УДК 532.529.6

О СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА СФЕРУ В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Воинов

(Москва)

Рассматривается движение сферы переменного радиуса в неоднородном (с градиентом скорости) и нестационарном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. В предположении, что радиус сферы мал по сравнению с расстоянием до границ потока, вычислена сила воздействия потока на сферу.

Некоторые случаи движения шара в произвольном потенциальном потоке исследованы Н. Е. Жуковским [1]. Для неподвижного эллиптического цилиндра задача решена М. И. Гуревичем [2]; сила, действующая на движущийся круговой цилиндр переменного радиуса, вычислена Ю. Л. Якимовым [3]. В работе [4] рассмотрена аналогичная задача для сферы, но получено ошибочное выражение для силы.

Вывод основывается, как и в работе [4], на непосредственном интегрировании сил давления по сфере, но вместо модельной задачи о потенциале течения около сферы в мультиполе второго порядка рассматривается задача о потенциале скоростей произвольного потока и производится оценка погрешности полученной формулы для силы.

1. Потенциал скорости. Потенциал скоростей в точке $y_i = q_i$ (y_i — декартовы координаты, q_i — координаты центра сферы) в отсутствие сферы представляется рядом Тейлора

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Phi_0}{\partial y_i \partial y_j \ldots \partial y_k} (\mathbf{q})\, x_i x_j \ldots x_k \quad (x_i = y_i - q_i) \tag{1.1}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам $i, j, \ldots, k$, каждый из которых принимает значения 1, 2, 3, производится суммирование, число индексов $i, j, \ldots, k$ в (1.1) равно n. Каждый член ряда $n = 1, 2, \ldots$ в (1.1) является гармонической функцией.

Если в потоке находится сфера радиуса R, то для потенциала скоростей должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{q_i^{\cdot} x_i}{R} + R^{\cdot} \quad \text{при} \quad r = R \quad (r^2 = x_i x_i) \tag{1.2}$$

Если пренебречь влиянием удаленных границ, то необходимо потребовать, чтобы возмущение потенциала $\Phi - \Phi_0$ имело особенности только внутри сферы и убывало на бесконечности. Единственной гармонической функцией, удовлетворяющей этим условиям и условию (1.2), будет

$$\Phi = -R^2 R^{\cdot}/r - q_i^{\cdot} x_i R^3/2r^3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{R^{2n+1}}{r^{2n+1}}\right) \frac{\partial^n \Phi_0}{\partial y_i \partial y_j \ldots \partial y_k} (\mathbf{q})\, x_i x_j \ldots x_k \tag{1.3}$$

Это выражение справедливо, если расстояние r_0 до границ потока значительно превышает радиус сферы. В противном случае необходимо учитывать дополнительное возмущение потенциала за счет близости сферы к границам потока. Так как возмущение скорости на границах, вызванное удаленным телом, имеет порядок R^3/r_0^3 при $R = \text{const}$ и R^2/r_0^2 при $R^{\cdot} \neq 0$, то возмущение потенциала (1.3) при $R \to 0$ будет иметь порядок не ниже R^3 или R^2 соответственно. Можно заключить, что реальный смысл имеет учет только первых нескольких членов ряда (1.3).

2. Сила воздействия потока на сферу. По потенциалу (1.3), применяя интеграл Коши — Лагранжа, можно найти значения давления на сфере S и вычислить силу воздействия **F**.

Интеграл Коши — Лагранжа в системе, движущейся со скоростью $q_i^{\cdot}$ относительно той системы, в которой движение жидкости описывается потенциалом Φ, имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - q_i^{\cdot} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{p}{\rho} - U = f(t)$$

Здесь U — потенциал внешних массовых сил g_i.

Сила воздействия потока на сферу равна

$$F_m = \rho \int\limits_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 - q_i^{\cdot} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - U \right) \frac{x_m}{R} dS \tag{2.1}$$

$(m = 1, 2, 3)$

На сфере члены ряда (1.3) при $n > 1$ ортогональны к x_m. Поэтому

$$\int\limits_S \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{x_m}{R} dS = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{dv_m}{dt} + \frac{2\pi}{3} \frac{d}{dt} R^3 (v_m - \dot{q}_m) \tag{2.2}$$

$(v_m = v_m(q, t) = \partial\Phi_0/\partial y_m)$

Здесь v_m — скорость потока в отсутствие сферы. Для вычисления вклада остальных слагаемых в выражении (2.1) под интегралом необходимо найти компоненты скорости потока на сфере. Из (1.3) при $r = R$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = \frac{R^{\cdot}}{R} x_l - \frac{q_l^{\cdot}}{2} + \frac{3}{2} q_j^{\cdot} \frac{x_j x_l}{R^2} + \tag{2.3}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)!} P_{il} \frac{\partial^n \Phi_0}{\partial y_i \partial y_j \ldots \partial y_k} (\mathbf{q}) x_j \ldots x_k$$

$$P_{il} = \delta_{il} - x_i x_l / R^2$$

На поверхности сферы

$$P_{il} P_{ls} = P_{is}$$

С учетом этого тождества и формулы (2.3) найдем

$$\tfrac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 - \dot{\mathbf{q}}\nabla\Phi = \tfrac{1}{2} (R^{\cdot 2} - \mathbf{q}^{\cdot 2} + P_{is} w_i w_s) \tag{2.4}$$

$$w_i = \frac{3}{2} (v_i - q_i^{\cdot}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)!} \frac{\partial^n \Phi_0}{\partial y_i \partial y_j \ldots \partial y_k} (\mathbf{q}) x_j \ldots x_k$$

