Как видно из графика, опытные точки удовлетворительно согласуются с кривой распределения температуры в пограничном слое по закону степени $^1/_7$.

Автор благодарит А. И. Леонтьева, Э. П. Волчкова и Е. Г. Зауличного за руководство и помощь в работе.

Поступила 24 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Гостехиздат, 1957.
2. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. В сб.: «Проблемы механики», М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск. Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. Волчков Э. П., Левченко В. Я. Тепловой турбулентный пограничный слой на плоской пластине с теплоизолированным участком. Инж.-физ. ж., 1965, № 6.
5. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло-и массообмена. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
6. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1964.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

В. А. Сапожников, В. Н. Штерн

(Новосибирск)

Исследование устойчивости плоско-параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости с помощью уравнения Орра — Зоммерфельда в последнее время находит все большее применение как для построения нейтральных кривых и нахождения критических чисел Рейнольдса [1], так и для первых попыток теоретического предсказания турбулентных профилей осредненной скорости [2].

Математически задача сводится к отысканию собственных значений для уравнения

$$\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R\,[(u - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi] \tag{1}$$

с однородными граничными условиями для функции φ. Здесь $u = u(y)$ — профиль скорости исследуемого на устойчивость течения; $\varphi = \varphi(y)$ — комплексная амплитуда функции тока возмущенного движения, имеющей вид $\varphi(y)\exp[i\alpha(x - ct)]$; α — волновое число; R — число Рейнольдса; c — искомое собственное значение. При $\mathrm{Im}\, c > 0$ имеет место экспоненциальный рост возмущений (неустойчивость), при $\mathrm{Im} c < 0$ — затухание.

До сих пор все численные методы позволяли проводить расчеты собственных чисел уравнения (1) только для сравнительно небольших значений αR — не более 10^4—10^5.

В работе [3] предложен способ вычисления собственных значений, который позволяет практически снять ограничения на величину αR и получить собственные значения с заданной точностью.

Целью данной работы является: 1) показать эффективность метода [3] на примере исследования устойчивости течения Пуазейля в плоском канале, где есть широкая возможность сравнения с результатами других авторов: 2) сопоставить результаты численных и асимптотических методов в широком диапазоне значений αR; 3) заполнить некоторый пробел в исследовании устойчивости плоского течения Пуазейля — выявить зависимость собственного значения от волнового числа α. Последний анализ, имеющий и самостоятельную ценность, может быть использован при изучении нелинейной устойчивости течения Пуазейля.

Для расчета собственных значений использовался алгоритм [3], но несколько модифицированный. Интегрирование системы уравнений проводилось методом Рунге — Кутта с автоматическим выбором шага и фиксированной относительной точностью. Результаты, относящиеся к нейтральной кривой, получены с пятью верными значащими цифрами, остальные результаты не менее чем с тремя.

Все результаты в дальнейшем представлены в безразмерных параметрах, построенных по средней (расходной) скорости, полуширине канала и молекулярной вязкости. Собственное значение представляется в виде: $c = X + iY$.

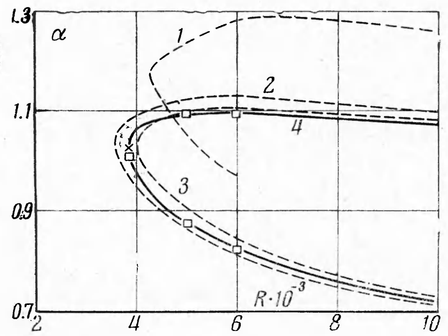
На фиг. 1 представлен «носик» нейтральной кривой, подсчитанный авторами (кривая *4*) для сопоставления с другими результатами, полученными как асимптотическими (кривая *1* — [4], *2* — [1], *3* — [5]), так и численными методами (крестики данные работы [6], квадратики — [7]).

На фиг. 1 видно, что численные расчеты дают несколько отличные результаты по сравнению с расчетами, использующими различные асимптотические приближения.

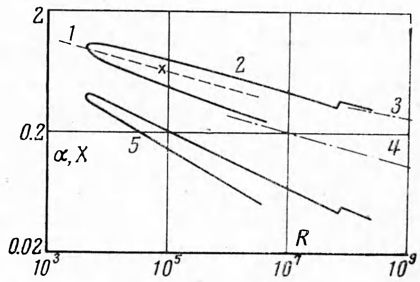
С другой стороны, все встреченные в литературе численные результаты с точностью, допускаемой графиком, совпадают с результатами авторов. Например, для критической точки нейтральной кривой получено

	R_*	α_*	X	Y
[7]	3848.03	1.02071	0.39603	0.00000
Авторы	3848.15	1.02041	0.39598	$-0.6\cdot10^{-8}$

На фиг. 2 представлена нейтральная кривая (кривая *2*), рассчитанная авторами до $R = 2.5\cdot10^8$. Цель этих расчетов — в первую очередь демонстрация эффективности метода. Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6. Нейтральные точки находились методом секущих. Для нахождения одной нейтральной точки насчитывалось 3—5 собственных значений. Время вычисления одного собственного значения в районе носика не превосходило секунды.



