УДК 539.3

ОБ ОТРЫВЕ БАЛКИ, ПРИКЛЕЕННОЙ К ЖЕСТКОЙ ПЛИТЕ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Рассматривается нестационарная задача об отрыве балки, приклеенной к жесткой плите, приложенной нагрузкой. Используется модель балки Эйлера. Распространение трещины описывается с помощью уравнения баланса энергии.

Ключевые слова: упругая балка, балка Эйлера, энергетический критерий роста трещины, плотность поверхностной энергии, метод нормальных мод, метод Рунге — Кутты.

Нестационарная задача о развитии трещины в плоском и пространственном случаях очень сложна. Несмотря на то что в плоском случае точное решение этой задачи существует [1], на практике оно неприменимо, так как представляется в виде четырехкратных интегралов. Поэтому обычно решается стационарная задача о критической нагрузке с использованием теории равновесных трещин Баренблатта [2, 3]. При исследовании расслоения многослойных материалов, расклинивания, а также для расчета прочности соединения облицовочных покрытий применимо более простое балочное приближение в теории трещин, которое развивалось в работах [4–7]. Однако в этих работах не изучалось движение трещины с переменной скоростью. В [8] рассмотрено нестационарное развитие трещины в балочном приближении под действием равномерно распределенной нагрузки, постоянной во времени. В данной работе исследуется нестационарное движение трещины под действием перерезывающей силы, а также под действием равномерно распределенной нагрузки, увеличивающейся во времени.

Рассматривается упругая балка, приклеенная к жесткой плите. На некотором участке длины l_0 балка отслоилась. В момент времени $t = 0$ на балку начинает действовать постоянная сила F, приложенная на ее свободном конце и направленная вверх. Под действием этой силы балка начинает двигаться вверх, отрываясь от жесткой плиты (рис. 1). На конце трещины ставятся условия жесткого защемления. Задача состоит в определении

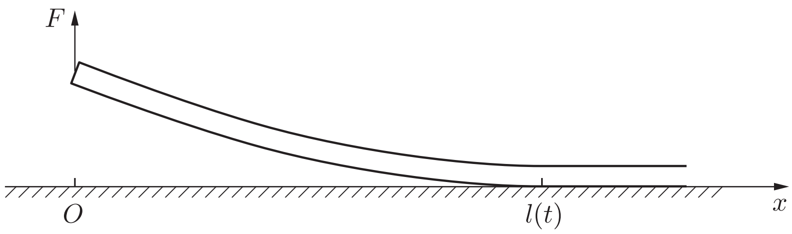

Рис. 1. Схема движения балки при нагрузке, приложенной к ее концу

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-5873.2006.1).

движения балки и зависимости длины отслоившегося участка от времени. Предполагается, что плотность поверхностной энергии в клеевом слое меньше плотности материала балки (в противном случае трещина будет распространяться в самой балке).

Для описания упругих свойств используется модель балки Эйлера. Применяется энергетический критерий роста трещины: уравнение баланса энергии записывается с учетом поверхностной энергии, высвобождающейся при образовании новых поверхностей. Используется метод нормальных мод: прогиб балки представляется в виде разложения по зависящим от переменной длины балки собственным функциям с неизвестными коэффициентами. Для определения коэффициентов разложения и длины трещины получены система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенство, которые решаются методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

1. Постановка задачи. Движение балки описывается уравнением

$$\rho hb\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \tag{1.1}$$

где ρ — плотность материала балки; h, b, w — толщина, ширина и прогиб балки; E — модуль Юнга; $I = bh^3/12$ — момент инерции сечения балки. Уравнение баланса энергии записывается в виде

$$F\,\frac{\partial w}{\partial t}(0,t) = \frac{d}{dt}\,(T + \Pi) + 2\gamma b l' \theta(l'), \tag{1.2}$$

где γ — плотность поверхностной энергии, высвобождающейся при распространении трещины; θ — функция Хевисайда; $l = l(t)$ — длина отслоившегося участка балки; штрих обозначает производную по времени; T, Π — кинетическая и потенциальная энергии балки:

$$T = \frac{\rho hb}{2}\int_0^l \Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2\,dx, \qquad \Pi = \frac{EI}{2}\int_0^l \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^2\,dx.$$

Кроме того, должно выполняться неравенство

$$l'(t) \geqslant 0, \tag{1.3}$$

которое следует из физического смысла задачи (образовавшаяся трещина не смыкается).

