

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА
 ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ
 (ЗАДАЧА О ПЛОСКОМ ПОРШНЕ)

Р. Г. Лукьянова, С. И. Фадеев

(Новосибирск)

Рассматривается автомодельное движение полностью ионизованной водородной плазмы в двухтемпературном гидродинамическом приближении: задача о плоском поршне и задача о выделении энергии на неподвижной стенке. Приводятся результаты численного интегрирования соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть невозмущенная среда — покоящаяся, плотная, полностью ионизованная водородная плазма с плотностью ρ_N и температурами электронов и ионов, равными нулю. Рассмотрим задачу о плоском поршне с заданным тепловым режимом. Закон движения поршня и тепловой режим выберем такими, чтобы возникающее движение среды было автомодельным [1]. Ролью излучения будем пренебрегать, магнитное поле отсутствует.

1. Как известно, возмущения достаточно плотной полностью ионизованной плазмы описываются системой уравнений Навье — Стокса, общий вид которой приведен, например, в [2]. Для одномерного, плоского, неустановившегося движения с учетом строгой электронейтральности при заряде иона $z = 1$ и отношении теплоемкостей $\gamma = C_p / C_v = 5/3$ систему можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p_e}{\partial r} + \frac{\partial p_i}{\partial r} &= \frac{4}{3} k_\nu \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{p_i}{\rho} \right)^{5/2} \frac{\partial u}{\partial r} \right], \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \\ \frac{3}{2} p_i \frac{d}{dt} \ln \frac{p_i}{\rho^{5/3}} &= \frac{4}{3} k_\nu \left(\frac{p_i}{\rho} \right)^{5/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + k_q \rho^{5/2} \frac{p_e - p_i}{p_e^{3/2}} \\ \frac{3}{2} p_e \frac{d}{dt} \ln \frac{p_e}{\rho^{5/3}} &= k_\nu \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{p_e}{\rho} \right)^{5/2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{p_e}{\rho} \right] + k_q \rho^{5/2} \frac{p_i - p_e}{p_e^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь t — время; r — линейная координата; u — скорость ионного газа, совпадающая со скоростью электронного газа; p_e и p_i — давления электронного и ионного газов; k_ν , k_κ и k_q — постоянные множители соответственно в коэффициенте ионной вязкости, в коэффициенте электронной теплопроводности и в законе обмена энергией между электронами и ионами. Зависимости k_ν , k_κ и k_q от атомных констант даются формулами

$$k_\nu = \frac{0.72}{\sqrt{\pi}} \frac{m_i}{\lambda e^4}, \quad k_\kappa = \frac{2.37}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_i^3}{\lambda e^4} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}, \quad k_q = 4 \sqrt{2\pi} \frac{\lambda e^4}{m_i^3} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

Здесь m_i — масса иона, m_e — масса электрона, e — элементарный заряд, λ — кулоновский логарифм. Предполагается, что обе компоненты среды с температурой ионов θ_i и температурой электронов θ_e подчиняются уравнению состояния совершенного газа, т. е.

$$p_i = \rho R \theta_i, \quad p_e = \rho R \theta_e, \quad R = k / m_i \quad (1.3)$$

где k — постоянная Больцмана.

Рассмотрим случай, когда законы движения поршня и выделения тепловой энергии на поршне заданы в виде

$$r_*(t) = At^n, \quad E(t) = Bt^\sigma \quad (1.4)$$

При этом постоянные, определяющие решение задачи, имеют следующие размерности:

$$[\rho_N] = ML^{-3}, \quad [A] = LT^{-n}, \quad [B] = MT^{-(2+\sigma)}$$

$$[k_\mu] = [k_\kappa] = ML^{-6}T^4, \quad [k_q] = M^{-1}L^6T^{-4}$$

Если теперь потребовать, чтобы среди выписанных постоянных только две обладали независимыми размерностями (например, ρ_N и A), то получим, что

