О НЕКОТОРЫХ ЭФФЕКТАХ АНИЗОТРОПИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В ПЛАЗМЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

Я. С. Уфлянд, И. Б. Чекмарев

(Ленинград)

Рассматриваются некоторые эффекты анизотропии электропроводности в плазме тлеющего разряда при наличии внешнего однородного магнитного поля.

В первом параграфе исследуется влияние наклона внешнего магнитного поля на распределение электрического тока на электроде в плоском полубесконечном канале. Получено общее решение задачи. Для некоторых частных случаев проведены расчеты, из которых видно, что скос магнитного поля относительно поверхности электрода приводит к резкой неоднородности в распределении тока.

Во втором параграфе изучается протекание тока в плазме с заданной неоднородной плотностью заряженных частиц, находящейся в плоском канале с непроводящими стенками. Показано, что неоднородность плазмы оказывает сильное влияние на зависимость отношения холловской составляющей тока к составляющей тока вдоль электрического поля от параметра анизотропии.

При условии малости магнитного числа Рейнольдса R_m и параметра взаимодействия S плотность электрического тока и напряженность электрического поля определяются уравнениями

$$\mathbf{j} + \omega\tau(\mathbf{j}\times\mathbf{l}) = \frac{e\tau}{m_e}(en\mathbf{E} + kT_e\nabla n), \quad \nabla\mathbf{j} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{0.1}$$

Здесь l — орт внешнего магнитного поля, n — концентрация электронов, которую будем считать известной функцией координат.

Пусть магнитные силовые линии параллельны плоскости xy и все величины не зависят от координаты z. Из последнего уравнения (0.1) следует, что $E_z = \text{const}$.

Исключая из первого уравнения (0.1) напряженность электрического поля E, получим

$$\nabla\times\mathbf{j} + \omega\tau(l\nabla)\,\mathbf{j} = \nabla\ln n\times\mathbf{j} + \omega\tau\nabla\ln n\times(\mathbf{j}\times\mathbf{l}) \tag{0.2}$$

Выражая составляющие плотности тока j_x и j_y через функцию тока ψ, из (0.1) и (0.2) имеем

$$(1+\omega^2\tau^2\cos^2\theta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\omega^2\tau^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + (1+\omega^2\tau^2\sin^2\theta)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} -$$
$$-\left[\frac{\partial\ln n}{\partial x} + \omega^2\tau^2\left(\cos\theta\frac{\partial\ln n}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\ln n}{\partial y}\right)\cos\theta\right]\frac{\partial\psi}{\partial x} -$$
$$-\left[\frac{\partial\ln n}{\partial y} + \omega^2\tau^2\left(\cos\theta\frac{\partial\ln n}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\ln n}{\partial y}\right)\sin\theta\right]\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \tag{0.3}$$
$$\cos\theta = l_x, \quad \sin\theta = l_y, \quad j_x = \partial\psi/\partial y, \quad j_y = -\partial\psi/\partial x$$

В дальнейшем уравнение (0.3) используется для решения двух конкретных задач.

1. В работах [1,2] исследовалось влияние наклона вектора магнитного поля к оси бесконечно длинного канала с непроводящими стенками на диффузию плазмы тлеющего разряда. При этом авторы не учитывали концевых эффектов, связанных с наличием электродов.

Рассмотрим влияние скоса магнитного поля на распределение тока на электроде. Будем считать, что плоский полубесконечный канал образован двумя непроводящими стенками с координатами $y = 0$ и $y = b$ и идеально проводящим электродом $x = 0$; другой электрод удален на бесконечность. Полагая концентрацию электронов постоянной, получим из (0.3) следующее уравнение для ψ:

$$(1+\omega^2\tau^2\cos^2\theta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\omega^2\tau^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + (1+\omega^2\tau^2\sin^2\theta)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1}$$

Равенство нулю касательной составляющей напряженности электрического поля на электроде и нормальной составляющей плотности тока на непроводящих стенках дают для ψ такие граничные условия:

$$\left[(1+\omega^2\tau^2\cos^2\theta)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \omega^2\tau^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{x=0} = 0 \tag{1.2}$$

$$\psi|_{y=0} = 0, \quad \psi|_{y=b} = I, \quad I = \int_0^b j_x\,dy \tag{1.3}$$

В безразмерных переменных

$$\xi=\frac{x}{\beta b},\qquad \eta=\frac{y}{b},\ u=\frac{\psi}{I},\qquad \beta=\frac{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}{1+\omega^2\tau^2\sin^2\theta}$$

уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) и (1.3) примут вид

$$(1+\gamma^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0\left(\gamma=\frac{\omega^2\tau^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right)\tag{1.4}$$

$$\left[(1+\gamma^2)\frac{\partial u}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]_{\xi=0}=0,\quad u\,|_{\eta=0}=0,\quad u\,|_{\eta=1}=1\tag{1.5}$$

Введем новые переменные

$$\xi_1=\eta-\frac{\gamma\xi}{1+\gamma^2},\qquad \eta_1=\frac{\xi}{1+\gamma^2}\tag{1.6}$$

