Физика горения и взрыва

2

1966 г.

УДК 536.46

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МЕДЛЕННОГО ГОРЕНИЯ В ВЯЗКОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

С. К. Асланов

(Одесса)

В предыдущем исследовании [1] рассматривалась задача об устойчивости медленного горения по отношению к малым возмущениям при наличии их взаимодействия с внутренней газодинамической структурой пламени. Однако полученный в результате критерий неустойчивости, определяющий нижнюю границу размера возмущения вдоль поверхности пламени относительно его толщины, оказался заниженным (порядка 25) по сравнению с данными эксперимента [2]. Одной из главных причин последнего, вероятно, является игнорирование диссипативного фактора вязкости. Поэтому в настоящей работе исследование устойчивости горения будет проведено с учетом вязкости газа, стабилизирующей пламя, и выяснено влияние этого эффекта на критерий неустойчивости.

Рассмотрим стационарное плоское пламя, расположенное нормально оси x между плоскостями $x=0$ и $x=-L$. Газ течет в положительном направлении оси x и ввиду малой скорости медленного горения (сравнительно со скоростью звука) может быть принят за несжимаемую жидкость. Области потока, занятые исходной горючей смесью и продуктами сгорания, обозначим соответственно цифрами 1, 2, снабжая этими индексами в указанных областях все термо-гидродинамические параметры p, ρ, v, T, μ, χ (давление, плотность, скорость, температура, динамическая вязкость, температуропроводность). Причем зависимость вязкости от температуры для газов обычно определяется формулой [3]

$$\mu_2/\mu_1 = (T_2/T_1)^m; \qquad 0{,}5 \leqslant m \leqslant 1. \tag{1}$$

Линеаризованные уравнения (Навье — Стокса и неразрывности [4]) для малых возмущений составляющих скорости v'_{sx}, v'_{sy} и давления p'_s, наложенных на основное течение, запишутся в виде

$$\frac{\partial v'_{sx}}{\partial t} + v_s \frac{\partial v'_{sx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'_s}{\partial x} = \nu_s \Delta v'_{sx}, \quad \frac{\partial v'_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial v'_{sy}}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v'_{sy}}{\partial t} + v_s \frac{\partial v'_{sy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'_s}{\partial y} = \nu_s \Delta v'_{sy}, \quad \nu = \mu/\rho$$

($S=1, 2$ соответственно для областей 1, 2).

Предполагая возмущения пламени достаточно длинноволновыми сравнительно с его толщиной L, как и в случае идеальной жидкости [1], для механических граничных условий, управляющих переходом через пламя, можно воспользоваться классической моделью фронта горения. Тогда линеаризованные законы непрерывности потоков массы, импульса (нормальной и касательной составляющих) относительно фронта [4] могут быть представлены следующим образом при $x=0$:

$$\delta\left(v'_{1x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) = v'_{2x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \delta = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} > 1; \tag{3}$$

$$\frac{p'_1}{\rho_1 v_1} + 2v'_{1x} - 2\frac{\nu_1}{v_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(v'_{1x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) = \frac{p'_2}{\rho_2 v_2} + 2v'_{2x} - $$
$$- 2\frac{\nu_2}{v_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v'_{2x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right); \tag{4}$$

$$v'_{1y} + v_1\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\nu_1}{v_1}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(v'_{1x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{\partial v'_{1y}}{\partial x}\right] =$$
$$= v'_{2y} + v_2\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\nu_2}{v_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(v'_{2x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{\partial v'_{2y}}{\partial x}\right], \tag{5}$$

если $\varepsilon=\varepsilon(y, t)$ — есть малое смещение пламени вдоль оси x вследствие возмущений. Существенно отметить, что в выражениях вязких напряжений в (4), (5) фигурируют компоненты скоростей газа относительно возмущенного состояния пламени.

