

УДК 622.831

**РАСЧЕТ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД В ОКРЕСТНОСТИ ОЧИСТНЫХ ВЫРАБОТОК**

В. М. Серяков

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: vser@misd.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрена постановка задачи об определении теплового и напряженно-деформированного состояния породного массива при ведении горных работ на больших глубинах. Предложен подход к определению стационарного поля температур, возникающих в районе отработки запасов полезных ископаемых с закладкой выработанного пространства твердеющими смесями, с однократным формированием матрицы жесткости расчетной системы. Установлено, что учет изменения температуры в массиве с глубиной приводит к увеличению исходных горизонтальных напряжений, а исходные вертикальные напряжения не изменяются. Метод расчета перераспределения напряженного состояния массива горных пород в ходе ведения очистных и закладочных работ, в котором на всех этапах расчета используется одна и та же матрица жесткости, модернизирован для случая учета температурных напряжений. Проведены расчеты теплового и напряженного состояний породного и закладочного массивов для одного из вариантов отработки пологопадающего рудного тела с закладкой выработанного пространства.

Месторождения, большие глубины, горные породы, температура, напряженное состояние, выработанное пространство, закладка, последовательность горных работ, расчеты, исходное напряженное состояние, матрица жесткости, этапы отработки

DOI: 10.15372/FTPRPI20230603

Переход горных работ на большие глубины приводит к необходимости разработки постановок и методов решения новых задач о механическом состоянии массива горных пород в областях отработки [1]. Один из факторов, существенно влияющий на напряженное состояние массива на больших глубинах, — температура горных пород. Согласно имеющимся данным, при удалении от земной поверхности вглубь массива на каждые 100 м его температура повышается на 3 °С [2].

Геотермический градиент (изменение температуры на каждые 100 м удаления от земной поверхности вглубь горных пород) принимает разные значения в различных точках земной коры [3, 4]: 3 °С — его среднее значение. Рассмотрение теплового и напряженного состояний массива горных пород актуально при отработке глубокозалегающих месторождений. На больших глубинах разность температур массива по сравнению с приповерхностной такова, что температурные напряжения могут составлять существенную часть общего уровня напряжений в горных породах.

Вклад термических напряжений в значение действующих в породах нормальных напряжений в соответствии с законом Дюамеля – Неймана [5, 6] определяется формулой

$$-E\alpha T(1 - 2\nu),$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного расширения пород; T — разность действующей и начальной температуры среды.

Оценка термических напряжений для песчаника на глубине 1000 м при температурном градиенте 3 °С, модуле Юнга 30 000 МПа, коэффициенте Пуассона 0.25 и коэффициенте линейного расширения $0.79 \cdot 10^{-5}$ дает около –14 МПа, что составляет почти половину давления горных пород с объемным весом 0.03 МПа/м³ на глубине 1000 м, равного –30 МПа.

Квазистатическое перераспределение напряжений в массиве горных пород, характерное для отработки месторождений полезных ископаемых, позволяет использовать несвязную постановку задачи определения теплового и напряженно-деформированного состояния (НДС) массива [5, 6]. В этом случае температурное поле влияет на распределение деформаций и напряжений в сплошной среде, а влияние процесса деформирования пород на изменение поля температур пренебрежимо мало [6]. Определение теплового и напряженно-деформированного состояний массива происходит в два этапа: на первом определяется поле температур в районе отработки запасов полезных ископаемых, на втором — НДС массива с учетом влияния температурных деформаций и напряжений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР

И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА В РАЙОНЕ ОТРАБОТКИ

В случае отсутствия в массиве горных пород сосредоточенных источников и стоков тепла в каждой точке области расчета должно выполняться нестационарное уравнение теплопроводности [7]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

здесь T — искомое значение температуры; t — время; x, y, z — координаты точки области расчета; κ — коэффициент температуропроводности среды.

Основные особенности постановки задачи расчета поля температур в районе отработки запасов полезных ископаемых можно рассмотреть на примере плоской задачи. Расчетную область в этом случае зададим прямоугольную, ось x направлена по горизонтали, ось y — по вертикали (рис. 1). Верхняя граница области может совпадать с земной поверхностью, тогда температура на ней должна быть равна температуре окружающего воздуха T_0 . На нижней границе температура пород T_1 равна расстоянию этой границы от земной поверхности с единицей измерения 100 м, умноженному на температурный градиент. На боковых границах расчетной области необходимо принять линейное распределение температуры от величины T_0 до ее значения на нижней границе расчетной области T_1 . Если одна из боковых границ представляет собой плоскость симметрии, на ней следует поставить условие $\partial T / \partial x = 0$. В момент времени $t = 0$ в каждой точке расчетной области начальное распределение температуры является линейной функцией координаты y , изменяется от T_0 до T_1 и не зависит от координаты x .