В начальный момент времени балка слегка отклонена. Начальное отклонение задается для того, чтобы избежать контакта отклеенного участка балки с жесткой плитой при последующем деформировании (если начальное отклонение равно нулю или мало, могут возникнуть зоны контакта отклеенного участка с жесткой плитой при его движении). Краевые и начальные условия имеют следующий вид:

$$w(l,t) = w_x(l,t) = 0, \qquad w_{xx}(0,t) = 0, \qquad EIw_{xxx}(0,t) = F; \tag{1.4}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \qquad w_t(x,0) = 0, \qquad l(0) = l_0, \qquad l'(0) = 0. \tag{1.5}$$

2. Решение задачи. Прогиб балки представим в виде

$$w(x,t) = a_0(t)W_0(x) + \sum_{k=1}^{N} a_k(t)W_k(x), \tag{2.1}$$

где $W_0(x)$ — решение стационарной задачи с краевыми условиями (1.4)

$$W_0(x) = (x-l)^2(x+2l), \qquad a_0 = F/(6EI),$$

$a_k(t)$ — неизвестные коэффициенты разложения; $W_k(x)$ — собственные функции для балки Эйлера с однородными краевыми условиями; N — число мод разложения. Собственные функции $W_k(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^4W_k}{dx^4} = \lambda_k^4 W_k(x)$$

и краевым условиям

$$w(l,t) = w_x(l,t) = 0, \qquad w_{xx}(0,t) = w_{xxx}(0,t) = 0.$$

Собственные функции имеют вид

$$W_k(x) = \operatorname{ch}(\lambda_k x) + \cos(\lambda_k x) - \frac{\operatorname{ch}(\lambda_k l) + \cos(\lambda_k l)}{\operatorname{sh}(\lambda_k l) + \sin(\lambda_k l)}\,[\operatorname{sh}(\lambda_k x) + \sin(\lambda_k x)],$$

где собственные числа $\lambda_k = \lambda_k(l)$ определяются соотношением

$$\cos(\lambda_k l)\operatorname{ch}(\lambda_k l) + 1 = 0. \tag{2.2}$$

При $k \to \infty$ $\operatorname{ch}(\lambda_k l) \to \infty$ и $\lambda_k \simeq (k - 1/2)\pi$. Собственные функции ортогональны

$$\int\limits_0^l W_k(x)W_m(x)\,dx = \delta_{km}B_m, \qquad B_m = \int\limits_0^l W_m^2(x)\,dx$$

(δ_{km} — символ Кронекера).

Из (2.2) следует

$$\lambda_k l = \mathrm{const}, \qquad \frac{d\lambda_k}{dl} = -\frac{\lambda_k}{l}, \qquad \frac{\partial W_k}{\partial l} = -\frac{x}{l}\,\frac{\partial W_k}{\partial x}.$$

Тогда из (2.1) получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = l' a_0\,\frac{\partial W_0}{\partial l} + \sum_{k=1}^N a_k'(t)W_k(x) - \frac{l'}{l}\sum_{k=1}^N a_k(t)x\,\frac{\partial W_k}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = l'' a_0\,\frac{\partial W_0}{\partial l} + l'^2 a_0\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial l^2} + \sum_{k=1}^N a_k''(t)W_k(x) - 2\,\frac{l'}{l}\sum_{k=1}^N a_k'(t)x\,\frac{\partial W_k}{\partial x} - \\ - \Big(\frac{l''}{l} - 2\,\frac{l'^2}{l^2}\Big)\sum_{k=1}^N a_k(t)x\,\frac{\partial W_k}{\partial x} + \frac{l'^2}{l^2}\sum_{k=1}^N a_k(t)x^2\,\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение движения балки (1.1), умножая их на $W_m(x)$ и интегрируя полученные уравнения по x, находим

