ПМТФ, № 1, 1961

ДВИЖЕНИЕ В ТРУБЕ ПОТОКА ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНИХ СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

В. М. Сарычев

(Новосибирск)

Задача о движении в трубе потока частично ионизованного газа во внешних постоянных скрещенных электрических и магнитных полях при некоторых предположениях рассматривается методом элементарной теории плазмы. Находятся скорость дрейфа и температура заряженных частиц, плотность тока, электрические и магнитные поля в плазме, силы, действующие на заряженные частицы, диссипация энергии заряженных частиц. Определяются условия максимума действующей на плазму объемной силы и подводимой к плазме удельной мощности. Устанавливаются условия применимости одномерной теории.

Движение в трубе потока ионизованного газа при наличии постоянных скрещенных электрических и магнитных полей рассматривалось в предположении применимости сплошных сред [1,2,3].

Это предположение очень сильное. Поэтому представляет интерес рассмотреть данную задачу с учетом молекулярной структуры плазмы. Ограничимся здесь приближением элементарной теории плазмы [4].

1. Система уравнений. Если влиянием стенок можно пренебречь, то уравнения движения и энергии для единичного объема плазмы записываются таким образом:

$$\sum_k \left[n_k m_k \frac{d\mathbf{u}_k}{dt} - n_k e_k \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_k \times \mathbf{H}] \right) + \operatorname{grad} p_k \right] = 0 \tag{1.1}$$

$$\sum_k \left\{ n_k \frac{dw_k}{dt} - \left[n_k e_k \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_k \times \mathbf{H}] \right) - \operatorname{grad} p_k \right] \mathbf{u}_k \right\} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь e_k, m_k, n_k, $\mathbf{u}_k$, w_k, p_k — соответственно заряд, масса, плотность, средняя направленная скорость, полная энергия и парциальное давление частиц указанного индекса; t, c — соответственно время и скорость света; $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей в плазме. Суммирование проводится по всем составляющим плазму компонентам. Магнитная и диэлектрическая проницаемости μ и ε для плазмы принимаются равными их значениям для вакуума.

Так как обычно энергия взаимодействия между частицами пренебрежимо мала по сравнению с их кинетической энергией, то

$$p_k = n_k k T_k \qquad \left(T_k = \frac{2}{3k} \frac{m_k v_k^2}{2} \right) \tag{1.3}$$

Здесь k — постоянная Больцмана, T_k — эффективная температура и v_k — хаотическая скорость частиц соответствующего индекса.

Если влиянием реакций в плазме и неоднородностей полей [5] на движение и энергию частиц можно пренебречь, то уравнения движения и энергии для отдельных компонент плазмы, отнесенные к единичному объему, можно записать так

$$n_k m_k \frac{d\mathbf{u}_k}{dt} = n_k e_e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_k \times \mathbf{H}]\right) - \operatorname{grad} p_k - n_k m_k \sum_l \nu_{kl}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_l) \quad (1.4)$$

$$n_k \frac{d}{dt}\left(\frac{m_k u_k^2}{2} + \frac{3}{2} kT_k\right) = \left[n_k e_k\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_k \times \mathbf{H}]\right) - \operatorname{grad} p_k\right]\mathbf{u}_k -$$
$$- n_k \sum_l \varkappa_{kl} \nu_{kl}\left[\frac{m_k u_k^2}{2} - \frac{m_l u_l^2}{2} + \frac{3}{2} k(T_k - T_l)\right] \quad (1.5)$$

Здесь $\nu_{kl} = \tau_{kl}^{-1}$, τ_{kl} — среднее время, в течение которого частица индекса k теряет импульс $m_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_l)$ вследствие взаимодействия с частицами индекса l; $\varkappa_{kl}$ — средняя относительная доля энергии, теряемая частицей k при взаимодействиях с частицами l за время τ_{kl}. Так как

$$n_k m_k \nu_{kl}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_l) = - n_l m_l \nu_{lk}(\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_k)$$

$$n_k \varkappa_{kl} \nu_{kl}\left[\frac{m_k u_k^2}{2} - \frac{m_l u_l^2}{2} + \frac{3}{2} k(T_k - T_l)\right] =$$
$$= - n_l \varkappa_{lk} \nu_{lk}\left[\frac{m_l u_l^2}{2} - \frac{m_k u_k^2}{2} + \frac{3}{2} k(T_l - T_k)\right]$$

