - \zeta\partial\sigma/\partial\zeta$$

(s, η — удельная и поверхностная плотности энтропии). Ввиду вогнутости $f(\theta, \zeta)$ и $\sigma(\theta, \zeta)$ матрицы их вторых производных отрицательно определены [15]; соотношения Онзагера приводят к равенствам ($\mathbf{h}$ — вектор потока энтропии)

(11) $$-\mathbf{h} = K^{11}\nabla\theta + K^{12}\nabla\zeta,\quad -\mathbf{j} = K^{21}\nabla\theta + K^{22}\nabla\zeta$$

с симметричной положительно-определенной матрицей $\{K^{ij}\}$.

С учетом (9)—(11) уравнения (5)—(8) в интенсивных переменных $\{\theta, \zeta\}$ запишутся в симметричной форме [15]

(12) $$\rho d(-\partial f/\partial\theta)/dt = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{h} \text{ вне } \Gamma;$$

(13) $$\rho d(-\partial f/\partial\zeta)/dt = -\operatorname{div}\mathbf{j} \text{ вне } \Gamma;$$

(14) $$d(-\partial\sigma/\partial\theta)/dt = (\partial\sigma/\partial\theta) \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} - [\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}] \text{ на } \Gamma;$$

(15) $$d(-\partial\sigma/\partial\zeta)/dt = (\partial\sigma/\partial\zeta) \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} - [\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}] \text{ на } \Gamma;$$

(16) $$[\theta] = [\zeta] = 0 \text{ на } \Gamma$$

($\Phi = (2\mu|\mathbf{D}|^2 - \mathbf{h}\cdot\nabla\theta - \mathbf{j}\cdot\nabla\zeta)/\theta$ — диссипативная функция). Равенства (15) вытекают из принципа локального термодинамического равновесия. Уравнения (1)—(4), (11)—(16) совместно с начальными данными для θ, ζ полностью определяют динамику капли в присутствии ПАВ.

Соотношения (11)—(16) обобщаются естественным образом на случай многих ПАВ с учетом их потоков вдоль поверхности Γ. Пусть $\tau = \{\tau_i\}$ — набор интенсивных термодинамических параметров (в предыдущем случае $\tau_1 = \theta$, $\tau_2 = \zeta$), а $f(\tau)$, $\sigma(\tau)$ — удельная и поверхностная плотности потенциала Гиббса, являющиеся вогнутыми функциями τ. Вводя обозначения

$$B^{ij}(\tau) = -\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial\tau_i\partial\tau_j},\quad \beta^{ij}(\tau) = -\frac{\partial^2\sigma(\tau)}{\partial\tau_i\partial\tau_j},\quad \sigma^i(\tau) = \frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau_i},$$

получим систему уравнений

(17) $$\rho B^{ij} d\tau_j/dt = \operatorname{div}(K^{ij}\nabla\tau_j) + \Phi^i \text{ вне } \Gamma;$$

(18) $$\beta^{ij} d\tau_j/dt = \sigma^i \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} + \left[K^{ij}\partial\tau_j/\partial n\right] + \operatorname{div}_\Gamma(\varkappa^{ij}\nabla_\Gamma\tau_j) + \Phi^i_\Gamma,\quad [\tau_i] = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Здесь по повторяющимся индексам идет суммирование, симметричные матрицы $\{B^{ij}\}$, $\{K^{ij}\}$, $\{\beta^{ij}\}$, $\{\varkappa^{ij}\}$ положительно-определены. Диссипативные функции Φ^i, Φ^i_Γ, которые могут учитывать химические реакции, для простоты будем считать величинами второго порядка малости относительно возмущений $\mathbf{v}$, τ_i на состоянии покоя, поэтому их конкретный вид несуществен.

