мой ситуации ангармонизм приводит лишь к перенормировке функций $\dot{\varphi}$, φ, т. е. в конечном счете к изменению масштаба используемых выше величин $\langle x^2(t_i)\rangle$, $\langle E_i\rangle$ с сохранением всех зависимостей, содержащих эти величины. Подчеркнем, что слабость ангармонических эффектов предполагается при этом только для равновесных тепловых колебаний; движение атомов после сильного толчка налетевшего атома может быть при этом сильноангармоническим.

Изложенные в работе соображения пригодны как к конденсации, так и к распылению атомов относительно медленными атомными частицами, причем в последнем случае вместо $\langle E_i\rangle$ следует принять константу, в гармоническом пределе совпадающую с T. Формулы (8), (9) определяют роль энергии падающих частиц x_m, характеристик бомбардируемой поверхности K, b, температуры $\langle E_i\rangle$ и могут быть использованы для широкого круга реальных физических ситуаций.

Поступила 11 XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Zwanzig R. W.** Collision of a gas atom with a solid surface.— J. Chem. Phys., 1960, vol. 32, N 4.
2. **Пярнпуу А. А.** Взаимодействие молекул газа с поверхностями. М.: Наука, 1974.
3. **Баранцев Р. Г.** Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975.
4. **Гудман Ф., Вахман Г.** Динамика рассеяния газа поверхностью. М.: Мир, 1980.
5. **Strijenov D. S.** Influence of thermal motion in a solid on the interaction of an atom colliding with the solid surface.— Fluid Dynam. Trans., 1971, vol. 5, pt II.
6. **Тамбовцев Ю. П.** Неравновесная классическая теория взаимодействия атомов газа с поверхностью твердого тела. ВИНИТИ 7189 — 73 деп., ВИНИТИ 7319 — 73 деп., 1973.
7. **Галанов А. Е.** Модель неупругого рассеяния атома на поверхности кристалла в импульсном приближении.— ПМТФ, 1976, № 6.
8. **Жук В. И.** О захвате атомов газа на поверхности твердого тела.— ПМТФ, 1979, № 1.
9. **Марадудин А., Монтролл Э., Вейсс Дж.** Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. М.: Мир, 1965.

УДК 533.72

К ВОПРОСУ О ТЕПЛООБМЕНЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ С ОБТЕКАЮЩИМ ИХ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

И. М. Скачков, Е. Р. Щукин, Ю. И. Яламов

(Москва)

В работах [1—3] подробно рассмотрен теплообмен кругового цилиндра, обтекаемого газовым потоком. В [2, 3] в случае малых конечных чисел Пекле и Рейнольдса получены распределение температуры и число Нуссельта с точностью до Pe^2. Теплообмен некруговых цилиндров ранее в литературе не рассматривался. В данной работе теоретически рассмотрен теплообмен эллиптического цилиндра с газовым потоком, перпендикулярным образующей цилиндра.

Распределение температуры T_i вдоль поверхности цилиндра будем считать однородным ($T_i = \mathrm{const}$). Рассматривается случай $\mathrm{Pe} \ll 1$ и малых относительных перепадов температуры T в системе цилиндр — газовый поток ($|T_i - T|/T \ll 1$).

При нахождении распределения температуры T в газовом потоке будем решать уравнение Озеена, которое, как показано в [2, 3], дает верное нулевое приближение для T:

$$\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,T = \chi\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,T \tag{1}$$

с граничными условиями

$$T = T_i \quad \text{на поверхности цилиндра,} \tag{2}$$
$$T = T_\infty \quad \text{на бесконечности,}$$

где χ — коэффициент температуропроводности. Решение целесообразнее всего проводить в эллиптической системе координат, которая связана с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

где c — фокусное расстояние эллипса. Перейдя от зависимой переменной T к безразмерной переменной $t = (T - T_\infty)/(T_i - T_\infty)$ и произведя подстановку $t = \exp\,[(k/a)(x \cos \eta_0 + y \sin \eta_0)]v$, от системы (1), (2) переходим к более простой системе:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + (kc/a)^2 (\cos^2 \eta - \operatorname{ch}^2 \xi)\, v = 0; \tag{3}$$

$$v(\xi_0,\ \eta) = \exp\,[-(k/a)(a \cos \eta_0 \cos \eta - b \sin \eta_0 \sin \eta)], \tag{4}$$

$$v \to 0 \text{ при } \xi \to \infty,$$

где a и b —соответственно большая и малая полуоси эллипса; $k = \frac{au}{2\chi} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Pe}$; η_0—угол, который составляет скорость $\mathbf{u}$ с большой полуосью эллипса a. Решением уравнения (3) получаем выражение для функции $v = v(\xi,\ \eta)$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n \operatorname{Cek}_n(\xi) \operatorname{ce}_n(\eta) + \omega_n \operatorname{Sek}_n(\xi) \operatorname{se}_n(\eta)), \tag{5}$$