$$n = 4/3, \quad \sigma = 2 \quad (1.5)$$

Таким образом, в случае (1.5) движение среды обладает свойством автомодельности, используя которое можно преобразовать (1.1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Заметим, что в задачах о плоском ($\nu = 1$), цилиндрическом ($\nu = 2$) и сферическом ($\nu = 3$) поршнях с тепловыми режимами вида (1.4) движение будет автомодельным, если

$$r_*(t) = At^{4/3}, \quad E(t) = Bt^{4/3(\nu+2)-2}$$

В частности, при $A = 0$ имеем задачу о выделении энергии в точке. Кроме того, легко видеть, что автомодельность сохраняется и при других значениях z и γ .

2. В отличие от движения обычного вязкого газа, в котором учет вязкости и теплопроводности одинаково существен (число Прандтля имеет порядок единицы), в высокотемпературной полностью ионизованной плазме за счет большой электронной теплопроводности число Прандтля становится много меньше единицы, и, если не интересоваться структурой вязкого скачка, можно пренебречь влиянием ионной вязкости. При этом непрерывное решение системы (1.1) переходит в разрывное с так называемым «изоэлектроннотермическим скачком» [3]. В дальнейшем будем считать ионный газ невязким.

Для удобства перепишем систему (1.1), полагая в ней $k_\mu = 0$, в лагранжевых переменных (x, t) , где x — массовая координата:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{3}{2} R \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -p_i \frac{\partial u}{\partial x} + K\rho \frac{\theta_e - \theta_i}{\theta_e^{3/2}}, \quad W = -\kappa_0 \rho \theta_e^{5/2} \frac{\partial \theta_e}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{3}{2} R \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = -p_e \frac{\partial u}{\partial x} + K\rho \frac{\theta_i - \theta_e}{\theta_e^{3/2}} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{p_i}{\theta_i} = \frac{p_e}{\theta_e} = \rho R$$

Здесь W — поток тепла, обусловленный электронной теплопроводностью

$$\kappa_0 = R^{3/2} k_\kappa, \quad K = 9.48 R^3 / \kappa_0$$

Так как электронная теплопроводность нелинейна, то решение задачи, как и в [4], имеет вид температурной волны, распространяющейся с конечной скоростью. С учетом этого обстоятельства начальные и граничные

условия при $t = 0$, $x > 0$ и на переднем фронте возмущения при $x = x_N$, $t > 0$ задаются в виде:

$$\rho = \rho_N, \quad u = \theta_i = \theta_e = W = 0 \quad (2.2)$$

на поршне при $x = 0$, $t > 0$

$$u = \frac{4}{3} A t^{1/3}, \quad W = 2Bt \quad \text{или} \quad u = \frac{4}{3} A t^{1/3}, \quad \theta_e = T_0 t^{2/3} \quad (2.3)$$

Придерживаясь обозначений [4], запишем формулы преобразования системы (2.1) в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \alpha(S) R^{1/2} T_0^{1/2} t^{1/3}, & \theta_e(x, t) &= f_e(S) T_0 t^{2/3} \\ p_e(x, t) &= \beta_e(S) R^{-1} \kappa_0 T_0^{5/2} t^{2/3}, & \theta_i(x, t) &= f_i(S) T_0 t^{2/3} \\ p_i(x, t) &= \beta_i(S) R^{-1} \kappa_0 T_0^{5/2} t^{2/3}, & W(x, t) &= \varphi(S) R^{-1/2} \kappa_0 T_0^{3/2} t \\ \rho(x, t) &= \delta(S) R^{-2} \kappa_0 T_0^{3/2}, & S &= x R^{3/2} \kappa_0^{-1} T_0^{-2} t^{-4/3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