Введем безразмерный параметр $\delta = \max\{|[\rho]\mathbf{g}|a^3/\mu\nu\}$, который полагаем много меньше единицы, что заведомо можно обеспечить для капель достаточно малого размера. При $\delta = 0$ существует точное решение задачи (1)—(4), (17), (18)

$$\Gamma = \{|\mathbf{x}| = a\}, \quad \mathbf{v} = 0, \quad p = \begin{cases} 2\sigma/a & \text{при} \quad |\mathbf{x}| < a, \\ 0 & \text{при} \quad |\mathbf{x}| > a, \end{cases} \quad \tau_i = \mathrm{const}.$$

Линеаризуем на нем эту задачу, оставляя за возмущениями $\mathbf{v}$, p, τ_i прежние обозначения. В результате находим

(19) $$\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{g} - d^2\mathbf{z}/dt^2 - \nabla p/\rho + \nu\Delta\mathbf{v}, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ вне } \Gamma;$$

(20) $$[\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}] = \operatorname{div}_\Gamma (\sigma^i \tau_i \nabla_\Gamma \mathbf{x}), \ [\mathbf{v}] = 0, \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma;$$

(21) $$\mathbf{v} \to -d\mathbf{z}/dt, \ p - \mathbf{x}\cdot\nabla p \to 0 \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty;$$

(22) $$\rho B^{ij}\partial\tau_j/\partial t = K^{ij}\Delta\tau_j \text{ вне } \Gamma;$$

(23) $$\beta^{ij}\partial\tau_j/\partial t = \sigma^i \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} + [K^{ij}\partial\tau_j/\partial n] + \varkappa^{ij}\Delta_\Gamma\tau_j, \quad [\tau_i] = 0 \text{ на } \Gamma;$$

(24) $$\mathbf{v} = 0, \ \mathbf{z} = 0, \ d\mathbf{z}/dt = 0, \ \tau_i = 0 \text{ при } t = 0.$$

Коэффициенты $\{B^{ij}\}$, $\{K^{ij}\}$ (а также ρ, μ, ν) кусочно-постоянны с поверхностью разрыва Γ, и $\{\beta^{ij}\}$, $\{\varkappa^{ij}\}$, $\{\sigma^i\}$ постоянны, поскольку вычислены на состоянии равновесия. Кроме того, учтено, что задача (19)—(24) допускает точное решение со сферической свободной границей [11].

Временно предположим, что $\mathbf{g} = g(t)\mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$ — фиксированный единичный вектор), и введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ) таким образом, чтобы $r = |\mathbf{x}|$, $\cos\vartheta = \mathbf{e}\cdot\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Тогда можно искать осесимметричное решение в виде

$$v_r = -2r^{-1}\psi(r, t)\cos\vartheta, \ v_\vartheta = r^{-1}\{\partial(r\psi(r, t))/\partial r\}\sin\vartheta,$$

$$\tau_i = \chi_i(r, t)\cos\vartheta, \ \mathbf{z} = z(t)\mathbf{e}$$

($\psi(r, t)$, $\chi_i(r, t)$, $z(t)$ — искомые функции). После преобразования Лапласа по времени с учетом однородных начальных данных возникает следующая задача:

(25) $$S^2(\nu S^2\psi^* - \lambda\psi^*) = 0 \text{ при } r \neq a;$$

(26) $$\psi^* = 0, \ [\psi^*] = 0, \ [\partial\psi^*/\partial r] = 0, \quad [\mu\partial^2\psi^*/\partial r^2] = \sigma^i\chi_i^*/a \quad \text{при} \quad r = a;$$

(27) $$\partial\psi^*/\partial r, \ \psi^*/r \to \lambda z^*/2 \text{ при } r \to \infty;$$

(28) $$\rho\lambda B^{ij}\chi_j^* = K^{ij}S^2\chi_j^* \quad \text{при} \quad r \neq a;$$