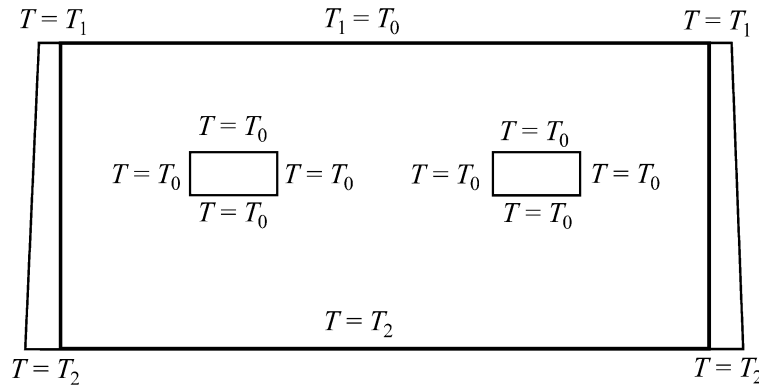


Рис. 1. Граничные условия для задачи расчета распределения температуры в массиве горных пород

Размеры расчетной области должны быть такими, чтобы тепловое действие выработок в зоне ведения горных работ не влияло на граничные значения температуры. На поверхностях создаваемых выработок в зоне ведения горных работ могут быть поставлены различные условия, их выбор зависит от особенностей теплообмена на границах выработок. Можно задавать как температуру на поверхности выработок, так и условия теплообмена массива с воздухом, содержащимся в выработках. В случае теплоизоляции поверхностей выработок принимается условие $\partial T / \partial n = 0$ (n — нормаль к контуру выработки).

После определения в расчетной области поля температур необходимо найти НДС массива горных пород, возникающего под действием внешних механических сил и температурных воздействий. Если считать, что в процессе деформирования среды справедлива линейная зависимость между деформациями и напряжениями, а также между нормальными деформациями и температурой, то физические соотношения в трехмерном случае представляют собой уравнения Дюамеля – Неймана [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))}{E} + \alpha T, & \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))}{E} + \alpha T, & \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))}{E} + \alpha T, & \varepsilon_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), (\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ — компоненты нормальных и касательных напряжений; G — модуль сдвига. Предполагается, что температура изменяется в таких пределах, при которых коэффициенты термоупругости считаются постоянными.

В случае справедливости соотношений (1) уравнения Ламе запишутся как

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u_x - K \alpha \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta u_y - K \alpha \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta u_z - K \alpha \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ — объемная деформация; Δ — оператор Лапласа; u_x, u_y, u_z — компоненты вектора перемещений.

Граничные условия на свободной от нагрузки поверхности имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= K\alpha T l, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= K\alpha T m, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= K\alpha T n,\end{aligned}\tag{3}$$

l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

Из уравнений (2), (3) следует, что температурная задача сводится к обычной задаче теории упругости при наличии объемных сил $X, Y, Z = -K\alpha (\partial T / \partial x, \partial T / \partial y, \partial T / \partial z)$ и внешнего нормального поверхностного давления интенсивности $p = K\alpha T$ [8].

РАСЧЕТЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РУДНОГО ТЕЛА, ЗАКЛАДОЧНОГО И ВМЕЩАЮЩЕГО МАССИВОВ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГОРНЫХ РАБОТ

Основная технология обработки месторождений полезных ископаемых на больших глубинах — закладка выработанного пространства закладочными смесями [9, 10]. С переходом горных работ на глубокие горизонты ее удельный вес все больше увеличивается. В таких условиях геомеханическая оценка НДС массива, выбор технологических вариантов обработки и закладки выработанного пространства должны выполняться с учетом характера распределения полей температур в районах ведения горных работ.