После приведения преобразованной системы к нормальному виду получим

$$\Delta = \frac{16}{9} s^2 f_e - \frac{5}{3} \beta_i \beta_e - \beta_e^2 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{4}{3} s f_e \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\varphi}{f_e^{3/2}} \right) + \frac{2}{3} \beta_e \left(f_i - 9.48 \frac{\beta_e - \beta_i}{f_e^{3/2}} \right) \\ \Delta \frac{d\beta_i}{ds} &= \frac{5}{3} \beta_e \beta_i \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\varphi}{f_e^{3/2}} \right) + \frac{\beta_e}{2s f_e} \left(\frac{16}{9} s^2 f_e - \beta_e^2 \right) \left(f_i - 9.48 \frac{\beta_e - \beta_i}{f_e^{3/2}} \right) \\ \frac{d\beta_e}{ds} &= \frac{4}{3} s \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\alpha}{3} - \frac{d\beta_i}{ds}, \quad \frac{df_e}{ds} = - \frac{\varphi}{\beta_e f_e^{3/2}} \\ \frac{d\varphi}{ds} &= 2s \frac{df_e}{ds} - \beta_e \frac{d\alpha}{ds} - f_e - 9.48 \frac{\beta_e - \beta_i}{f_e^{3/2}}, \quad f_i = f_e \frac{\beta_i}{\beta_e}, \quad \delta = \frac{\beta_i}{f_i} \end{aligned}$$

причем из условий (2.2), (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_N, \quad \alpha = \beta_e = \beta_i = f_e = f_i = \varphi = 0 \quad \text{при} \quad s = s_N \\ \alpha &= \alpha_0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{при} \quad s = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $s = s_N$ и $s = 0$ характеризуют соответственно положение переднего фронта возмущения и положение поршня

$$\delta_N = [\rho_N R^2 \kappa_0^{-1} T_0^{-3/2}], \quad \alpha_0 = \frac{4}{3} A R^{-1/2} T_0^{-1/2}, \quad \varphi_0 = 2B R^{1/2} \kappa_0^{-1} T_0^{-3}$$

Из уравнения неразрывности можно получить следующее выражение зависимости между линейной координатой и автомодельными переменными:

$$r(x, t) = \left(\frac{s}{\delta} + \frac{3}{4} \alpha \right) R^{1/2} T_0^{1/2} t^{1/3} \quad (2.7)$$

Отсюда, в частности, закон движения переднего фронта возмущения имеет вид:

$$r_N(t) = \frac{s_N}{\delta_N} R^{1/2} T_0^{1/2} t^{1/3} \quad (2.8)$$

3. Как видно из граничных условий (2.6), точка $s = s_N$ является особой для системы (2.5). Потребуем, чтобы преобразование

$$\tau = (s_N - s)^{1/h}$$

где h — целое число, большее единицы, позволило представить искомые

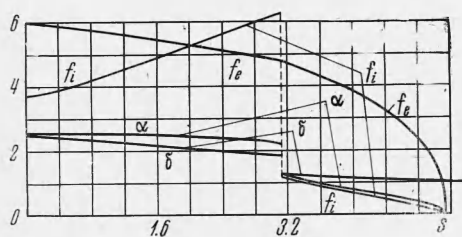
функции в окрестности $s = s_N$ в виде рядов по целым степеням τ . Учитывая только главные члены разложения, найдем, что асимптотическое поведение функций определяется по формулам

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{4} \frac{\delta_N}{s_N} f_e + \dots, & \delta &= \delta_N + \frac{9}{16} \frac{\delta_N^3}{s_N^2} f_e + \dots \\ \beta_e &= \delta_N f_e + \dots, & \beta_i &= 1.185 \frac{\delta_N^3}{s_N^2} f_e^2 + \dots \\ f_i &= 1.185 \frac{\delta_N^2}{s_N^2} f_e^2 + \dots, & \varphi &= 2s_N f_e + \dots \\ f_e &= \left[5 \frac{s_N}{\delta_N} (s_N - s) \right]^{2/5} + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

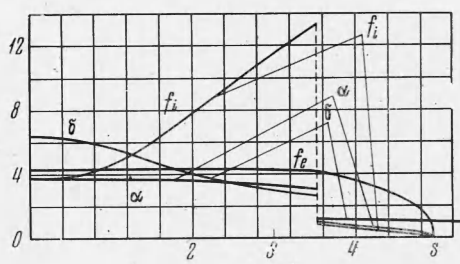
Выражения для α , β_e , f_e и φ из (3.4) совпадают с асимптотическими выражениями для α , β , f и φ в окрестности переднего фронта возмущений, полученными в [4] при решении автомодельной задачи о плоском поршне в однокомпонентной среде, если $n = 4/3$ и коэффициент теплопроводности пропорционален температуре в степени $5/2$.