(29) $$\lambda\beta^{ij}\chi_j^* = 2\{\sigma^i\partial\psi^*/\partial r + \varkappa^{ij}\chi_j^*/a\}/a + [K^{ij}\partial\chi_j^*/\partial r], \quad [\chi_i^*] = 0 \text{ при } r = a;$$

(30) $$a[\rho](g^* - \lambda^2 z^*) = [\partial\{r(\mu S^2\psi^* - \rho\lambda\psi^*)\}/\partial r] - 2\sigma^i\chi_i^*/a \quad \text{при} \quad r = a.$$

Здесь $S^2 f = r^{-2}\{\partial(r^2\partial f/\partial r)/\partial r - 2f\}$; нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{x}/a$ полностью определяет знак скачка; λ — сопряженная переменная преобразования Лапласа.

Очевидно, что общее решение уравнений (25), (27) можно представить как [11]

$$\psi^*(r, \lambda) = \begin{cases} \lambda z^*(\lambda) r/2 + A_1(\lambda)/r^2 + A_2(\lambda) H\left(r\sqrt{\lambda/\nu_+}\right) & \text{при} \quad r > a, \\ A_3(\lambda) r + A_4(\lambda) H\left(r\sqrt{\lambda/\nu_-}\right) & \text{при} \quad r < a, \end{cases}$$

где функция $H(\xi) = (e^{-\xi}/\xi)'$ при $r > a$, $H(\xi) = (\operatorname{sh}\xi/\xi)'$ при $r < a$ (штрихом обозначены производные); ν_+, ν_- — вязкости внешней жидкости и капли согласно выбору нормали; функции $A_k(\lambda)$ должны быть определены в терминах $z^*(\lambda)$ и $\chi_i^*(r, \lambda)$ из условий (26), (28)—(30). Заметим, что ввиду интегрального тождества

$$\int\limits_0^\infty r^3S^2(\mu S^2\psi^* - \rho\lambda\psi^*)\,dr + a^4\,[\partial\{r^{-1}(\mu S^2\psi^* - \rho\lambda\psi^*)\}/\partial r] =$$
$$= \lim_{r\to\infty} r^4\partial\{r^{-1}(\mu S^2\psi^* - \rho\lambda\psi^*)\}/\partial r = 3\rho_+\lambda A_1(\lambda)$$

условие (30) принимает вид $a^3[\rho](g^* - \lambda^2 z^*) = 3\rho_+\lambda A_1(\lambda)$.

Общее решение дифференциальных уравнений (28) записывается как

$$\chi_i^*(r,\lambda) = E_i^m \frac{H\left(r\sqrt{\lambda/\lambda_m}\right)}{H\left(a\sqrt{\lambda/\lambda_m}\right)} F_m^j C_j(\lambda)$$

($\{\lambda_m\}$ — корни полинома $\det(\rho\lambda B^{ij} - K^{ij})$, матрица $\{E_i^m\}$ определена уравнениями $(\rho\lambda_m B^{ij} - K^{ij})E_j^m = 0$ и $\{F_m^i\} = \{E_i^m\}^{-1}$). Очевидно, что такие матрицы $\{E_i^m\}$, $\{F_m^i\}$ существуют и числа $\{\lambda_m\}$ положительны, поскольку постоянные матрицы $\{B^{ij}\}$, $\{K^{ij}\}$ симметричны и положительно-определены. Конечно, указанная процедура должна быть независимо проделана для внешней и внутренней жидкостей с соответствующим выбором функции $H(\xi)$. Функции $C_i(\lambda) = \chi_i^\mp(a,\lambda)$ находятся из условий (29), которые в свою очередь содержат $\psi^*(r,\lambda)$. После необходимых вычислений получим закон движения центра масс капли