В [11] предложен метод и алгоритм расчета НДС горных пород, учитывающий последовательность ведения очистных и закладочных работ и дающий возможность моделировать достаточное для практических целей количество технологических операций “проходка выработки — ее закладка”. Алгоритм реализован с помощью метода конечных элементов, основная его особенность — использование на всех этапах горных работ матрицы жесткости расчетной системы, сформированной для исходного массива горных пород до его обработки.

Цель настоящей работы — установление возможности применения разработанного метода для учета влияния на НДС массива температурного фактора и оценка характера распределения полей напряжений при использовании физического закона Дюамеля — Неймана.

Расчет поля температур. Один из наиболее используемых вариантов ведения очистных и закладочных работ при выемке рудных месторождений — восходящий и нисходящий порядок формирования и закладки очистных камер. Рудное тело разбивается на ленты. Обработка рудного тела начинается с выемки разрезной ленты и развивается по горизонтали в обе стороны от нее.

На рис. 2 приведен вертикальный разрез массива вкрест простирания рудного тела. Размеры рудного тела в направлении простирания значительны, как и значительны размеры каждой из пройденных и заложенных выработок. Очистные и закладочные работы в каждой ленте и в каждом слое по вертикали занимают большой промежуток времени. В таких условиях в качестве первого этапа решения поставленной задачи правомерна оценка плоского стационарного поля температур, сформировавшегося в окрестности горных выработок, которое реализуется при больших временах протекания процесса теплообмена. При принятых предположениях стационарное распределение температуры в рассматриваемой области удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} = 0,$$

которое решается с помощью метода конечных элементов [12, 13].

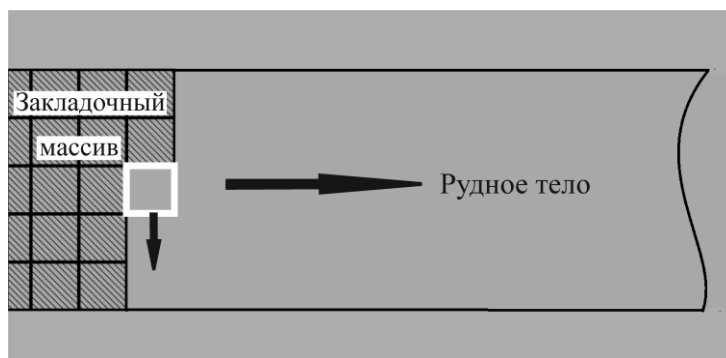


Рис. 2. Схема отработки рудного тела с нисходящим порядком выемки. Очистные работы ведутся в обе стороны от плоскости симметрии. Стрелки — направления отработки

При определении температуры должны быть выполнены краевые условия на внутренних границах пройденных выработок (рис. 1). Если для расчетов применяется метод конечных элементов, то для удовлетворения этим краевым условиям необходима разбивка расчетной области на конечные элементы с явным выделением границ выработок. При решении практических задач определения теплового и напряженного состояния массива с учетом последовательности ведения горных работ, включающих десятки и сотни технологических операций “образование выработки – ее закладка”, потребуются изменение на каждом шаге расчета матрицы жесткости расчетной системы, что приведет к большим вычислительным трудностям и реализовать такой подход можно будет лишь для небольшого числа технологических операций.

Для преодоления этих трудностей предлагается алгоритм, в котором для моделирования полей температур с учетом последовательности ведения очистных и закладочных работ формирование матрицы жесткости расчетной системы происходит один раз для ситуации, отвечающей исходному состоянию породного массива до проведения в нем выработок. Моделирование факта образования очередной выработки осуществляется путем задания во всех точках расчетной области, расположенных на ее контуре и в точках, лежащих внутри этой выработки, значения температуры, равной температуре воздуха, подающегося для проветривания. Выполнение этих условий достигается путем умножения диагональных членов матрицы жесткости в уравнениях, соответствующих узловым точкам выработок, на очень большое число, а также умножением правой части рассматриваемых уравнений на это же число и дополнительно на заданное значение температуры в данных точках [14]. Таким образом, сформированная матрица жесткости используется на всех этапах расчета поля температур. Тестовый расчет распределения температуры в массиве горных пород с явным выделением контура выработки и заданием на нем значений температуры подаваемого в выработку воздуха показал хорошее совпадение результатов с предлагаемым подходом [15].