$$\rho hb\Big[a_m'' B_m + \frac{12l'' l a_0 U_m}{\lambda_m^2} + \frac{12 l'^2 l a_0}{\lambda_m}\Big(V_m + \frac{U_m}{\lambda_m l}\Big) - \frac{l''}{l}\sum_{k=1}^N C_{mk}a_k - \\ - 2\,\frac{l'}{l}\sum_{k=1}^N C_{mk}a_k' - \frac{l'^2}{l^2}\sum_{k=1}^N D_{mk}a_k\Big] + EI\lambda_m^4 a_m B_m = 0. \tag{2.3}$$

Здесь

$$U_m = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m l)\sin(\lambda_m l) - \operatorname{sh}(\lambda_m l)\cos(\lambda_m l)}{s_m} = (-1)^{m-1}, \qquad V_m = \frac{\operatorname{sh}(\lambda_m l)\sin(\lambda_m l)}{s_m},$$

$$s_m = \operatorname{sh}(\lambda_m l) + \sin(\lambda_m l), \quad C_{mk} = \int\limits_0^l x W_m(x)\,\frac{\partial W_k}{\partial x}\,dx, \quad D_{mk} = \int\limits_0^l x^2\,\frac{\partial W_m}{\partial x}\,\frac{\partial W_k}{\partial x}\,dx.$$

Вычисляя интегралы, для коэффициентов матриц и векторов получаем выражения

$$B_m = l\bar{B}_m, \qquad C_{mk} = l\bar{C}_{mk}, \qquad D_{mk} = l\bar{D}_{mk},$$

где коэффициенты $\bar{B}_m$, $\bar{C}_{mk}$, $\bar{D}_{mk}$ не зависят от l:

$$\bar{B}_m = 1, \qquad \bar{C}_{mk} = \frac{4(-1)^{m+k}\lambda_m^2\lambda_k^2}{\lambda_k^4 - \lambda_m^4}, \qquad m \ne k,$$

$$\bar{D}_{mk} = 4\lambda_m^2\lambda_k^2\Big(\frac{4(-1)^{m+k}(\lambda_m^4 + \lambda_k^4)}{(\lambda_m^4 - \lambda_k^4)^2} + \frac{(-1)^{k-1}\lambda_m l}{\lambda_k^4 - \lambda_m^4}\,V_m + \frac{(-1)^{m-1}\lambda_k l}{\lambda_m^4 - \lambda_k^4}\,V_k\Big), \qquad m \ne k,$$

$$\bar{D}_{kk} = \frac{3}{2} + \frac{\lambda_k^2 l^2}{s_k}\Big(\frac{\operatorname{sh}(\lambda_k l) - \sin(\lambda_k l)}{3} - \frac{\operatorname{ch}(\lambda_k l) + \cos(\lambda_k l)}{\lambda_k l}\Big).$$

При этом $\bar{C}_{km} = -\bar{C}_{mk}$ в случае $k \ne m$, $\bar{C}_{kk} = -\bar{B}_k/2 = -1/2$, $\bar{D}_{mk} = \bar{D}_{km}$. Тогда

$$a_m'' = -\frac{EI\lambda_m^4 a_m}{\rho h b} - \frac{12l''a_0U_m}{\lambda_m^2} - \frac{12l'^2a_0}{\lambda_m}\Big(V_m + \frac{U_m}{\lambda_m l}\Big) + \frac{l''}{l}\sum_{k=1}^N \bar{C}_{mk}a_k + {} \\ + 2\,\frac{l'}{l}\sum_{k=1}^N \bar{C}_{mk}a_k' + \frac{l'^2}{l^2}\sum_{k=1}^N \bar{D}_{mk}a_k. \qquad (2.4)$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергий имеют вид