(31) $$\lambda^2 m^*(\lambda) z^*(\lambda) = (\rho_0 - \rho) g^*(\lambda).$$

Здесь
$$m^*(\lambda) = \rho_0 + \frac{\rho}{2} + \frac{9M^*(\lambda)}{2a^2\lambda};$$
$$\frac{1}{M^*(\lambda)} = \frac{1}{\mu X\left(a\sqrt{\lambda/\nu}\right)} + \frac{1}{2\mu + 3\mu_0 X_0\left(a\sqrt{\lambda/\nu_0}\right) + 2Q(\lambda)};$$
$$X(\xi) = 1 + \xi, \quad X_0(\xi) = \frac{(6+\xi^2)\,\xi - 3\,(2+\xi^2)\operatorname{th}\xi}{3\,[(3+\xi^2)\operatorname{th}\xi - 3\xi]};$$

$Q(\lambda) = Q_{ij}(\lambda)\sigma^i\sigma^j$; $Q_{ij}(\lambda)$ обратна положительно-определенной матрице с элементами

$$R^{ij}(\lambda) = \lambda a\beta^{ij} + 2a^{-1}\varkappa^{ij} + 2K^{ik}E_k^m Z\left(a\sqrt{\lambda/\lambda_m}\right)F_m^j +$$
$$+ K_0^{ik}E_{0k}^m Z_0\left(a\sqrt{\lambda/\lambda_{0m}}\right)F_{0m}^j,$$
$$Z(\xi) = 1 + \frac{\xi^2}{2(1+\xi)}, \quad Z_0(\xi) = \frac{(2+\xi^2)\operatorname{th}\xi - 2\xi}{\xi - \operatorname{th}\xi}$$

(индексом 0 снабжены все величины, относящиеся к капле).

Так как $X(0) = X_0(0) = Z(0) = Z_0(0) = 1$, то при постоянном ускорении внешних сил g имеем асимптотику скорости капли при $t \to \infty$:

(32) $$\frac{dz}{dt} = \frac{2a^2}{9\mu}(\rho_0 - \rho)\,g\left(\frac{3\mu + 3\mu_0 + 2q}{2\mu + 3\mu_0 + 2q} - \frac{a}{\sqrt{\pi\nu t}} + O\left(t^{-3/2}\right)\right),$$
$$q = Q(0) \text{ и } R^{ij}(0) = 2a^{-1}\varkappa^{ij} + 2K^{ij} + K_0^{ij}$$

(в [12] перед q опущен множитель 2). Равенство (32) при $q = 0$ (чистая граница раздела) содержит известную формулу Адамара — Рыбчинского [1, 2]; с ростом q скорость падения капли замедляется и в пределе $q = \infty$ (32) превращается в формулу Стокса [7]. Этот же предел получается при $\mu_0 \to \infty$, поэтому учет капиллярных сил создает эффект увеличения вязкости капли μ_0 (см. подробную дискуссию в [3]).

В нестационарном случае появление члена $2Q(\lambda)$ в формуле (31) приводит к возрастанию $M^*(\lambda)$, что уменьшает скорость разгона капли вне зависимости от знаков σ^i. Последнее фактически и означает справедливость принципа Ле Шателье в самой общей ситуации. Конечно, это утверждение основано на положительности квадратичной формы $Q(\lambda)$, что в свою очередь вытекает из фундаментальных принципов термодинамики: максимума энтропии для замкнутой системы и минимума производства энтропии для открытой системы вблизи равновесия (принцип Онзагера — его частный вариант [18]).

Заметим, что формула (31) может быть записана в виде закона Ньютона

$$m*(d^2\mathbf{z}/dt^2) = (\rho_0 - \rho)\mathbf{g}, \tag{33}$$

где эффективная «масса» $m(t)$ играет роль оператора свертки с символом $m^*(\lambda)$:

$$\left(m*\frac{d^2\mathbf{z}}{dt^2}(t)\right) = \left(\rho_0 + \frac{\rho}{2}\right)\frac{d^2\mathbf{z}}{dt^2}(t) + \frac{9}{2a^2}\int\limits_0^t M(t-\xi)\,d\mathbf{z}(\xi)$$

($M(t)$ имеет образ Лапласа $M^*(\lambda)$). Более того, в уравнении (33) можно считать, что у $\mathbf{g}(t)$ переменное направление, поскольку для линейных уравнений справедлив принцип суперпозиции [13].