то

$$m_k \frac{\nu_{kl}}{n_l} = m_l \frac{\nu_{lk}}{n_k}, \qquad \frac{\varkappa_{kl}}{m_k} = \frac{\varkappa_{lk}}{m_l} \quad (1.6)$$

Уравнение (1.5) можно преобразовать при помощи (1.4) к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2} kT_k\right) = \sum_l \left\{\nu_{kl} m_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_l)\mathbf{u}_k - \varkappa_{kl}\nu_{kl}\left[\frac{m_k u_k^2}{2} - \frac{m_l u_l^2}{2} + \frac{3}{2} k(T_k - T_l)\right]\right\} \quad (1.7)$$

Если $\varkappa_{kl}\nu_{kl} \neq 0$, то из (1.7) следует, что смесь газов с разными молекулярными весами не может находиться в равновесии, если ее компоненты имеют одинаковые температуры и средние направленные скорости.

Внешние электрические $\mathbf{E}_+$ и магнитные $\mathbf{H}_+$ поля и поля в плазме $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_+ = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_+ = 0 \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_+ = 0 \quad (1.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad \left(\mathbf{j} = \sum_k e_k n_k \mathbf{u}_k\right) \quad (1.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.11)$$

(Токи смещения здесь не учитываются.) Для получения замкнутой системы к уравнениям (1.4), (1.7), (1.8)—(1.11) необходимо присоединить уравнения для определения плотностей компонент плазмы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим случай, когда скорость нейтрального газа $\mathbf{u}_n$ имеет составляющую только по оси x, совпадающей с осью трубы, а плотность тока в плазме $\mathbf{j}$ и напряженность магнитного поля в плазме $\mathbf{H}$ соответственно по осям y и z, образующих вместе с осью x ортогональную систему. Все переменные предполагаются функциями одной только координаты x. Ниже будут установлены условия выполнения этих предположений.

Для простоты ограничимся рассмотрением трехкомпонентной плазмы, состоящей из нейтральных частиц, однократных положительных ионов и электронов. Плотность заряженных частиц предполагается настолько большой, чтобы с достаточной степенью точности выполнялись условия

$$D \ll l\left(D \equiv \left[\frac{kT_e kT_i}{4\pi e^2 n_i (kT_e + kT_i)}\right]^{1/2}\right), \qquad n_i = n_e = n_\varepsilon \tag{2.1}$$

Здесь D — дебаевский радиус, l — характерный размер сечения трубы. Так как по предположению

$$j_x = 0, \qquad e_i = -e_e = e, \qquad n_i = n_e$$

то

$$u_{ix} = u_{ex} \equiv u_{\varepsilon x} \tag{2.2}$$

В дальнейшем ограничимся простым случаем, когда членами, содержащими производную по времени, в уравнениях (1.4) и (1.7) для заряженных частиц можно пренебречь. Параметры плазмы ν_{kl} и $\varkappa_{kl}$ считаются известными. Их можно определять экспериментально или получать при помощи кинетической теории как функции сечений взаимодействий q_{kl} [4]. Последние, в свою очередь, могут определяться экспериментально или рассчитываться методами квантовой теории.

3. **Взаимодействие перпендикулярных один к другому потока плазмы, тока проводимости и магнитного поля.** Ограничимся случаем, когда инерциальными членами в уравнениях движения заряженных частиц (1.4) можно пренебречь. Переходя к системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{u}_n$ относительно лабораторной системы координат и вводя гиромагнитную частоту

$$\omega_\varepsilon \equiv \frac{e\,|H|}{m_\varepsilon c}$$

перепишем уравнение (1.4) для заряженных частиц в таком виде

$$\frac{c}{|H|}\left(\mathbf{E}^* - \frac{1}{e_\varepsilon n_\varepsilon}\operatorname{grad} p_\varepsilon\right) + \frac{[\mathbf{u}_\varepsilon^* \times \mathbf{H}]}{|H|} = \frac{e_\varepsilon}{e}\frac{1}{\omega_\varepsilon}\left[\nu_{\varepsilon\zeta}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_\zeta) + \nu_{\varepsilon n}\mathbf{u}_\varepsilon^*\right] \tag{3.1}$$

$$\left(\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_n \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{u}_\varepsilon^* = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_n\right)$$