$$T = \rho h b\Big[6l'^2l^5a_0^2 + 12l'l^3a_0\sum_{k=1}^N \frac{a_k'(t)U_k}{(\lambda_k l)^2} - 12l'^2l^2a_0\sum_{k=1}^N \frac{a_k(t)}{\lambda_k l}\Big(V_k - \frac{2U_k}{\lambda_k l}\Big) + {} \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N a_k'^2(t)B_k - \frac{l'}{l}\sum_{k=1}^N C_{mk}a_k a_m' + \frac{l'^2}{2l^2}\sum_{k=1}^N D_{mk}a_k a_m\Big],$$

$$\Pi = EI\Big(6l^3a_0^2 + 12a_0\sum_{k=1}^N a_k(t) + \frac{1}{2l^3}\sum_{k=1}^N a_k^2(t)(\lambda_k l)^4\Big).$$

Подставим полученные выражения в уравнение баланса энергии (1.2), уравнение движения балки (2.3) умножим на a_m', просуммируем по m, а результат вычтем из уравнения баланса энергии. Заменив a_m'' выражениями (2.4) и проведя ряд преобразований, получим

$$\frac{l''}{l}\Big[\sum_{k,m=1}^N F_{mk}a_k a_m + 12a_0^2l^6\Big(1 - 12\sum_{k=1}^N \frac{1}{(\lambda_k l)^4}\Big) - 24a_0l^3\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{\lambda_k l}\Big(V_k - 2\frac{U_k}{\lambda_k l}\Big) + {} \\ + 24a_0l^3\sum_{m,k=1}^N \bar{C}_{mk}\,\frac{a_kU_m}{(\lambda_m l)^2}\Big] = \frac{EI}{\rho h b}\Big(\frac{3}{2l^4}\sum_{m=1}^N a_m^2(\lambda_m l)^4 + 12\,\frac{a_0}{l}\sum_{m=1}^N a_m U_m(\lambda_m l)^2 -$$

$$-\frac{1}{l^4}\sum_{m,k=1}^{N}\bar{C}_{mk}(\lambda_m l)^4 a_k a_m + 18a_0^2 l^2\Big) - \frac{2\gamma\theta(l')}{\rho h} - 30a_0^2 l'^2 l^4 - 2\,\frac{l'}{l}\sum_{k,m=1}^{N}F_{mk}a_k a_m' +$$
$$+\frac{l'^2}{l^2}\sum_{k,m=1}^{N}H_{mk}a_k a_m + 24a_0 l' l\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k' l + a_k l'}{\lambda_k l}\Big(V_k - 2\frac{U_k}{\lambda_k l}\Big) - 24a_0 l' l^2\sum_{m,k=1}^{N}\bar{C}_{mk}\frac{a_k' U_m}{(\lambda_m l)^2} -$$
$$- 12a_0 l'^2 l\sum_{m,k=1}^{N}\bar{D}_{mk}\frac{a_k U_m}{(\lambda_m l)^2} - 12a_0 l'^2 l\sum_{m,k=1}^{N}\bar{C}_{mk}\frac{a_k}{\lambda_m l}\Big(V_m + \frac{U_m}{\lambda_m l}\Big) + \tag{2.5}$$
$$+ 144a_0^2 l'^2 l^4\sum_{m=1}^{M}\frac{U_m}{(\lambda_m l)^3}\Big(V_m + \frac{U_m}{\lambda_m l}\Big),$$

$$F_{mk} = \bar{D}_{mk} - \sum_{j=1}^{N}\bar{C}_{jk}\bar{C}_{jm}, \qquad H_{mk} = \frac{\bar{D}_{mk}}{2} + \sum_{j=1}^{N}\bar{C}_{jk}\bar{D}_{jm}.$$