Сетка конечных элементов, на которые разбивается расчетная область, выбирается из условий ее измельчения в местах резкого изменения как температуры, так и напряженного состояния массива, вследствие того, что она далее будет использоваться для расчета полей напряжений и деформаций. При расчетах принято, что в выработках поддерживается температура воздуха 20°C , температурный градиент 3°C , верхняя граница рудного тела расположена на глубине 700 м, размеры очистных выработок 8×8 м.

Расчеты распределения температуры проведены для начального периода отработки при выемке запасов в разрезной и близлежащих лентах и при развитии фронта очистных работ. На рис. 3 показаны изолинии температурного поля для первого, второго, пятого и десятого

этапов отработки. Поддержание в выработках температуры, равной 20°C , приводит к понижению температуры горных пород в районе ведения очистных и закладочных работ. На расстояниях до 50 м от пройденных и заложённых выработок температура пород не превышает 30°C (исходная температура массива на верхней границе рудного тела 41°C). На распределении температуры сказывается взаимное влияние выработок, пройденных в разные стороны от разрезной ленты, что видно из расположения изолинии со значением 22.5°C .

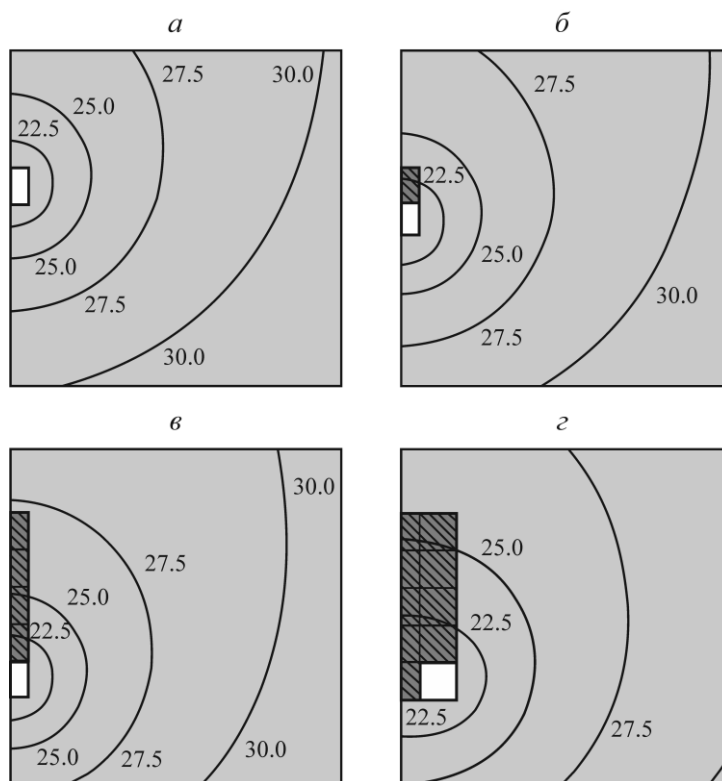


Рис. 3. Распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) в породном массиве в районе ведения горных работ после первого (а), второго (б), пятого (в) и десятого (г) этапов отработки рудного тела

Следующая серия расчетов выполнена для оценки характера перераспределения поля температур в породном и закладочном массивах по мере продвижения фронтов очистных работ в обе стороны от разрезной ленты. На рис. 4 представлены изолинии температуры после 20 и 40 этапов отработки. Полупролеты отработки составляют 28 и 60 м. В начальный период продвижения фронтов очистных работ (при полупролете до 40 м) на распределение температуры в закладочном массиве и в окрестности выработок влияет близкое расположение фронтов развития очистных работ, ведущихся в разные стороны от разрезного слоя. Во всем закладочном массиве температура пород меньше 28°C (рис. 4а). При увеличении пролета отработки картина распределения изолиний температур перед фронтом очистных работ остается прежней и лишь смещается согласно его развитию. При пролете отработки более 50 м выработки очистных фронтов практически не влияют друг на друга (рис. 4б). Поддержание в них постоянной температуры влияет лишь на области вмещающего и закладочного массивов, находящихся в непосредственной окрестности выработок. За фронтом работ во вмещающем и закладочном массивах начинается повышение температуры (это видно по расположению изолинии температуры 25.0°C), изолиния со значением 22.5°C охватывает только непосредственную окрестность выработок.