Здесь индекс ζ относится к заряженным частицам, имеющим знак, противоположный частицам ε. Здесь предполагается, что $u_n^2 \ll c^2$. Разрешая это уравнение относительно u_ε^* и используя (1.6) и (2.2), получим

$$\frac{u_{\varepsilon x}^*}{u_n} = \frac{A - \xi B}{1 + \xi}\frac{H}{|H|}, \qquad \frac{u_{\varepsilon y}}{u_n} = \frac{e_\varepsilon}{e}\frac{\nu_{\zeta n}}{\omega_\zeta}\frac{A + B}{1 + \xi} \tag{3.2}$$

Здесь

$$A \equiv \frac{cE_y^*}{u_n|H|} = \frac{cE_y}{u_n|H|} - \frac{H}{|H|}, \qquad B \equiv \frac{cH}{en_\varepsilon u_n H^2}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i} + \frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)^{-1}\frac{d(p_i + p_e)}{dx}$$

$$\xi \equiv \frac{\nu_{in}}{\omega_i}\frac{\nu_{en}}{\omega_e} + \frac{\nu_{ei}}{\omega_e}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i} + \frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right) \tag{3.3}$$

Если магнитные и электрические поля отсутствуют, то

$$u_{\varepsilon x}^* = (m_i\nu_{in} + m_e\nu_{en})^{-1}\frac{1}{n_\varepsilon}\frac{d(p_i + p_e)}{dx}, \qquad u_{\varepsilon x}^* = 0, \qquad \text{если} \quad \xi = \frac{A}{B}$$

В соответствии с (3.2)

$$j = en_\varepsilon u_n\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i} + \frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\frac{A + B}{1 + \xi} = \sigma E_y^*\left(1 + \frac{B}{A}\right) \tag{3.4}$$

Здесь

$$\sigma = \frac{en_\varepsilon c}{|H|}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i} + \frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\frac{1}{1+\xi} \tag{3.5}$$

Отметим

$$j = 0 \quad \text{при } A = -B, \qquad j = en_\varepsilon u_n\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i} + \frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\frac{B}{1+\xi} \quad \text{при } A = 0$$

В случае $\xi \gg 1$ плазму можно считать изотропной. Заметим, что

$$\sigma = \frac{e^2 n_\varepsilon}{m_e \nu_e} \quad \text{при } m_i \nu_{in} \gg m_e \nu_{en}$$

Если $\xi \lesssim 1$, то плазма существенно анизотропна. В случае $\xi \ll 1$ взаимодействиями между частицами в плазме можно пренебречь; при этом

$$u_{\varepsilon x}^* = u_{\varepsilon x\,\max}^* = Au_n = \frac{cE_y^*}{|H|}$$

Составляя отношение электронной и ионной компонент плотности тока, получим

$$\frac{j_e}{j_i} = \frac{u_{ey}}{u_{iy}} = \frac{\nu_{in}}{\omega_i} \Big/ \frac{\nu_{en}}{\omega_e} = \frac{m_i \nu_{in}}{m_e \nu_{en}} \tag{3.6}$$

Интересно отметить, что излагаемый метод применим для рассмотрения смесей нейтральных газов. Например, в случае бинарной смеси газов a и b, если для компоненты a можно пренебречь инерциальным членом в уравнении движения, то

$$u_a - u_b = -\frac{1}{n_a m_a \nu_{ab}}\frac{dp_a}{dx}$$

Условие (2.2) приводит к зависимости продольной составляющей электрического поля E_x от поперечной составляющей E_y^*. Разрешая уравнение (3.1) относительно E_x, получим

$$\frac{E_x}{E_y^*} = \frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i} - \frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\left(1 + \frac{1-\xi}{2}\frac{B}{A} + \frac{1+\xi}{2}\frac{G}{A}\right)\frac{H}{|H|} \tag{3.7}$$

Здесь

$$G \equiv \frac{cH}{en_\varepsilon u_n H^2}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i} - \frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)^{-1}\frac{d(p_i - p_e)}{dx}$$

Составляющая E_x возникает аналогично напряжению Холла в твердых проводниках; она образуется в начальный период при неустановившемся движении заряженных частиц. В этот период электроны, обладая большей подвижностью, чем ионы, опережают последние при движении вдоль трубы; в результате образуются объемные заряды. Этот процесс происходит до тех пор, пока электрическое поле E_x, образованное этими зарядами, не выравняет продольные составляющие скоростей электронов и ионов.