$$\operatorname{ce}_{2n+i}(\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+i}^{2n+i} \cos (2r + i)\, \eta,$$

$$\operatorname{se}_{2n+i}(\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+i}^{2n+i} \sin (2r + i)\, \eta,$$

$$\operatorname{Cek}_{2n+i}(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+i}^{2n+i} K_{2r+i}\left(k \frac{c}{a} \operatorname{ch} \xi\right),$$

$$\operatorname{Sek}_{2n+i}(\xi) = \operatorname{th} \xi \sum_{r=0}^{\infty} (2r + i)\, B_{2r+i}^{2n+i}\left(k \frac{c}{a} \operatorname{ch} \xi\right),$$

$$A_r^r = B_r^r = 1, \quad A_{n+2r}^n = B_{n+2r}^n = \frac{k^{2r} n!}{r!\,(n + r)!\, 4^{2r}},$$

$$A_{n-2r}^n = B_{n-2r}^n \frac{(-1)^r (n - 1 - r)!\, k^{2r}}{r!\,(n - 1)!\, 4^{2r}}, \quad i = 0, 1,$$

где K_n — модифицированная функция Бесселя второго рода [4]; γ_n и ω_n — произвольные константы, которые могут быть найдены из граничного условия на поверхности цилиндра. Подставив (5) в (4), разложив экспоненту в ряд Фурье и разделив четные и нечетные члены, получим четыре независимые бесконечные системы алгебраических уравнений для нахождения соответственно γ_{2n}, γ_{2n+1}, ω_{2n}, ω_{2n+1}:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n} \operatorname{Cek}_{2n} A_{2r}^{2n} = (2 - \delta_{0r})\, I_{2r}(z) \cos 2r\varphi; \tag{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n+1} \operatorname{Cek}_{2n+1} A_{2r+1}^{2n+1} = -\,2 I_{2r+1}(z) \cos (2r + 1)\, \varphi; \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2n+1} \operatorname{Sek}_{2n+1} B_{2r+1}^{2n+1} = -\,2 I_{2r+1}(z) \sin (2r + 1)\, \varphi; \tag{8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2n+2} \operatorname{Sek}_{2n+2} B_{2r+2}^{2n+2} = 2 I_{2r+2}(z) \sin (2r + 2)\, \varphi, \tag{9}$$

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad \delta_{0r} = \begin{pmatrix} 1, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathrm{Cek}_n = \mathrm{Cek}_n(\xi_0);\quad \mathrm{Sek}_n = \mathrm{Sek}_n(\xi_0);\quad z = (k/a)\sqrt{a^2\cos^2\eta_0 + b^2\sin^2\eta_0};$$
$$\varphi = \arccos\left(a\cos\eta_0/\sqrt{a^2\cos^2\eta_0 + b^2\sin^2\eta_0}\right).$$

Анализ поведения функций Матье, введенных в формуле (5), при малых значениях k дает возможность определить порядок по этому параметру коэффициентов при неизвестных γ_n, ω_n [4]:

$$\mathrm{Cek}_0 A_0^0 \sim \ln k,\quad \mathrm{Cek}_{r+2n} A_r^{r+2n} \sim \mathrm{Sek}_{r+2n} B_r^{r+2n} \sim k^{-r},\tag{10}$$
$$\mathrm{Cek}_{r-2n} A_r^{r-2n} \sim \mathrm{Sek}_{r-2n} B_r^{r-2n} \sim k^{-r+4n}.$$

Для решения систем уравнений (6)—(9) воспользуемся правилом Крамера. Из оценок (10) следует, что в определителях, составленных из коэффициентов при неизвестных, произведение диагональных элементов много больше остальных слагаемых. Такими же свойствами обладают определители, полученные заменой первых столбцов столбцом из свободных членов. Расчет последующих неизвестных γ_n, ω_n усложняется с ростом n, однако для их оценки по-прежнему достаточно сравнить произведения диагональных элементов соответствующих определителей. В результате получены следующие соотношения:

$$\gamma_0 = [\ln(4a/k\gamma(a + b))]^{-1} + O(k^2),\tag{11}$$
$$|\gamma_n| = O(k^{2n}),\quad |\omega_n| = O(k^{2n})\quad (n \geqslant 1),$$

где $\ln\gamma(=0,\ 5772\ldots)$ — постоянная Эйлера. Пренебрегая в (5) членами, пропорциональными k, получим при $k \ll 1$

$$v \simeq \gamma_0\,\mathrm{Cek}_0(\xi)\,\mathrm{ce}_0(\eta),$$
$$t \simeq \gamma_0 \exp\left[(k/a)(c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta_0\cos\eta + c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta_0\sin\eta)\right]\mathrm{Cek}_0(\xi)\,\mathrm{ce}_0(\eta).$$