Чисто «пламенное» условие, отражающее взаимодействие возмущений с газодинамической структурой зоны горения, получено в [1] и имеет вид

$$v'_{1x}\Big|_{x=0} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = v_1 q^2 \int\limits_{t-\tau}^{t} \frac{\partial v'_{1x}}{\partial x}\Big|_{x = q v_1 (t' - t)} dt'; \tag{6}$$

$$q = 1 + (\delta - 1)(1 - e^{-1})$$

и характерное время горения τ определяется из $L=v_1 q\tau$.

Задавая смещение пламени в виде бегущей волны с длиной λ

$$\varepsilon = C\exp(iky - i\omega t), \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \tag{7}$$

решение системы (2), удовлетворяющее естественному требованию ограниченности при $|x| \to \infty$ можно представить в виде

$$v'_{sx} = A_s\varphi_s + B_s\varphi_s, \quad v'_{sy} = i(-1)^{s-1}A_s\psi_s + (-1)^s i\gamma_s B_s\varphi_s;$$
$$\frac{p'_s}{\rho_s v_s} = -\left[1 + (-1)^{s-1}\frac{z}{\delta^{s-1}}\right]A_s\psi_s, \quad z = -\frac{i\omega}{kv_1};$$
$$\alpha_s = 2\frac{k\nu_s}{v_s}; \tag{8}$$
$$\psi_s = \varphi_0\exp[(-1)^{s-1}kx], \quad \varphi_s = \psi_0\exp(k\gamma_s x), \quad \psi_0 = \exp(iky - i\omega t);$$

$$\gamma_s = \frac{1}{\alpha_s}\left[1 + (-1)^{s-1}\sqrt{1 + 2\alpha_s\left(\frac{z}{\delta^{s-1}} + \frac{\alpha_s}{2}\right)}\right]. \qquad (9)$$

Первые слагаемые $A_s \psi_s$ описывают возмущения давления — скорости, вторые — $B_s \varphi_s$ являются «вихревыми волнами». Причем в отличие от идеальной жидкости в принятой модели вязкой среды вихри, возникающие за счет искривления пламени, будут не только сноситься потоком в область сгоревшего газа, но и диффундировать вверх по течению в исходную смесь, в результате чего в решении (8) появляются слагаемые $B_1\varphi_1$. Однако, как не трудно убедиться, этими слагаемыми можно пренебречь, т. е. отбросить вихревые волны в первоначальном газе. В самом деле, для газов, образующих исходную смесь при обычных условиях [3], $\nu_1 \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ *м²/сек* (например, при 20° С $\nu_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ *м²/сек* для воздуха и окиси углерода и $\nu_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ *м²/сек* для метана). Скорость распространения пламени имеет порядок $v_1 \sim 1$ *м/сек,* а, значит, $4\nu_1^2/v_1 \sim 10^{-5}$ *сек*. Отсюда по (9) получаем $k\gamma_1 \sim \frac{v_1}{\nu_1} \approx 10^5$ 1/*м*. Следовательно, вихревая волна чрезвычайно быстро затухает вверх по течению от пламени.

Действительно, уже для $x \sim -10^{-4}$ *м,* что заранее не превосходит толщины зоны горения, анализируемое вихревое возмущение содержит множитель $\exp(k\gamma_1 x) \sim \exp(-10) \approx 10^{-5}$. Последнее и позволяет пренебречь величиной решения типа вихревой волны в исходной смеси по сравнению с остальными возмущениями. После исключения из рассмотрения решения с множителем B_1 число неизвестных A_1, A_2, B_2, C уже совпадает с числом имеющихся краевых условий для пламени. Удовлетворяя этим условиям (3)—(6), получаем систему однородных уравнений с характеристическим определителем для нахождения собственного значения z:

$$\left\{1 - z - \alpha_1 - \left(1 + \frac{z}{\delta} + \alpha_1\delta^m\right)\left[\delta + (1-\delta)\left(1 - \frac{fq}{\frac{z}{q}+1}\right)\right]\right\}\alpha_1\delta^m z +$$