В интеграл (2.1) дадут вклад только полиномы с нечетной суммой степеней x_1, x_2, x_3, входящие в слагаемое $P_{is} w_i w_s$, фигурирующее в (2.4). Опуская члены порядка R^5 и выше, можно записать

$$\int\limits_S \left[\frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 - q^{\cdot}\nabla\Phi \right] \frac{x_m}{R} dS = \frac{5}{2} (q_l^{\cdot} - v_l) \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \int\limits_S P_{lk} \frac{x_j x_m}{R} dS \tag{2.5}$$

Далее следует учесть, что

$$\int\limits_S x_k x_l x_j x_m dS = (\delta_{kj}\delta_{lm} + \delta_{kl}\delta_{jm} + \delta_{km}\delta_{lj}) \frac{4\pi}{15} R^4$$

Отсюда и из определения P_{lk} в (2.3) получим

$$\int\limits_S P_{lk} \frac{x_j x_m}{R} dS = (\delta_{kj}\delta_{lm} + \delta_{lj}\delta_{km} - 4\delta_{jm}\delta_{kl}) \frac{4\pi}{15} R^3$$

Подстановка последнего выражения в (2.5) дает

$$\int\limits_S \left[\frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 - \mathbf{q}^{\cdot}\nabla\Phi \right] \frac{x_m}{R} dS = -2\pi R^3 (q_k^{\cdot} - v_k) \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \tag{2.6}$$

Из формул (2.1), (2.2) и (2.6) можно получить для силы воздействия потока на тело

$$\frac{F_m}{2\pi\rho R^3} = \frac{\partial v_m}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_m}{\partial y_k} - \frac{1}{3} q_m^{\cdot\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{3R^3} (v_m - \dot{q}_m) - \frac{2}{3} g_m \tag{2.7}$$

Здесь v_m — скорость потока в отсутствие сферы; значения v_m и grad v_m, а также массовой силы g_m вычисляются в точке q_i. Как следует из вывода, погрешность формулы (2.7) имеет порядок R^5. При $R^{\cdot} \neq 0$ за счет влияния границ потока погрешность может быть $\sim R^{\cdot 2}R^4$.

Согласно формуле (2.7) сила воздействия потока на сферу постоянного объема определяется ускорением жидкой частицы в отсутствие сферы и ускорением сферы и не зависит ни от скорости движения сферы в потоке, ни от скорости жидкости.

Формула (2.7) согласуется с формулой Н. Е. Жуковского [1]

$$\mathbf{F} = {}^3/_2 \rho V \mathbf{a}$$

полученной для неподвижной сферы в потоке с потенциалом, равным произведению функции от координат на функцию от времени (**a** — абсолютное ускорение жидкости в точке, совпадающей с центром сферы, V — ее объем).

Для газового пузырька в отсутствие вязкости следует положить $\mathbf{F} = 0$ в силу пренебрежимо малой массы газа. Тогда (2.7) дает, что ускорение газового пузырька равно трем ускорениям жидкости. Этот факт ранее был известен для однородного потока (без градиента скорости) [5].

Автор благодарит Г. Ю. Степанова за полезные замечания.

Поступила 24 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы. Собр. соч., т. 2, Гидродинамика. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1949.
2. *Гуревич М. И.* Аэродинамическое воздействие поезда на малое тело. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
3. *Якимов Ю. Л.* Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
4. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малую сферу в произвольном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1971, № 9.
5. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

УДК 539.374

О ВОЛНАХ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ С СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

В. Л. Гонсовский, Ю. А. Россихин

(Воронеж)

Рассматриваются волны напряжений в вязкоупругой среде с сингулярным ядром наследственности. Показано, что в такой среде в отличие от моделей Максвелла и стандартного линейного тела распространяются волны, у которых напряжения меняются непрерывно при переходе через волновой фронт.

Задачи о распространении волн напряжений в полубесконечных вязкоупругих стержнях рассматривались в работах [1–5], в которых с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье были получены решения для моделей Максвелла [4], Фойгта и стандартного линейного тела [5]. Однако использование интегральных преобразований вызывает определенные вычислительные трудности, связанные с переходом от изображения к оригиналу, для устранения которых часто используются приближенные методы: асимптотические формулы [6], разложения вблизи фронта [3], а также различные аппроксимации [7, 8].

Ниже исследуются волны напряжений в вязкоупругом стержне, наследственные свойства которого описываются соотношениями Больцмана — Вольтерра с сингулярным ядром наследственности [9].