Так как по предположению $j_x = 0$, то часть продольной составляющей напряженности электрического поля

$$\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i} + \frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\frac{H}{|H|}$$

не связанная с градиентами давления заряженных частиц, в целом работы над плазмой не совершает. Работа, совершаемая этим полем над ионами, равна работе, совершаемой против этого поля электронами. Таким образом, эта часть продольной составляющей электрического поля перераспределяет подводимую к заряженным частицам мощность между электронами и ионами. Из (1.4), (3.2), и (3.7) легко найти действующие на заряженные частицы активные силы

$$F_{\varepsilon x}=\frac{eE_y^*}{1+\xi}\left[\frac{\nu_{\varepsilon n}}{\omega_\varepsilon}\left(1+\frac{B}{A}\right)-\frac{1+\xi}{2}\left(\frac{\nu_{\varepsilon n}}{\omega_\varepsilon}-\frac{\nu_{\zeta n}}{\omega_\zeta}\right)\frac{B-G}{A}\right]\frac{H}{|H|}-\frac{1}{n_\varepsilon}\frac{dp_\varepsilon}{dx} \qquad (3.8)$$

$$F_{\varepsilon y}=e_\varepsilon E_y^*\frac{\xi}{1+\xi}\left(1+\frac{B}{A}\right) \qquad (3.9)$$

Действующая на плазму объемная сила

$$\mathbf{F}=\sum_k n_k\mathbf{F}_k=F_x=\frac{n_\varepsilon eE_y^*}{1+\xi}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i}+\frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\left(1-\xi\frac{B}{A}\right)\frac{H}{|H|}-\frac{dp_n}{dx}=$$

$$=\frac{jH}{c}-\frac{dp}{dx}\qquad \left(p=\sum_k p_k\right) \qquad (3.10)$$

Уравнение движения для единичного объема плазмы имеет вид

$$n_n m_n u_n\frac{du_n}{dx}=-\frac{dp}{dx}+\frac{jH}{c}$$

или в безразмерном виде

$$\frac{l}{u_n}\frac{du_n}{dx}=P\frac{l}{p_n}\frac{dp_n}{dx}+\frac{L}{1+\xi}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i}+\frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\left(1-\xi\frac{B}{A}\right)\frac{H}{|H|}$$

$$\left(P=\frac{p_n}{n_n m_n u_n^2},\ L=\frac{n_\varepsilon eE_y^*l}{n_n m_n u_n^2}\right) \qquad (3.11)$$

Подводимая к единичному объему плазмы мощность

$$N=n_\varepsilon\sum_\varepsilon(\mathbf{F}_\varepsilon\cdot\mathbf{u}_\varepsilon)=\frac{n_\varepsilon eE_y^*u_n}{1+\xi}\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i}+\frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\left(1+\frac{B}{A}\right)\left(A+\frac{H}{|H|}\right)=jE_y \qquad (3.12)$$

Отсюда следует, что при

$$(A+B)\left(A+\frac{H}{|H|}\right)>0$$

к плазме подводится энергия от внешнего электрического поля, а при

$$(A+B)\left(A+\frac{H}{|H|}\right)<0$$

происходит преобразование энергии плазмы в электрическую энергию.

Диссипация энергии заряженных частиц, происходящая в единице объема плазмы за единицу времени (3.13)

$$N_-=\frac{n_\varepsilon eE_y^*u_n}{1+\xi}A\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i}+\frac{\nu_{en}}{\omega_e}\right)\left[1+\xi\left(\frac{B}{A}\right)^2\right]=\frac{j^2}{\sigma}-j\frac{u_n|H|}{c}B\left(1+\frac{A-\xi B}{A+B}\right)$$

Из (3.12) и (3.13) имеем

$$\frac{N_-}{N}=\left(A+\frac{H}{|H|}\right)^{-1}\frac{A^2+\xi B^2}{A+B} \qquad (3.14)$$