При малых значениях $s_N - s$ определитель системы (2.5) $\Delta > 0$, а на поршне при $s = 0$ $\Delta < 0$. Отсюда следует (доказательство вполне аналогично [4]), что решение системы (2.5) с граничными условиями (2.6) нельзя непрерывно продолжить от $s = s_N$ до $s = 0$. Из рассмотрения исключается случай, когда в некоторой точке s_i , в которой $\Delta = 0$, правая часть первого уравнения, а следовательно, и правая часть второго уравнения системы (2.5) также равны нулю.

Относительно точки $s = 0$ лишь заметим, что при $f_e(0) > 0$, особенность в этой точке устранимая.



Фиг. 1



Фиг. 2

4. Пусть положение поверхности разрыва гидродинамических величин характеризуется координатой x_0 , которой соответствует значение безразмерной переменной $s = s_0$. Условия на изоэлектроннотермическом скачке запишем следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\frac{dr_0}{dt} - u_1 \right) &= \rho_2 \left(\frac{dr_0}{dt} - u_2 \right) = j, & \theta_{e1} &= \theta_{e2} \\ p_{i1} + p_{e1} + \rho_1 \left(\frac{dr_0}{dt} - u_1 \right)^2 &= p_{i2} + p_{e2} + \rho_2 \left(\frac{dr_0}{dt} - u_2 \right)^2 & (4.1) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dr_0}{dt} - u_1 \right)^2 + \frac{5}{2} \frac{p_{i1}}{\rho_1} - \frac{1}{j} W_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{dr_0}{dt} - u_2 \right)^2 + \frac{5}{2} \frac{p_{i2}}{\rho_2} - \frac{1}{j} W_2 \\ W_1 - W_2 &= j \frac{p_{e1}}{\rho_1} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \end{aligned}$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 приписаны значениям функций на «переднем» и «заднем» фронте поверхности разрыва; dr_0/dt — скорость распространения скачка, причем

$$r_0(t) = \left(\frac{s_0}{\delta_1} + \frac{3}{4} \alpha_1 \right) R^{1/2} T_0^{1/2} t^{4/3} \quad (4.2)$$

Законы сохранения потоков массы и количества движения на скачке имеют обычный вид. В законе сохранения потока энергии учтено, что $\theta_{e1} = \theta_{e2}$, а также то, что сжатие электронного газа происходит изотермически.

Применив к (4.1) преобразование (2.4), выразим затем все величины за скачком через

$$\varepsilon = \rho_1 / \rho_2$$

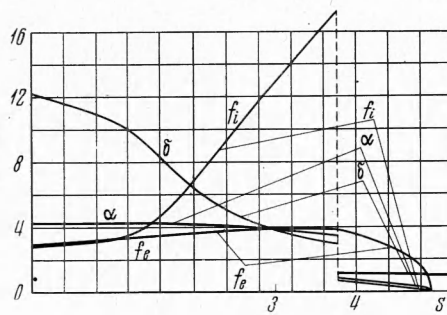
В результате получим

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \frac{s_0}{\delta_1}$$

$$f_{e2} = f_{e1}, \quad \beta_{e2} = \varepsilon^{-1} \beta_{e1} \quad (4.3)$$

$$\beta_{i2} = \beta_{i1} + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \left(\frac{16}{9} \varepsilon \frac{s_0^2}{\delta_1} - \beta_{e1} \right)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{4}{3} s_0 f_{e1} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad f_{i2} = \varepsilon \frac{\beta_{i2}}{\delta_1}$$