Из начальных условий (1.5) следует

$$a_m(0) = \frac{1}{l}\int_0^l [w_0(x) - a_0(0)W_0(x)]W_m(x)\,dx,$$
$$a_m'(0) = 0, \qquad l(0) = l_0, \qquad l'(0) = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, для расчета движения балки имеем уравнения (2.4), (2.5) и неравенство (1.3). Подставляя в (2.4) выражение для l'' из (2.5), получаем систему нелинейных уравнений второго порядка, разрешенную относительно старших производных, а также неравенство (1.3) с начальными условиями (2.6). Полученная система сводится к системе уравнений первого порядка и решается методом Рунге — Кутты четвертого порядка [9]. Поскольку все члены уравнений (2.4), (2.5) дифференцируемы и $l(t) \geqslant l_0$, для единственности решения необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках в левой части уравнения (2.5) не обращалось в нуль [10]. В проведенных расчетах значение этого выражения контролировалось и было положительным. Результаты расчетов с различными шагом по времени и числом мод (20, 30, 40, 50) хорошо согласуются, что свидетельствует об устойчивости расчетной модели. При увеличении числа мод шаг по времени необходимо уменьшать.

3. Результаты численных расчетов. В качестве примера рассматривается деревянная балка со следующими параметрами: $E = 10^9$ Н/м^2, $\rho = 500$ кг/м^3, $l_0 = 0{,}3$ м. Плотность поверхностной энергии клеевого слоя принимается равной 0,5 Н/м. Толщина балки 0,02 м, ширина 0,1 м, величина приложенной силы меняется. Начальное положение балки задается в виде

$$w_0(x) = a_{00}W_0(x), \qquad a_{00} = a_0/4.$$

Найдем критическую нагрузку для развития трещины. В работе [4] показано, что на конце распространяющейся трещины изгибающий момент имеет стационарное значение

$$M(l,t) = EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 2\sqrt{\gamma b E I}. \tag{3.1}$$

Коэффициент в правой части (3.1) отличается от соответствующего коэффициента в [4], так как в рассматриваемом случае балка одна. Поскольку действующая сила постоянна во времени, можно вычислить критическую нагрузку, используя теорию равновесных трещин Баренблатта [11]. Решение статической задачи об изгибе балки Эйлера имеет вид

$$w(x) = F(x - l_0)^2(x + 2l_0)/(6EI).$$

Из (3.1) получаем условие роста трещины

$$F > F_* = 2\sqrt{\gamma bEI}/l_0.$$

В рассматриваемом случае $F_* \simeq 12{,}17$ Н. Решение нестационарной задачи при фиксированной длине трещины имеет вид

$$w(x,t) = \frac{F}{6EI}\,W_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)[1-\cos{(\omega_k t)}]W_k(x), \qquad \omega_k^2 = \frac{EI\lambda_k^4}{\rho h}.$$

Проведенные расчеты показали, что значение критической нагрузки, полученное для нестационарного решения, приблизительно в два раза меньше, чем для стационарного, и зависит от начального положения балки.

Численные расчеты нестационарной задачи по приведенному алгоритму показали следующее. Как и в работе [8], при постоянной по времени нагрузке рост трещины происходит скачкообразно. Обнаружены два режима развития трещины. При незначительной сверхкритической нагрузке рост трещины происходит в течение конечного интервала времени. За это время трещина достигает длины, при которой нагрузка уже не является сверхкритической, и развитие трещины прекращается. При большой сверхкритической нагрузке трещина начинает резко увеличиваться, и этот рост не прекращается до тех пор, пока справедливо линейное приближение. На рис. 2,*а* показаны зависимости от времени приведенного момента в кончике трещины

$$\bar{M}(l,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{EI}{\gamma b}}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t)$$