Тогда (1.4) преобразуется в уравнение Лапласа, а (1.5) в условия вида

$$u\,|_{\xi_1+\gamma\eta_1=0}=0,\quad u\,|_{\xi_1+\gamma\eta_1=1}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right|_{\eta_1=0}=0\tag{1.7}$$

При помощи соотношения

$$\frac{dz}{d\zeta}=C\zeta^{-\beta/\pi}(\zeta-1)^{-(\pi-\beta)/\pi},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\gamma}\tag{1.8}$$

осуществляется конформное отображение рассматриваемой области в плоскости $Z=\xi_1+i\eta_1$, на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$. В дальнейшем удобно полученную полуплоскость отобразить на полосу $0<R\lambda<1$ при помощи соотношения

$$\lambda=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\zeta}\tag{1.9}$$

Так как в плоскости λ для комплексного потенциала имеем по симметрии

$$w=u+iv=\lambda\tag{1.10}$$

то окончательно получаем решение задачи в виде

$$z=\left[\int_0^w\left(\operatorname{tg}\frac{\pi w}{2}\right)^{1-2\mu}dw\right]\left[\int_0^1\left(\operatorname{tg}\frac{\pi w}{2}\right)^{1-2\mu}dw\right]^{-1}\qquad\left(\mu=\frac{\beta}{\pi}\right)\tag{1.11}$$

При $\mu={}^1/_2$, когда $\gamma=0$, что имеет место либо при $\omega\tau=0$, либо когда $\theta=0$ или ${}^1/_2\,\pi$, формула (1.11) дает линейную зависимость $u=\eta$. Таким образом, в случае, когда магнитное поле параллельно или перпендикулярно поверхности электрода, анизотропия проводимости не влияет на распределение тока, которое остается однородным при любых $\omega\tau$.

Эффект наклона силовых линий магнитного поля к поверхности электрода легко получить для частного случая $\mu={}^1/_4$ $(\gamma=1)$. При этом интегралы в формуле (1.11) вычисляются и решение имеет вид

$$z=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi w}}{1-\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi w}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi w}+\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi w}{1-\sqrt{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi w}+\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi w}\right]\tag{1.12}$$

Соответственно, на поверхности электрода получаем

$$\eta=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi u}}{1-\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi u}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi u}+\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi u}{1-\sqrt{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi u}+\operatorname{tg}{}^1/_2\,\pi u}\right]\tag{1.13}$$

откуда для безразмерной нормальной составляющей плотности тока на электроде находим формулу

$$j=\frac{j_x b}{I}=\left.\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\xi=0}=\sqrt{2\operatorname{ctg}{}^1/_2\,\pi u}\tag{1.14}$$

Просто исследуется также случай $\gamma\ll 1$. Представляя решение в виде степенного ряда

$$u=u_0+\gamma u_1+\gamma^2 u_2+\ldots$$

получим для u_0 и u_1 уравнения

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} \tag{1.15}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} u_0 = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \\ u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{при } \eta = 1 \\ \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial u_0}{\partial \eta} \quad \text{при } \xi = 0 \end{gathered} \tag{1.16}$$

Решением (1.15) при условиях (1.16) будет ряд

$$u = \eta + 2\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{(k\pi)^2} \sin k\pi\eta \, e^{-k\pi\xi} \tag{1.17}$$

Отсюда для плотности тока на электроде следует формула

$$j\,|_{\xi=0} = 1 - \frac{2\gamma}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi\eta \tag{1.18}$$

Как видно из фигуры, где приведены результаты расчета для $\gamma = 0$, 0.1 и 1.0, наличие скоса магнитного поля приводит к сильной неоднородности в распределении тока на электроде.

2. В работе [3] приводятся результаты измерения холловского тока в гомополярнике. Отмечается, что экспериментальные значения тока оказываются во много раз меньше теоретических. Авторы объясняют расхождение наличием неоднородностей в разряде, препятствующих свободному протеканию тока Холла.

Это предположение нетрудно подтвердить на следующем простом примере. Пусть в прямоугольной области $-a \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ концентрация заряженных частиц изменяется по закону $n = n_0 e^{-\alpha|x|}$, а магнитное поле параллельно оси y. Тогда уравнение (0.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 + \omega^2\tau^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \mp \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

где знак минус берется при $x > 0$, а плюс — при $x < 0$. Решением (2.1) при условии

$$j_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

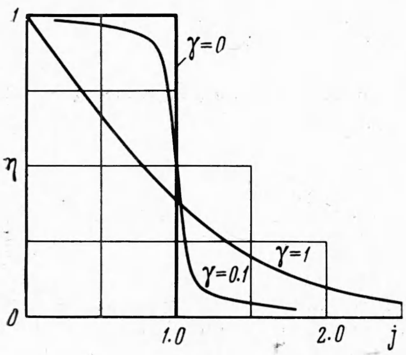
на границах будет

$$\psi = \psi_b y / b \tag{2.2}$$

где принято $\psi = 0$ при $y = 0$

Следствием (2.2) будет

$$j_x = \frac{\psi_b}{b}, \quad j_y = 0, \quad E_y = 0, \quad E_x = E_x(x)$$



Фиг. 1

Интегрируя по x и y проекцию первого уравнения (0.1) на ось Z, получаем

$$I_z + \omega\tau I_x = \frac{e^2\tau E_0}{m_e} 2abn_0 \left(\frac{1 - e^{-\alpha a}}{\alpha a}\right) \tag{2.3}$$