$$+ z\left\{z + \left[\frac{z}{\delta} + 2(1 + \alpha_1\delta^m)\right]\left[\delta + (1-\delta)\left(1 - \frac{fq}{\frac{z}{q}+1}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha_1\delta^m}{2}(\gamma_2 + 1) - 1\right] + \left(1 - \frac{fq}{\frac{z}{q}+1}\right)\left[\frac{\alpha_1\delta^m}{2}(\gamma_2 + 1) - 1\right]\times$$

$$\times\left[1 - \delta + \frac{\alpha_1}{2}(1 - \delta^m)z\right] = 0, \qquad (10)$$

$$f = 1 - \exp\left[-\xi\left(\frac{z}{q} + 1\right)\right], \quad \xi = 2\pi\frac{L}{\lambda}.$$

При этом с помощью (1) исключены параметры сгоревшего газа, и корень $\gamma_2 = -1$, т. е. $z = \delta > 0$, отброшен по физическим соображениям, так как при отсутствии пламени ($\delta = 1$) обеспечивает неустойчивость.

Зависящим от вязкости параметром в уравнении (10) является $\alpha = 4\pi\frac{\nu_1}{\lambda v_1}$, которое, согласно введенному выше предположению о достаточной малости L/λ, будет также мало. В самом деле, постоянство числа Прандтля связывает температуропроводность газов с вязкостью соотношением $\chi_1 \sim \nu_1$. Под толщиной пламени понимают [1, 2, 5] $L = \frac{\chi_1}{v_1}$, откуда следует $\alpha_1 \sim 4\pi \frac{L}{\lambda}$, т. е. оба параметра уравнения (10) оказываются просто связанными: $\alpha_1 = 2\xi$. Поэтому для выяснения влияния вязкости ищем решение (10) в виде разложения по степеням малого параметра $z = z_0 + z_1\xi$. В результате линеаризации (10) относительно ξ находим

$$z_0 = \frac{\delta}{\delta + 1}\left(\pm\sqrt{\delta + 1 - \frac{1}{\delta}} - 1\right);$$

$$\left(\frac{\delta + 1}{\delta} z_0 + 1\right) z_{11} = -\frac{\delta - 1}{\delta + 1}\delta q\,(z_0 + 1);$$

$$2\left(\frac{\delta + 1}{\delta} z_0 + 1\right) z_{12} = (\delta^m - 1)\frac{z_0}{2} - \delta^m(\delta - 1), \tag{11}$$

где

$$z_1 = z_{11} + z_{12}\frac{\alpha_1}{\xi}$$

При знаке плюс $z_0 > 0$ и обеспечивает неустойчивость в нулевом приближении. В этом случае всегда z_{11}, $z_{12} < 0$. Отсюда следует основной вывод, что диссипативный эффект вязкости оказывает стабилизирующее действие на горение в противоположность результатам Эйнбиндера [5]. Причем с увеличением ξ, т. е. уменьшением длины волны возмущения, указанная вязкая стабилизация усиливается. Физически это вполне понятно, так как уменьшение длины волны увеличивает градиент скорости в поперечном потоку направлении, что увеличивает влияние сил вязкости.

С целью сопоставления полученных теоретических результатов с экспериментальными данными исследования неустойчивости нормального горения [2] определим экстремальную длину волны возмущения $\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m}$, порождающую максимальную степень неустойчивости — $i\omega = kv_1z$, где по (11) $z = z_0 + (z_{11} + 2z_{12})\xi$. При опытных наблюдениях следует ожидать прежде всего реализации именно этих неустойчивых возмущений. Тогда из условия $d(-i\omega)/dk = 0$ приходим к следующей длине волны максимальной неустойчивости пламени

$$\xi_m = 2\pi\frac{L}{\lambda_m} = -\frac{z_0}{2\,(z_{11} + 2z_{12})}. \tag{12}$$