(кривая *1*) и скорости развития трещины (кривая *2*) при действии силы $F = 7$ Н. Видно, что в кончике растущей трещины условие Михайлова выполняется с большой точностью, хотя в алгоритме решения задачи оно не заложено. В интервалах времени, когда трещина не развивается, приведенный момент $\bar{M} < 1$. При достижении достаточной длины развитие трещины прекращается. На рис. 2,*б* представлены зависимости от времени приведенного момента в кончике трещины и скорости развития трещины (кривые *1, 2* соответственно) при действии силы $F = 10$ Н. На рис. 2 видно, что скорость развития трещины претерпевает сильные скачки, особенно вначале. С течением времени скачки скорости уменьшаются, и трещина развивается достаточно плавно. С увеличением силы, действующей на трещину, скорость развития трещины растет. Зависимость длины трещины от времени при двух значениях F представлена на рис. 3.

Данный алгоритм можно применить и для переменной по времени силы, однако в этом случае число членов значительно увеличивается и решение становится очень громоздким. Поэтому рассмотрим развитие трещины при равномерно распределенной нагрузке [8], увеличивающейся во времени.

4. Развитие трещины при растущей нагрузке. Рассматривается балка с теми же параметрами, но в данном случае трещина скреплена на обоих концах, нагрузка равномерно распределена вдоль балки (рис. 4). В начальный момент времени балка не отклонена. Уравнение движения балки, краевые и начальные условия имеют вид

$$\begin{gathered} \rho hb\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = bP(t), \\ w(\pm l,t) = w_x(\pm l,t) = 0, \qquad w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Соответствующий алгоритм решения задачи приведен в работе [8]. Для случая линейного роста во времени интенсивности нагрузки на единицу ширины балки $P(t) = P_1 t$ получены следующие результаты. Момент времени, в который начинается развитие трещины,

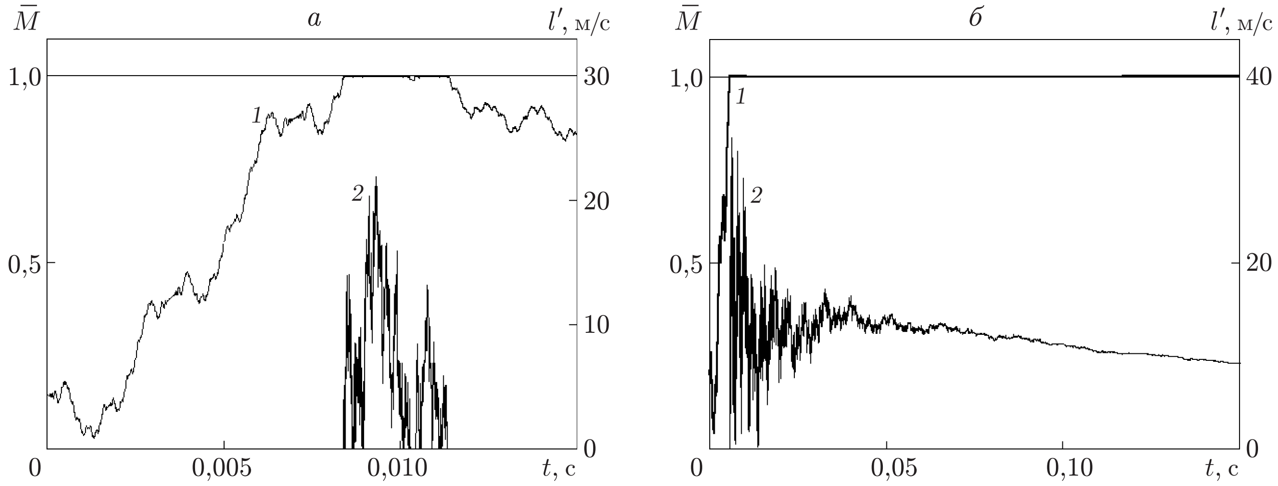

Рис. 2. Зависимости от времени безразмерного момента $\bar{M}(t)$ (кривая *1*) и скорости роста трещины $l'(t)$ (кривая *2*) при действии силы F:
а — $F = 7$ Н, *б* — $F = 10$ Н