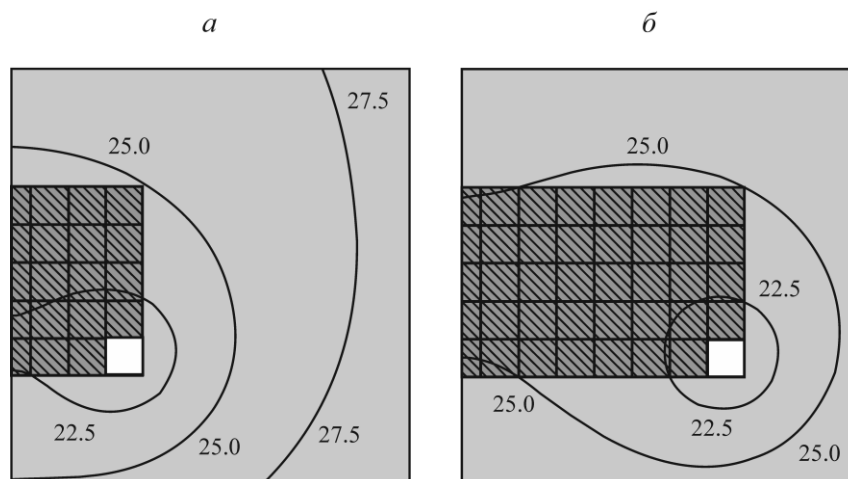


Рис. 4. Распределение температуры (°C) в породном массиве в окрестности ведения горных работ при полупролетах отработки 28 и 60 м

Исходное напряженное состояние массива при учете изменения температуры с удалением от земной поверхности вглубь массива. Зная распределение поля температур во всей расчетной области, можно определить НДС сплошной среды, используя соотношения (2), (3). В этом случае при нахождении напряжений и деформаций необходимо учесть дополнительные массовые силы $X, Y, Z = -K\alpha (\partial T / \partial x, \partial T / \partial y, \partial T / \partial z)$ и внешнее нормальное поверхностное давление интенсивностью $p = K\alpha T$. В задачах расчета НДС массива горных пород в областях отработки полезных ископаемых массовые силы, вызванные температурным воздействием, добавляются к гравитационным силам. Внешнее нормальное поверхностное воздействие за счет температуры суммируется на границах расчетной области с горизонтальными усилиями, возникающими за счет действия тектонических сил.

Оценим влияние геотермического градиента на исходное напряженное состояние массива. Такую оценку можно выполнить без привлечения программного комплекса, учитывающего последовательность ведения очистных и закладочных работ. Исходное напряженное состояние массива найдено при следующих предположениях. Область расчета принята однородной и во всех точках имеет одни и те же тепловые и механические свойства; выработки отсутствуют. Краевые условия для нахождения поля температур аналогичны крайним условиям, приведенным на рис. 1. При решении механической задачи верхняя горизонтальная граница расчетной области свободна от действия внешней нагрузки. На нижней горизонтальной границе задавались нулевыми вертикальная компонента вектора смещений v и касательная компонента тензора напряжений τ_{xy} , на боковых границах — горизонтальная компонента вектора перемещения u и касательная компонента тензора напряжений τ_{xy} . Объемный вес горных пород 0.03 МН/м^3 , их механические свойства: модуль Юнга $E = 25\,000 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$.

На рис. 5 приведены изолинии исходных горизонтальных и вертикальных напряжений для вариантов, учитывающих и не учитывающих поле температур. Учет влияния поля температур на исходные горизонтальные напряжения показывает их рост. Вертикальные напряжения для обоих вариантов расчета остаются одни и те же, температура на них не влияет. Эти выводы

соответствуют теоретическим результатам [16], где приведены аналитические выражения для вертикальных и горизонтальных компонент исходного поля напряжений при учете влияния температуры в случае гравитационного распределения исходных механических напряжений.