Предположим, что в начальный момент в жидкости создано слабое линейное распределение интенсивных параметров $\tau_i = \mathbf{w}_i\cdot\mathbf{x}$. После аналогичных вычислений получим закон движения центра масс капли

$$m*(d^2\mathbf{z}/dt^2) = (\rho_0 - \rho)\mathbf{g} + \mathbf{f}_\sigma, \tag{34}$$

где капиллярная сила $\mathbf{f}_\sigma(t)$ имеет образ Лапласа

$$\mathbf{f}_\sigma^*(\lambda) = -3a^{-1}L^*(\lambda)\,\sigma^i\mathbf{W}_i^*(\lambda),$$

$$L^*(\lambda) = \frac{\mu X\left(a\sqrt{\lambda/\nu}\right)}{2\mu + \mu X\left(a\sqrt{\lambda/\nu}\right) + 3\mu_0 X_0\left(a\sqrt{\lambda/\nu_0}\right) + 2Q(\lambda)},$$

$$\mathbf{W}_i^*(\lambda) = \mathbf{w}_i^*(\lambda) + Q_{ij}(\lambda)\left(K^{jk} - K_0^{jk}\right)\mathbf{w}_k^*(\lambda).$$

Из свойств решений линейных параболических уравнений следует, что $\nabla\tau_i$ на бесконечности все время будет совпадать с $\mathbf{w}_i$, поэтому $\mathbf{w}_i^*(\lambda) = \mathbf{w}_i/\lambda$. По-видимому, в первом приближении формулу (33) можно использовать для замыкания феноменологических моделей движения эмульсий, отождествляя вектор $\mathbf{w}_i$ с локальным градиентом $\nabla\tau_i$ в точке нахождения капли, который меняется со временем, имея некоторый образ Лапласа $\mathbf{w}_i^*(\lambda)$. Формула (34) в одномерном случае $\tau = \theta$ уточняет результат [11], где в уравнении энергии не учитывалась работа дилатации поверхности Г. В заключение заметим, что капиллярные силы стремятся минимизировать суммарный термодинамический потенциал Гиббса, увлекая каплю в область меньших значений поверхностного натяжения σ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hadamard J.** Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux // Comp. Rend. Acad. Sci.— 1911.— V. 152, N 25.
2. **Rybczynski W.** Uber die fortschreitende Bewegung einer flussigen Kudel in einem zahen Medium // Bull. Intern. Acad. Polon. Sci. Cracovia. Ser. A.— 1911.— N 1.
3. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика.— М.: Физматгиз, 1959.
4. **Sy F., Lightfoot E. N.** Transient creeping flow around fluid spheres // Amer. Inst. Chem. Eng. J.— 1971.— V. 17, N 1.
5. **Повицкий А. С., Любин Л. Я.** Основы динамики и тепломассообмена жидкостей и газов при невесомости.— М.: Машиностроение, 1972.
6. **Братухин Ю. К.** Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1975.— № 5.
7. **Хаппель Дж., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
8. **Духин С. С.** Динамический адсорбционный слой и эффект Марангони — Гиббса // Современная теория капиллярности: к 100-летию теории капиллярности Гиббса/ Под ред. А. И. Русанова, Ф. Ч. Гудрича.— Л.: Химия, 1980.
9. **Гонор А. Л., Ривкинд В. Я.** Динамика капли // Итоги науки и техники. Сер. МЖГ.— М.: ВИНИТИ, 1982.— Т. 17.