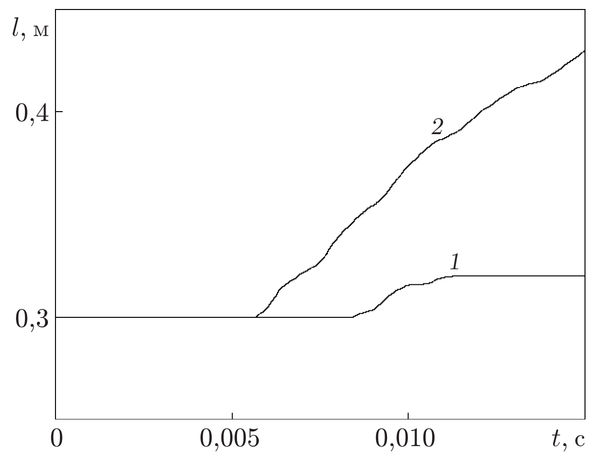

Рис. 3. Зависимость длины трещины от времени при различных значениях действующей силы:
1 — $F = 7$ Н, *2* — $F = 10$ Н

обратно пропорционален скорости роста интенсивности нагрузки P_1. Действительно, при фиксированной длине трещины решение уравнения (4.1) имеет вид

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t) W_k(x),$$

где $W_k(x)$ — собственные функции:

$$W_k(x) = \cos(\lambda_k x) - \frac{\cos(\lambda_k l)}{\operatorname{ch}(\lambda_k l)} \operatorname{ch}(\lambda_k x),$$

$$a_k = \frac{4bP_1 \sin(\lambda_k l)}{EI\lambda_k^5 l B_k}\Big(t - \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}\Big), \qquad \omega_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho h b}}.$$

Для хрупких материалов собственные частоты велики, и второй член в скобках мал по сравнению с первым. Проведенные расчеты показали, что развитие трещины начинается, когда интенсивность нагрузки на единицу ширины балки достигает критического значе-