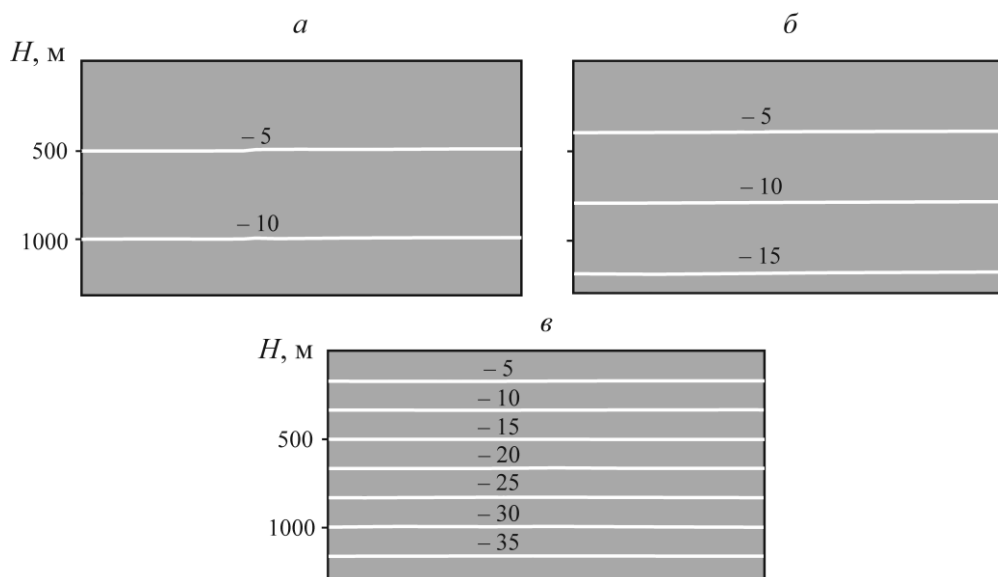


Рис. 5. Распределение исходных горизонтальных напряжений в породном массиве: *a*, *б* — без учета и с учетом температурных напряжений; *в* — распределение исходных вертикальных напряжений для обоих вариантов расчета; H — глубина горных работ

Можно высказать предположение, что при одном и том же геотермическом градиенте вклад температурного поля в горизонтальные напряжения будет один и тот же для любого коэффициента бокового распора, определяющего тектоническое воздействие, а увеличение геотермического градиента приведет к более значительному влиянию температурного поля на исходные горизонтальные сжимающие напряжения породного массива. Такие расчеты планируется провести в дальнейшем.

Термоупругие напряжения в области ведения горных работ с применением твердеющей закладки. Расчет напряженного состояния массива горных пород выполнен для варианта отработки рудного тела с нисходящим порядком выемки (рис. 2). Рудное тело имеет мощность 40 м. В этом случае одна лента отрабатывается за пять этапов. Сначала рассматривалась ситуация, складывающаяся в начальный период отработки рудного тела: выемка разрезной и близлежащих к ней лент. На рис. 6 показаны распределения вертикальных и горизонтальных напряжений после проходки первой выработки в разрезной ленте. Для сравнения приведены аналогичные компоненты для варианта, не учитывающего температурные слагаемые в законе Дюамеля – Неймана. Значительных качественных изменений в характер распределения напряжений в окрестности выработки температурное воздействие не вносит. Увеличение уровня исходных горизонтальных напряжений в случае учета температурного градиента приводит к существенному росту горизонтальных и вертикальных напряжений вблизи границ выработки. Увеличиваются размеры зоны опорного давления и напряжения в ней (рис. 6*a*), повышается уровень сжатия в областях концентрации горизонтальных напряжений (рис. 6*б*).