10. **Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.** Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком.— М.: Наука, 1985.
11. **Антановский Л. К., Копбосынов Б. К.** Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 2.
12. **Антановский Л. К.** Влияние капиллярных сил на нестационарное движение капли в однородной жидкости // Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.
13. **Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.** К вопросу о нестационарном движении капли под действием капиллярных и массовых сил // ПМТФ.— 1991.— № 4.
14. **Гидромеханика** невесомости/Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.— М.: Наука, 1976.
15. **Антановский Л. К.** Симметризация уравнений динамики капиллярной жидкости // ПМТФ.— 1990.— № 6.
16. **Napolitano L. G.** Thermodynamics and dynamics of pure interfaces // Acta Astronaut.— 1978.— V. 5, N 9.
17. **Гиббс Дж. В.** Термодинамика. Статистическая механика.— М.: Наука, 1982.
18. **Де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1964.

г. Новосибирск *Поступила 8/VI 1990 г.*

УДК 534:532.529.6

А. А. Дойников, С. Т. Завтрак

СИЛА КЁНИГА В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В публикациях, где упоминается сила Кёнига (см., например, [1—3]), предполагается, что длина звуковой волны много больше расстояния между дисперсными частицами. Такое предположение позволяет не учитывать сжимаемость жидкости, но оно справедливо только для низкочастотных волн. Тем временем на практике, например в ультразвуковой технологии, приходится иметь дело с излучением достаточно высоких частот (10^4—10^9 Гц [4]). Длина волны такого излучения может быть сравнима и даже меньше расстояния между частицами, оставаясь много больше их размеров. Очевидно, что пренебрежение сжимаемостью жидкости становится неправомочным. Возникает вопрос, как при учете сжимаемости жидкости изменится структура силы Кёнига? Данная работа дает на него ответ.

Итак, нужно вычислить силу радиационного взаимодействия (силу Кёнига) двух твердых сферических частиц с радиусами R_1 и R_2, центры которых совершают малые осцилляции с круговой частотой ω, при условии, что расстояние l между частицами сравнимо с длиной звуковой волны $\lambda = 2\pi c\omega^{-1}$ (c — скорость звука в жидкости).

Рассмотрим вопрос о малых параметрах. Во-первых, полагаем, что выполняются два традиционных условия: потенциальность колебаний жидкости, т. е. $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ (φ — потенциал скорости жидкости $\mathbf{v}$), и $|\mathbf{v}|/c \ll \ll 1$. Последнее означает малость амплитуды волнового поля. Во-вторых, при решении аналогичной задачи для несжимаемой жидкости используются еще два малых параметра: $kR_{1,2} \ll 1$ и $kl \ll 1$ ($k = \omega/c$ — волновое число), причем $kR_{1,2} \ll kl$. Их малость и соотношение между ними следуют из предположения о том, что $R_{1,2} \ll l \ll \lambda$. Отказ от требования $l \ll \lambda$ означает, что остается только один малый параметр $kR_{1,2}$, по которому и ведется все разложение.

Хорошо известно, что радиационные силы, в том числе и сила Кёнига, квадратичны по полю. Учитывая это, задачу можно сформулировать и так: необходимо найти главные члены в разложении силы Кёнига по параметру $kR_{1,2}$ в квадратичном по полю приближении при произвольном соотношении λ и l.

Радиационную силу $\mathbf{F}_j$, действующую на j-ю частицу ($j = 1, 2$), будем вычислять по формуле, полученной в [3]:

$$\mathbf{F}_j = \rho_0 \left\langle \int\limits_{s_j} [\mathbf{n}_j (v^2 - k^2\varphi^2)/2 - \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_j)]\, ds_j \right\rangle. \tag{1}$$

Здесь ρ_0 — плотность покоящейся жидкости; ds_j — элемент поверхности покоящейся j-й частицы; $\mathbf{n}_j$ — единичный вектор внешней нормали к ее поверхности, угловые скобки означают усреднение по времени. Поскольку все члены в подынтегральном выражении формулы (1) квадратичны по