Если $\nu_{\varepsilon l}$ и dp_k/dx не зависят от H, то при заданных n_ε, E_y^* и u_n легко определить условия максимума величин E_x, F и N. Имеем

$$|E_x|=|E_{x\max}|,\quad |F|=|F_{\max}|\ \text{при}\ \xi=\frac{A}{A+2B}$$

$$N=N_{\max}\ \text{при}\ \xi=\frac{1+B+2A}{1+B+2B/A}$$

Рассмотрим уравнение (1.7) для заряженных частиц и ограничимся случаем, когда членом, зависящим от времени, можно пренебречь. Тогда оно преобразуется к виду

$$\frac{T_\varepsilon}{T_n}-\frac{\nu_{\varepsilon\zeta}\varkappa_{\varepsilon\zeta}}{\nu_\varepsilon\varkappa_\varepsilon}\frac{T_\zeta}{T_n}-\frac{\nu_{\varepsilon n}\varkappa_{\varepsilon n}}{\nu_\varepsilon\varkappa_\varepsilon}=\frac{\gamma M_n^2}{3}\left[\frac{m_\varepsilon}{m_n}\left(\frac{2}{\varkappa_\varepsilon}-1\right)\left(\frac{u_\varepsilon}{u_n}\right)^2+\frac{\nu_{\varepsilon\zeta}}{\nu_\varepsilon}\frac{\varkappa_{\varepsilon\zeta}}{\varkappa_\varepsilon}\frac{m_\zeta}{m_n}\left(\frac{u_\zeta}{u_n}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu_{\varepsilon n}\varkappa_{\varepsilon n}}{\nu_\varepsilon\varkappa_\varepsilon}-\frac{2}{\varkappa_\varepsilon}\frac{\nu_{\varepsilon\zeta}}{\nu_\varepsilon}\frac{m_\varepsilon}{m_n}\frac{\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\mathbf{u}_\zeta}{u_n^2}-\frac{2}{\varkappa_\varepsilon}\frac{\nu_{\varepsilon n}}{\nu_\varepsilon}\frac{m_\varepsilon}{m_n}\frac{u_{\varepsilon x}}{u_n}\right] \qquad (3.15)$$

Здесь

$$\nu_\varepsilon=\nu_{\varepsilon\zeta}+\nu_{\varepsilon n}; \qquad \varkappa_\varepsilon=\frac{\varkappa_{\varepsilon\zeta}\nu_{\varepsilon\zeta}+\varkappa_{\varepsilon n}\nu_{\varepsilon n}}{\nu_\varepsilon}, \qquad \gamma M_n^2=\frac{m_n u_n^2}{kT_n}$$

Для нейтральных частиц из (1.7) соответственно получим (3.16)

$$AL^{-1}\frac{l}{T_n}\frac{d'T_n}{dx}=\sum_\varepsilon\frac{\nu_{\varepsilon n}}{\omega_\varepsilon}\frac{m_n}{m_\varepsilon}\varkappa_{\varepsilon n}\left[\frac{T_\varepsilon}{T_n}-1-\frac{\gamma M_n^2}{3}\left\{1-\frac{m_\varepsilon}{m_n}\left[\left(\frac{u_\varepsilon}{u_n}\right)^2+\frac{2}{\varkappa_{\varepsilon n}}\left(1+\frac{u_{\varepsilon x}}{u_n}\right)\right]\right\}\right]$$

Обычно с достаточной степенью точности $T_i=T_n$. (Критерий выполнения этого условия легко найти из (3.15).) Учитывая, что $\varkappa_e\leqslant 1$ и обычно $u_e\gg u_n$, получим для T_e уравнение (3.17)

$$\frac{T_e}{T_n}=1+\frac{\gamma M_n^2}{3\varkappa_e}\frac{2m_e}{m_n}\left(\frac{u_e}{u_n}\right)^2=1+\frac{2}{\varkappa_e}\frac{m_e}{m_n}\frac{\gamma M_n^2}{3}\frac{1}{(1+\xi)^2}\left[(A-\xi B)^2+\left(\frac{\nu_{in}}{\omega_i}\right)^2(A+B)^2\right]$$

Так как $A\sim 1/u_n$ и $B\sim 1/u_n$, то T_e не зависит от u_n.)

Рассмотрим уравнения Максвелла. Из (1.8) и (1.10) имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}-\operatorname{rot}\mathbf{H}_+=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

Подставляя сюда выражения для $\mathbf{j}$ из (3.4) и преобразуя к безразмерному виду, получим

$$\frac{l}{|H|}\frac{d(H-H_+)}{dx}=-(A+B)R_m \qquad \left(R_m=\frac{4\pi\sigma u_n l}{c^2}\right)$$

Здесь R_m — магнитное число Рейнольдса. Если $\partial H_+/\partial x\neq 0$, то

$$\frac{l}{|H|}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{l}{|H|}\frac{\partial H_+}{\partial x}-(A+B)R_m \qquad (3.18)$$