При этом поправка на вязкость $z_1\xi$ не превосходит 50% от z_0 (для идеального случая [4]). Из (12) при $m = 1$, $\delta = 6$ получаем $\lambda_m/L \simeq 392$, т. е. теоретическая критериальная оценка λ_m/L для ожидаемой в эксперименте длины волны максимально неустойчивого возмущения представляется в виде

$$\lambda/L \simeq 4 \cdot 10^2, \tag{13}$$

если учесть диссипативный фактор вязкости, стабилизирующий пламя (по сравнению с $\lambda/L > 25$ в идеальной жидкости [1]). Что касается другого механизма диссипации энергии — теплопроводности, то, решая задачу об устойчивости стационарного плоского пламени в теплопроводном газе, совершенно аналогично настоящему исследованию можно выяснить влияние теплопроводности как эффект порядка квадрата числа Маха. Поэтому им можно пренебречь в условиях медленного горения, и основным стабилизирующим фактором остается учтенная выше вязкость.

Сравним приближенный теоретический критерий (13) максимальной неустойчивости горения с полученным экспериментально для сферического пламени в смеси 30% саратовского газа и 70% кислорода [2]:

$$r/\lambda \approx 0{,}7 \cdot 10^4. \tag{14}$$

Для этого необходимо выразить радиус пламенной сферы r через длину возмущения λ на пламени. Рис. 7 в работе [2] показывает, что радиус, который экстраполирует амплитуду возмущений пламени на нуль и является таким образом минимальным, приближенно выражается $r_{\min} \approx 15\ \lambda$. Кроме того, непосредственно из теплеровских фотографий ([2], рис. 8) видно, что пламенная сфера имеет по периметру порядка 10^2 выпуклостей. Согласно приведенным оценкам, опытный критерий возникновения неустойчивости (14) можно переписать в виде $\lambda/L \approx 5 \cdot 10^2$. Последнее достаточно хорошо согласуется с теоретическим результатом (13).

Исследованная выше устойчивость пламени в вязкой среде рассматривалась В. И. Ягодкиным [6] без учета влияния возмущений на внутреннюю структуру зоны горения, т. е. в рамках граничного условия $v'_{1x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$. Однако, как сейчас будет показано, допущенные при анализе погрешности лишают смысла полученные выводы. В работе [6] (§ 2) удерживаются для исходной смеси решения типа вихревой волны ($B_1\varphi_1$ в (8)) и вводится дополнительное, ничем физически не обусловленное, пятое граничное условие для пламени, а именно непрерывность тангенциального вязкого напряжения. Последнее допущение, согласно [5, § 6] и формуле (5), неправильно, ибо при этом не учитывается эффект компоненты нормального напряжения нулевого порядка вдоль поверхности искривленного пламени. Кроме того, при вычислении вязких напряжений В. И. Ягодкин ошибочно использует абсолютные скорости v'_{sx} вместо относительных $v'_{sx} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$. Наконец, уравнение совместности ([6], формула (2.7)) решается приближенно, для чего неоправданно отбрасываются члены β^4/α^2, β^3/α, β^3/α^2 $\left(\text{где } \beta = -2\,\frac{i\,\omega\nu_1}{v_1^2} \quad \varkappa = 2\,\frac{k\,\nu_1}{v_1}\right)$ как малые 3 и 4-го порядка по β, т. е. по вязкости. Переходя к нашим обозначениям, следует заменить $\beta/\alpha = z$ и $\alpha = \alpha_1$, и упомянутые члены примут вид $z^4\alpha_1^2$, $z^3\alpha_1^2$, $z^3\alpha_1$. Другими словами, они являются малыми, не выше второго порядка по вязкости, ибо z, как видно из (14), немалая величина.

Поступила в редакцию
20/IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. К. Асланов.* ФГВ, 1965, 3.
2. *Я. К. Трошин, К. И. Щелкин.* Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 3.
3. *Г. Эберт.* Краткий справочник по физике. М., Физматгиз, 1963.
4. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц.* Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
5. *Г. Эйнбиндер.* Вопросы ракетной техники, 1954, 2.
6. *В. И. Ягодкин.* Изв. АН СССР, 1955, 7.