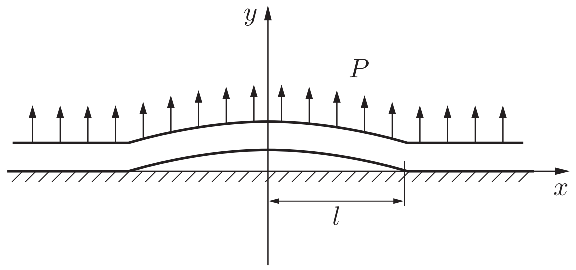

Рис. 4. Схема движения балки при растущей нагрузке

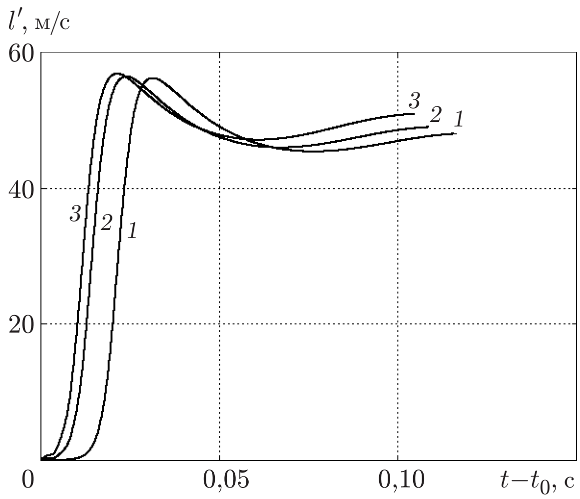

Рис. 5

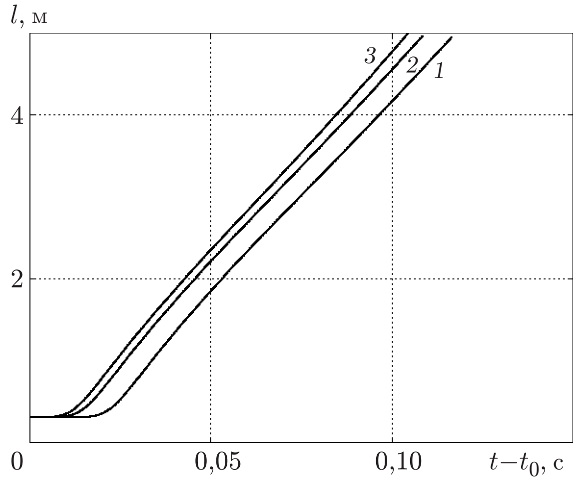

Рис. 6

Рис. 5. Зависимость скорости развития трещины от времени в случае растущей нагрузки при различных значениях скорости роста интенсивности нагрузки: *1* — $P_1 = 50$ Н/(м$^2\cdot$ с), *2* — $P_1 = 500$ Н/(м$^2\cdot$ с), *3* — $P_1 = 1500$ Н/(м$^2\cdot$ с)

Рис. 6. Зависимость длины трещины от времени $t - t_0$ при различных значениях P_1: *1* — $P_1 = 50$ Н/(м$^2\cdot$ с), *2* — $P_1 = 500$ Н/(м$^2\cdot$ с), *3* — $P_1 = 1500$ Н/(м$^2\cdot$ с)

ния $P_* = 121{,}7$ Н/м^2, соответствующего стационарному решению. Таким образом, при линейно растущей нагрузке критическое значение нагрузки, при котором начинается развитие трещины, в нестационарном случае такое же, как и в стационарном. Однако процесс развития трещины слабо зависит от скорости роста нагрузки. На рис. 5 приведена зависимость от времени $t - t_0$ (t_0 — момент времени, в который начинается развитие трещины, причем для различных значений скорости роста нагрузки значения t_0 различны) скорости роста трещины при различных значениях скорости роста интенсивности нагрузки (50, 500 и 1500 Н/(м$^2\cdot$ с)). На рис. 5 видно, что при линейно растущей нагрузке развитие трещины происходит достаточно плавно, без резких скачков. Численное решение прекращается, когда прогиб балки достигает значения, равного $0{,}1l$, и линейное приближение становится непригодным. Скорость развития трещины слабо зависит от величины P_1, так как время процесса мало и нагрузка не успевает существенно измениться. При фиксированной нагрузке резкие скачки обусловлены тем, что при развитии трещины происходит разгрузка, величина момента в кончике трещины уменьшается, а при растущей нагрузке этого не происходит. На рис. 6 приведена зависимость длины трещины от времени $t - t_0$ для различных скоростей роста интенсивности нагрузки. Видно, что длина трещины слабо зависит от скорости роста нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Слепян Л. И.** Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981.
2. **Алексеев А. Е., Демешкин А. Г.** Об отрыве балки, приклеенной к жесткой плите // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 151–158.
3. **Кургузов В. Д., Демешкин А. Г.** Об отрыве балки, частично приклеенной к жесткой плите // Изв. вузов. Стр-во. 2007. № 7. С. 4–13.
4. **Михайлов А. М.** Динамические задачи теории трещин в балочном приближении // ПМТФ. 1966. № 5. С. 167–172.
5. **Михайлов А. М.** Некоторые задачи теории трещин в балочном приближении // ПМТФ. 1967. № 5. С. 128–133.
6. **Михайлов А. М.** Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин // ПМТФ. 1969. № 3. С. 171–174.
7. **Михайлов А. М.** Распространение трещин скола в монокристаллах фтористого лития // ПМТФ. 1970. № 4. С. 119–122.
8. **Ткачева Л. А.** Нестационарная задача о распространении трещины в балочном приближении // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 177–189.
9. **Годунов С. К.** Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. М.: Наука, 1977.
10. **Петровский И. Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
11. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.

Поступила в редакцию 12/XI 2009 г.,
в окончательном варианте — 27/I 2010 г.