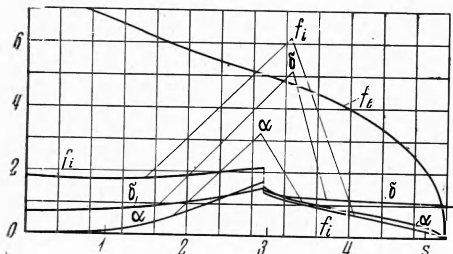
Фиг. 3

Значение ε определяется из решения трансцендентного уравнения

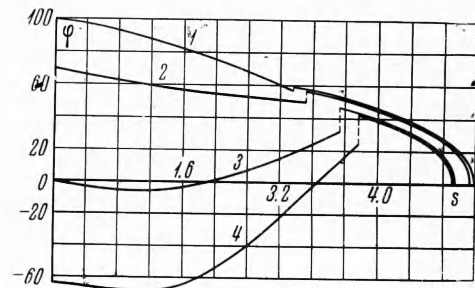
$$(1 - \varepsilon) \left[\frac{1 + 5(a_e + a_i)}{4} - \varepsilon \right] = \frac{a_e}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.4)$$

$$a_e = \frac{9}{16} \frac{\delta_1}{s_0^2} \beta_{e1}, \quad a_i = \frac{9}{16} \frac{\delta_1}{s_0^2} \beta_{i1}$$

Из условия $\beta_{i2} > \beta_{i1}$ следует, что искомый корень (4.4) удовлетворяет неравенствам: $a_e < \varepsilon < 1$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Нетрудно показать, что между a_e и 1 заключен только один корень уравнения (4.4).

5. Численное интегрирование системы (2.5) с граничными условиями (2.6) и условиями на скачке (4.3) было выполнено Р. Г. Лукьяновой.

Некоторым образом фиксировались s_N и s_0 и решалась задача Коши с начальными данными в точке, где еще справедливо асимптотическое представление (3.1). При этом сумма квадратов отклонений заданных граничных условий в точке $s = 0$ от полученных в результате решения задачи Коши есть функция s_N и s_0 . Далее, используя метод наискорейшего спуска, отыскивались те значения s_N и s_0 , при которых сумма квадратов отклонений обращалась в нуль.

Были рассмотрены следующие характерные случаи: а) поршень с подводом тепла ($\varphi_0 = 69.91$, $\alpha_0 = 2.572$ (фиг. 1)), б) адиабатический поршень ($\varphi_0 = 0$, $\alpha_0 = 3.770$ (фиг. 2)), в) поршень с отводом тепла ($\varphi_0 = -63.55$, $\alpha_0 = 4.308$) (фиг. 3)), г) задача о выделении энергии на неподвижной стенке ($\varphi_0 = 100.9$, $\alpha_0 = 0$ (фиг. 4)).

На фиг. 5 приведены соответствующие распределения $\varphi(s)$; кривые 1, 2, 3, 4; соответствуют значениям $\varphi_0 = 100.9, 69.91, 0.0, 63.55$; во всех случаях полагалось $\delta_N = 1$.

Как видно из графиков, поведение гидродинамических величин вполне типично для рассматриваемых движений в электронно-ионной среде. Отметим лишь некоторые обстоятельства. В задаче о поршне температура ионов больше температуры электронов в области непосредственно за скачком, тогда как в задаче о выделении энергии на неподвижной стенке соотношение между температурами обратное. Скачок ионной температуры тем меньше, чем больше энергии подводится на поршне к электронному газу. Наконец, во всех приведенных случаях получены только течения, соответствующие температурной волне первого рода [4].

Поступила 20 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1954.
2. Б р а г и н с к и й С. И. Явления переноса в плазме. Сб. Вопросы теории плазмы. М., Госатомиздат, 1963, вып. 1.
3. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
4. В о л о с е в и ч П. П., К у р д ю м о в С. П., Б у с у р и н а Л. Н., К р у с В. П. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1.