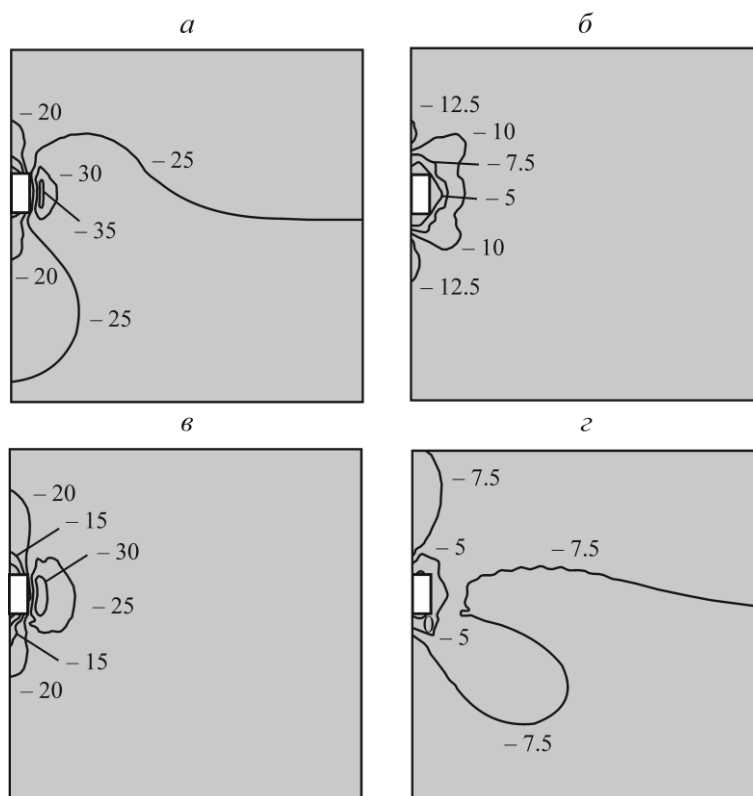


Рис. 6. Распределение вертикальных (*а, в*) и горизонтальных (*б, г*) напряжений в массиве горных пород после проходки первой выработки в разрезной ленте при учете (*а, б*) и без учета (*в, г*) температурного воздействия

На рис. 7 представлено распределение нормальных напряжений после шестого этапа проведения очистных и закладочных работ: проходка первой выработки в следующем после разрезного слое. В зоне опорного давления в окрестности вертикальной границы пройденной выработки продолжается рост напряжений сжатия (рис. 7*а*), формируется еще одна зона опорного давления, располагающаяся в рудном теле перед последней заложеной выработкой в разрезной ленте. Продолжается рост горизонтальных сжимающих напряжений вблизи контактов отработанной части рудного тела с вмещающими породами (рис. 7*б*). Закладочный массив находится под действием незначительных сжимающих напряжений.

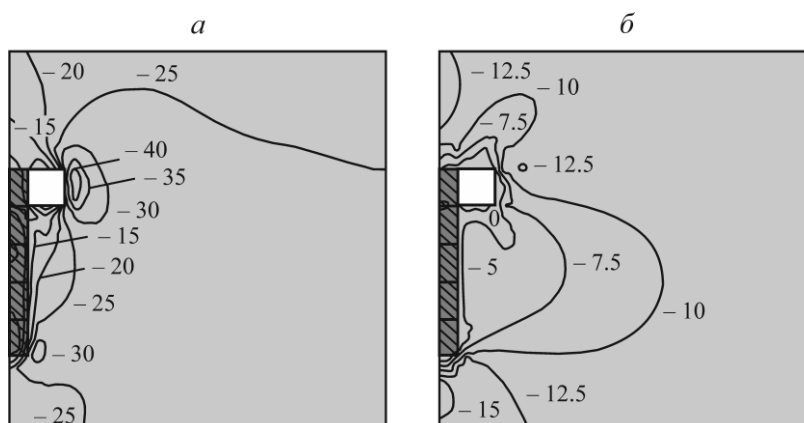


Рис. 7. Распределение вертикальных (*а*) и горизонтальных (*б*) напряжений в массиве горных пород после проходки первой выработки в следующей после разрезной ленте

Практический и теоретический интерес представляет вопрос установления характера изменения НДС массива с развитием очистных и закладочных работ. Выполнены расчеты с изменяющимися параметрами полупролета отработки. На рис. 8 приведены изолинии вертикальных и горизонтальных напряжений при полупролете 60 м, что соответствует 40 этапу ведения очистных и закладочных работ. Перед фронтом очистных работ в районе контактов рудного тела с вмещающими породами формируются зоны концентрации сжимающих вертикальных и горизонтальных напряжений. С увеличением пролета отработки продолжается рост сжимающих напряжений, причем вертикальные напряжения почти в 2 раза больше горизонтальных.