Поток тепла, отводимого (подводимого) от единицы длины поверхности цилиндра, находится по формуле

$$Q_T = -\varkappa\oint(\mathbf{n}\,\mathrm{grad}\,T - T\mathbf{un}/\chi)\,ds,\tag{12}$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; $\mathbf{n}$— внешняя нормаль к кривой, по которой проводится интегрирование. Наиболее простой вид формула (12) имеет при $\xi\to\infty$:

$$Q_T = \pi\varkappa(T_i - T_\infty)\int_0^{2\pi}\exp\left[(kc/2a)\exp(\xi)\cos(\eta - \eta_0)\right]\times$$
$$\times\left[(kc/2a)\exp(\xi)\cos(\eta - \eta_0)\,v - \frac{\partial v}{\partial\xi}\right]d\eta.$$

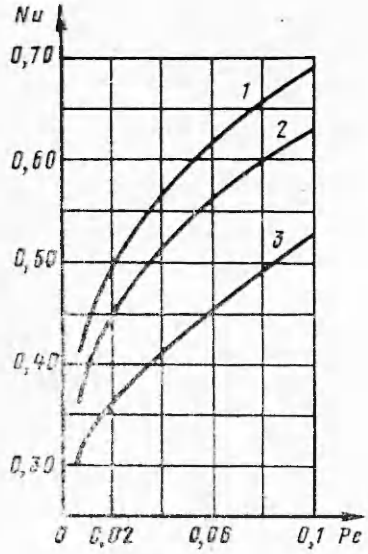
Интегрируя, получим

$$Q_T = 2\pi\varkappa(T_i - T_\infty)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\gamma_n\sum_{r=0}^{\infty}A_r^r\cos n\eta_0 +\right.\tag{13}$$
$$\left.+\,\omega_{n+1}\sum_{r=0}^{\infty}B_{r+1}^{n+1}\sin(n+1)\,\eta_0\right].$$

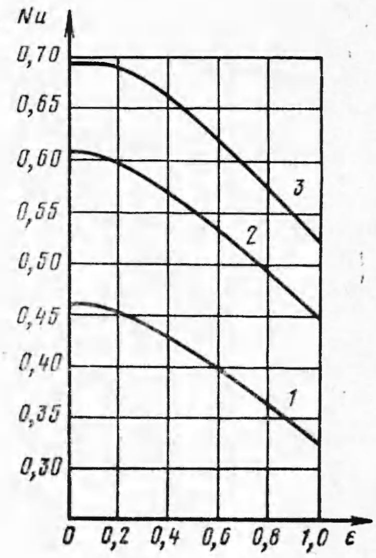
В случае малых чисел Пекле формула (13) переходит в формулу

$$Q_T = 2\pi\varkappa(T_i - T_\infty)\gamma_0 = \mathrm{Nu}\,\varkappa(T_i - T_\infty)l/2a,\tag{14}$$

где Nu — число Нуссельта. Подставляя (11) в (14) и переходя от k к числу



Фиг. 1



Фиг. 2

Пекле, получим для числа Нуссельта выражение

$$\mathrm{Nu} = (4\pi a/l)\,[\ln\,(16a/\mathrm{Pe}\,\gamma(a+b))]^{-1}, \tag{15}$$

где l — длина окружности эллипса. При $b/a \to 0$ (случай пластинки) выражение (15) стремится к пределу $\lim\limits_{b/a\to 0} \mathrm{Nu} = \pi\,(\ln\,(16/\mathrm{Pe}\,\gamma))^{-1}$. В предельном случае кругового цилиндра ($a = b$) формула (15) переходит в выражение, приведенное в [1]: $\mathrm{Nu} = 2(\ln\,(8/\mathrm{Pe}\,\gamma))^{-1}$. Из (15) следует, что в принятом приближении при $\mathrm{Pe} \ll 1$ поток тепла, отводимый от поверхности цилиндра, не зависит от его ориентации и определяется только значениями числа Pe и отношением полуосей b/a.

Кривые зависимости Nu от Pe и $\varepsilon = b/a$ приведены соответственно на фиг. 1, 2. На фиг. 1 кривые *1—3* построены при $\varepsilon = 0{,}1$; 0,5 и 1 соответственно. На фиг. 2 кривые *1—3* построены при $\mathrm{Pe} = 0{,}01$; 0,05 и 0,1 соответственно.

Поступила 2 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Levey H. C.** Heat transfer in slip flow at low Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, p. 385.
2. **Kassoy D. R.** Heat transfer from circular cylinders at low Reynolds number.— Phys. Fluids, 1967, vol. 10, p. 938.
3. **Hieber C. A., Gebhart B.** Low Reynolds number heat transfer from a circular cylinder.— J. Fluid Mech., 1968, vol. 32, p. 21.
4. **Справочник** по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

УДК 536.24.241

О ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ТЕПЛА НА ПОВЕРХНОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ В ГАЗЕ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

А. Д. Полянин

(Москва)

Получено решение задачи об определении полей температуры и концентраций, обусловленных протеканием многокомпонентной химической реакции на поверхности движущейся в газе сферы при малых числах Рейнольдса и Пекле. Считается, что части-