где

$$I_z = \int_{-a}^{a}\int_0^b j_z dx dy, \qquad I_x = \int_{-a}^{a}\int_0^b j_x dx dy, \qquad E_0 = E_z$$

С другой стороны, интегрирование по x выражения

$$\frac{j_x}{n} = \frac{e\tau / m_e}{1 + \omega^2\tau^2}\left[eE_x + \frac{kT_e}{n}\frac{dn}{dx} + \omega\tau e E_0\right]$$

при условиях

$$n\,|_{x=-a} = n\,|_{x=a}, \quad \varphi\,|_{x=-a} = \varphi\,|_{x=a} \quad \left(\frac{d\varphi}{dx} = -E_x\right)$$

дает

$$j_x = \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{e^2\tau E_0 n_0}{m_e} \left(\frac{\alpha a}{e^{\alpha a} - 1}\right) \tag{2.4}$$

Вычисляя $I_x = 2abj_x$ и подставляя в (2.3), находим

$$I_z = \frac{e^2\tau E_0 2abn_0}{m_e}\left[\frac{1-e^{-\alpha a}}{\alpha a} - \frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\frac{\alpha a}{e^{\alpha a}-1}\right] \tag{2.5}$$

Таким образом, для отношения тока Холла I_x к основному току I_z получаем

$$\frac{I_x}{I_z} = \frac{\omega\tau(\alpha a)^2}{2(\operatorname{ch}\alpha a - 1)(1+\omega^2\tau^2) - (\omega\tau\alpha a)^2} \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что зависимость I_x / I_z от $\omega\tau$ при разных значениях параметра неоднородности αa имеет различный характер. Так, при $\alpha a \to 0$ получаем известное для однородной плазмы выражение [3]

$$I_x / I_z = \omega\tau \tag{2.7}$$

С другой стороны, при $\alpha a \gg 1$ находим, что

$$\frac{I_x}{I_z} = \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\frac{(\alpha a)^2}{2\operatorname{ch}\alpha a} \tag{2.8}$$

Если $\omega\tau \ll 1$, то (2.8), как и (2.7) дает линейную зависимость I_x / I_z от $\omega\tau$, но с коэффициентом пропорциональности

$$\frac{(\alpha a)^2}{2\operatorname{ch}\alpha a} \ll 1$$

Если же $\omega\tau \gg 1$, то зависимость I_x / I_z от $\omega\tau$ принимает уже характер обратной пропорциональности.

Заметим в заключение, что влияние одномерной неоднородности проводимости на мощность МГД — устройств и неизотермическую ионизацию ранее исследовалось в работе [4].

Поступила 27 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганичев А. А., Голант В. Е., Жилинский А. П. Хотимский Б. З., Шилин В. Н. Исследования диффузии заряженных частиц распадающейся плазмы в магнитном поле. ЖТФ, 1964, т. 34, № 1, стр. 78—88.
2. Дробышевский Э. М. Положительный столб в скошенном магнитном поле. ЖТФ, 1966, т. 36, № 7, стр. 1175—1185.
3. Дробышевский Э. М., Розов С. И. Измерение холловского тока в гомополярнике. ЖТФ, 1967, т. 37, № 2, стр. 322—326.
4. Rosa R. T. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 9, p. 1081—1090.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СГУСТКА ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА С ЗАДАННЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КОНТУРОМ

В. А. Деревянко, Л. А. Заклязьминский, С. С. Кацнельсон, А. Ю. Керкис, Е. Ф. Лебедев, Н. А. Трынкина, В. П. Фомичев

(Новосибирск)

Исследуется прохождение сгустка проводящего газа, полученного в коаксиальном разряднике, через постоянное магнитное поле, а также индукционное взаимодействие этого сгустка с электрическим контуром, нагруженным на омическое сопротивление. Основное внимание уделено изучению энергетических характеристик взаимодействия (энергии, выделяемой на омическом сопротивлении, соотношения между работой плазмы и джоулевой диссипацией) в зависимости от геометрии и параметров электрического контура. Для малых значений магнитного числа Рейнольдса выполнен теоретический анализ процесса. Приводится сравнение экспериментальных результатов с теоретическими.

1. Экспериментальная установка и параметры рабочего газа (сгустка плазмы). Экспериментальная установка, схема которой представлена на фиг. 1, состоит из коаксиального разрядника, радиального канала и электромагнита постоянного тока, создающего магнитное поле по оси z, цифрами *1*, *2*, *3*, *4* обозначены электрические контуры с индуктивностями L_1, L_2, L_3, L_4.

При разряде батареи конденсаторов образующийся в разряднике сгусток плазмы проходил через трубку из оргстекла и поступал в канал, где расширялся по радиусу нормально приложенному к магнитному полю. Все эксперименты проводились на воздухе при начальном давлении 0.7 *мм* рт. ст. Емкость батареи конденсаторов была