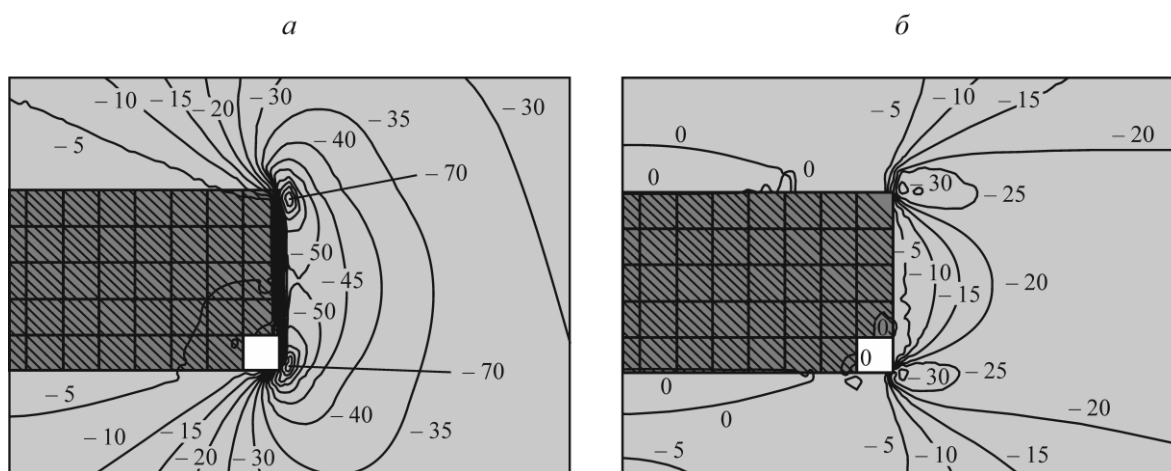


Рис. 8. Распределение вертикальных (а) и горизонтальных (б) напряжений в массиве горных пород при полупролете отработки 60 м

Закладочный массив находится в слабонагруженном состоянии, уровень сжимающих напряжений в нем не превышает -5 МПа. С развитием фронта очистных работ в кровле и почве закладочного массива формируются зоны действия растягивающих горизонтальных напряжений, значения которых незначительно увеличиваются.

ВЫВОДЫ

Предложена постановка задачи определения температурного поля в массиве горных пород, возникающего при ведении очистных и закладочных работ.

Разработан алгоритм расчета стационарного поля температур, в котором на всех этапах развития очистных и закладочных работ используется матрица жесткости системы, формируемая для исходного массива горных пород до начала отработки.

Учет влияния поля температур на исходное напряженное состояние однородного массива горных пород приводит к повышению в нем уровня сжимающих горизонтальных напряжений.

При расчете напряженного состояния массива горных пород для варианта отработки рудного тела с нисходящим порядком выемки и закладки увеличение уровня исходных горизонтальных напряжений в случае учета температурного градиента приводит к росту перед фронтом горных работ как горизонтальных, так и вертикальных сжимающих напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курленя М. В. Актуальные направления и задачи исследований освоения месторождений полезных ископаемых глубокого залегания в условиях Сибири и Дальнего Востока // ФТПРПИ. — 2021. — № 4. — С. 3–10.
2. Гончаров С. А. Термодинамика. — М.: МГГУ, 2002. — 440 с.
3. Ботт М. Внутреннее строение Земли. — М.: Мир, 1974. — 376 с.
4. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли. — М.: Недра, 1965. — 379 с.
5. Подстригач Я. С. Теплоупругость тел неоднородной структуры. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
6. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964. — 517 с.
7. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высш. шк., 1967. — 599 с.
8. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. — М.: Высш. шк., 1966. — 229 с.
9. Волков Е. П., Анушенков А. Н. Разработка технологии закладки горных выработок литыми твердеющими смесями на основе хвостов обогащения. — Красноярск: СФУ, 2020. — 176 с.
10. Монтянова А. Н. Формирование закладочных массивов при разработке алмазных месторождений в криолитозоне. — М.: Горн. кн., 2005. — 597 с.
11. Серяков В. М. Расчет напряженного состояния горных пород с учетом последовательности отработки и закладки рудных тел на больших глубинах // ФТПРПИ. — 2021. — № 6. — С. 18–26.
12. Норри Д., Фриз Д. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981. — 304 с.
13. Подгорный С. А., Меретуков З. А., Кошевой Е. П., Косачев В. С. Метод конечных элементов в решении задач теплопроводности // Вестн. Воронежского гос. ун-та инженерных технологий. — 2013. — № 2. — С. 10–15.
14. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 542 с.
15. Серяков В. М. Разработка алгоритмов решения задач теплопроводности для расчетов напряженного состояния массива с учетом последовательности ведения очистных и закладочных работ // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2022. — Т. 9. — № 3. — С. 54–59.
16. Петроченков Р. Г. Отношение вертикального и горизонтального напряжений в однородном массиве горных пород с учетом температурных напряжений // ГИАБ. — 2000. — Вып. 10. — С. 61–68.

Поступила в редакцию 03/XI 2023

После доработки 14/XI 2023

Принята к публикации 16/XI 2023