Фиг. 1



Фиг. 2

Численные расчеты в точности повторили результаты асимптотической теории. Нейтральная кривая в таком широком диапазоне чисел Рейнольдса, полученная асимптотическими методами, представлена в обзорной работе [8]. Штрих-пунктирными линиями на фиг. 2 показаны асимптоты Линя для верхней и нижней ветвей нейтральной кривой по данным [8]: ветвь *3* — $\alpha = (400 / R)^{1/11}$, ветвь *4* — $\alpha = (142 / R)^{1/7}$. Как асимптотические, так и численные расчеты указывают на «ступеньку» на верхнй ветви при $R = 0.7086\cdot10^8$. Такая же ступенька и в зависимости для фазовой скорости X (кривая *5*). Это объясняется в асимптотической теории петлей у функции Титьенса [8]. Пунктирной линией на фиг. 2 (кривая *1*) нанесена зависимость $\alpha(R)$ вдоль хребта $\max_\alpha Y(R)$, которую с точностью до процента для $R > 100$ можно аппроксимировать соотношением $\alpha = {}^{10}/_3 R^{-1/7}$. Хребет имеет вершину (отмеченную на фиг. 2 крестом) с параметрами $R = 74\cdot10^3$, $\alpha = 0.678$, $X = 0.1897$, $Y = 0.01577$, после которой Y уменьшается примерно по закону $Y = 1 / \pi(\alpha R)^{-1/4}$.

Отметим, что это значительно расходится с [1], где приведены линии уровня для $Y > 0$, полученные на основе асимптотической теории. При уменьшении R вдоль кривой *1* на фиг. 2 α стремится к 2.81, что соответствует его значению для неподвижной жидкости.

Авторы были вынуждены отказаться от табличного представления результатов ввиду большого их объема и малой наглядности. Ниже приведены лишь значения для конечных точек нейтральной кривой:

	R	α	X	Y
Верхняя ветвь	$0.250\cdot10^9$	0.310	0.0371	$-0.227\cdot10^{-6}$
Нижняя ветвь	$0.290\cdot10^7$	0.254	0.0538	$-0.172\cdot10^{-4}$

Асимптотическая теория Линя дает данные, которые графически не отличаются от численных результатов авторов уже при $R \geqslant 10^5$.

Представляет интерес выявить зависимость собственного значения от волнового числа α. Чтобы исследовать эту зависимость во всем диапазоне волновых чисел от нуля до бесконечности, необходимо сочетать численные расчеты с асимптотическим описанием для весьма малых и весьма больших значений α.

Нетрудно убедиться, что при произвольном профиле $u(y) \in C_2$ для первого собственного значения справедливы асимптотические зависимости (фиг. 3)

$$Y = -\pi^2 / \alpha R \quad \text{(малые } \alpha\text{, кривая } 6\text{)} \tag{2}$$

$$Y = -\alpha / R \quad \text{(большие } \alpha\text{, кривые } 7\text{)} \tag{3}$$

При этом предельные значения фазовой скорости X будут зависеть от вида профи ля, например, для параболы Пуазейля $X = 0.62$.

На фиг. 3 сплошными линиями представлены численные результаты для зависимостей X и Y от α при $R = 10^2, 10^3, 10^4$ (соответственно кривые *1*, *2*, *3*).

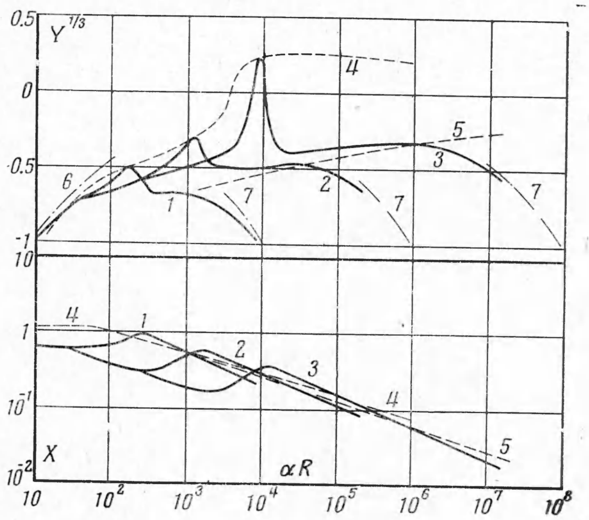
При фиксированном R $Y(\alpha)$ имеет в общем случае два локальных максимума Один из них достигается при α порядка единицы и, начиная с $R = 3848$, поднимается над нулевым уровнем, формирует нейтральную кривую и отвечает за неустойчивость (кривая *4*). Другой локальный максимум существует при $R \geqslant 164$, расположен значительно ниже и достигается при α порядка десятков и сотен (кривая *5*). Для зависимости *4* при малых α справедливы соотношения $X = 1.13$, $\alpha RY = -12.96$. При больших α вдоль зависимостей *4*, *5* с хорошей точностью выполняются соответственно

$$c \approx 7.5\,(\alpha R)^{-1/3} + i\pi^{-1}\,(\alpha R)^{-1/4} \tag{4}$$

$$c \approx (\alpha R)^{-1/3}\,(2\pi - i\,3.86) \tag{5}$$

Отметим, что при выходе $Y(\alpha)$ на асимптотические зависимости (3) фазовые скорости хорошо описываются соотношением

$$X \approx \pi^{3/2} R^{-\lg^2} \alpha^{-2/5} \tag{6}$$



Фиг. 3

(Формулы (4) — (6) получены эмпирически на основе численных экспериментов.)

Таким образом, в рассмотренном диапазоне чисел R собственные значения (1) для параболы Пуазейля будут определены.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность М. А. Гольдштику за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 31 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Гольдштик М. А. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 5.
3. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
4. Короткин А. И. Устойчивость плоского течения Пуазейля при наличии упругих границ. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
5. Lock R. C. The stability of the flow of an electrically — conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1955, A 233, No. 1192.
6. Thomas L. H. The stability of plane Poiseuille flow. Phys. Rev., 1953, vol. 91, No. 4.
7. Reynolds W. C., Potter M. C. Finite — amplitude instability of parallel shear flows. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt. 3.
8. Reid W. H. The stability of parallel flows. Basic development in Fluid dynamics. Acad. Press, New York — London, 1965, vol. 1.