Из (1.9) и (1.11) имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}-\operatorname{rot}\mathbf{E}_+=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

Переходя к подвижной системе и используя (3.18), получим

$$\frac{l}{E_y^*}\frac{\partial(E_y^*-E_{+y}^*)}{\partial x}--\frac{l}{A|H|}\frac{\partial H_+}{\partial x}+\left(1+\frac{B}{A}\right)R_m$$

Если $\dfrac{\partial E_{+y}^*}{\partial x}\neq 0$, то

$$\frac{l}{E_y^*}\frac{\partial E_y^*}{\partial x}=\frac{l}{E_y^*}\frac{\partial E_{+y}^*}{\partial x}-\frac{l}{A|H|}\frac{\partial H_+}{\partial x}+\left(1+\frac{B}{A}\right)R_m \qquad (3.19)$$

Уравнение сохранения массы для плазмы в целом можно представить в следующем виде

$$\frac{d}{dx}[S(n_\varepsilon u_{\varepsilon x}+n_n u_n)]=0 \qquad (3.20)$$

где S — площадь поперечного сечения трубы, или

$$\frac{1}{ln_n u_n}\frac{d}{dx}\left\{Sn_n u_n\left[\frac{n_\varepsilon}{n_n}\left(\frac{u_{\varepsilon x}^*}{u_n}+1\right)+1\right]\right\}=0 \qquad (3.21)$$

4. Условия применимости одномерной теории. Движение нейтрального газа можно считать квазиодномерным, если

$$\frac{dl}{dx} \ll 1, \qquad \frac{n_\varepsilon}{n_n}\frac{u_{iy}}{u_n} \ll 1$$

Найдем условия однородности поперечной составляющей электрического поля в направлении тока ($dE_y^* / dy = 0$) в предположении, что влияние градиентов температур dT_k / dy на поле пренебрежимо мало, диффузионными токами можно пренебречь и магнитное поле однородно по сечению трубы. При этих условиях плотность тока в плазме можно разложить на следующие составляющие:

1) плотность тока, образованная электронами, эмиттирующими с катода;

2) плотность тока, образованная ионами, эмиттирующими с анода;

3) плотность тока, образованная электронами, рождающимися в плазме;

4) плотность тока, образованная ионами, рождающимися в плазме.

При установившемся движении третья и четвертая компоненты плотности тока должны быть равны. Из (3.6) и $m_i\nu_{in} \neq m_e\nu_{en}$ следует, что это возможно только при отсутствии этих составляющих плотности тока. (При наличии больших токов диффузии эти компоненты могут быть не равными нулю. Но для этого требуется сильно неоднородное поле, которое здесь не рассматривается.) Следовательно, при наших предположениях ток в плазме равен токам эмиссии с электродов. Однородность поперечной составляющей электрического поля E_y^* будет обеспечена, если токи эмиссии будут удовлетворять уравнениям (3.4), (3.6). Из рассмотренных выше уравнений Максвелла следует, что

$$|H_{+x}| \ll |H_{+z}|, \quad \text{если} \quad \left|\frac{l}{2H_{+z}}\frac{\partial H_{+z}}{\partial x}\right| \ll 1$$

$$|E_{+x}| \ll |E_x|, \quad \text{если} \quad \left|\frac{E_y^*}{E_x}\frac{l}{2E_y^*}\frac{\partial E_y^*}{\partial x}\right| \ll 1$$

Таким образом, при сделанных предположениях движение в трубе частично ионизованного газа во внешних постоянных скрещенных электрических и магнитных полях при заданных n_ε, E_{+y}^*, H_+ и S можно описать системой тринадцати уравнений (пяти обыкновенных дифференциальных и восьми алгебраических): (1.3), (3.2), (3.3), (3.7), (3.11), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), содержащей тринадцать независимых безразмерных параметров.

Поступила 15 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Resler E. L., Jr, Sears W. R. The prospects for magnetoaerodynamics. JAS, 1958, 25, № 4.
2. Resler E. L., Sears W. R. Magneto — gasdynamic channel flow. ZAMP, 1958, 9b, № 5/6.
3. Чекмарев И. Б. О квазиодномерном течении сжимаемого проводящего газа в канале постоянного сечения при наличии поперечных магнитного и электрического полей. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
4. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. Усп. физ. наук, 1960, т. 70, № 2.
5. Альфвен Х. Космическая электродинамика. ИИЛ, 1952.