

УДК 532.5+533+517.9

## УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПРИТЯГИВАЮЩЕЙ СФЕРЕ 2. ПРОСТЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ И ЗВУКОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. А. Черевко, А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mails: cherevko@mail.ru, chupakhin@hydro.nsc.ru

Исследуется модель мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере, описывающая крупномасштабные движения газа в атмосфере планет и жидкости в Мировом океане. Изучается распространение звуковых возмущений на состоянии равновесия. Система уравнений для бихарактеристик проинтегрирована в эллиптических функциях. Приведено описание простых стационарных волн. Доказано существование двух типов решений (сверх- и докритического), описывающих движение газа в сферическом поясе, так что одна из граничных параллелей является источником, а другая — стоком. Дана интерпретация полученных решений как крупномасштабных циркуляционных ячеек в атмосфере.

Ключевые слова: мелкая вода, движения на сфере, стационарные решения, распространение звуковых возмущений, циркуляционные ячейки.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] представлена модель мелкой воды на вращающейся сфере, описывающая крупномасштабные движения в атмосферах планет и Мировом океане. Предполагается, что толщина слоя несжимаемой сплошной среды (воздух или вода) на поверхности планеты мала по сравнению с радиусом планеты, поэтому движением в радиальном направлении можно пренебречь. Как отмечено в [2], такие предположения возможны в том случае, когда эффект вращения оказывает существенное влияние на движение среды. Рассматриваются движения с достаточно большими временными масштабами. Кроме того, в случае крупномасштабных геофизических движений траектории жидких частиц незначительно отклоняются от сферы в радиальном направлении.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предложенная модель совпадает с уравнениями газовой динамики на вращающейся сфере для политропного уравнения состояния газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$ , описывающими движения на поверхности сферы, не зависящие от радиуса  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Система уравнений, записанная в неинерциальной системе координат, вращающейся вместе со сферой с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ , имеет вид

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00047а), а также в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2826.2008.1.), гранта Министерства образования и науки РФ (№ 2.1.1/3543) и Интеграционного проекта СО РАН № 65.

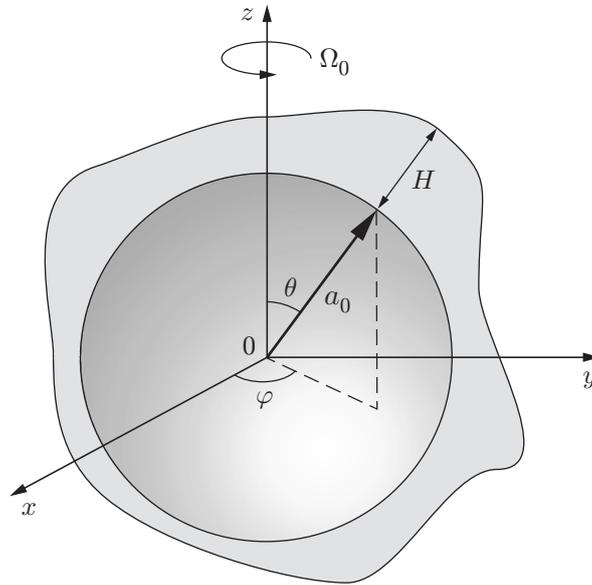


Рис. 1. Постановка задачи

$$\begin{aligned}
 Dv &= w^2 \operatorname{ctg} \theta + r_0 w \cos \theta + (1/4)r_0^2 \sin \theta \cos \theta - f_0 h_\theta, \\
 Dw &= -vw \operatorname{ctg} \theta - r_0 w \cos \theta - f_0 (\sin \theta)^{-1} h_\varphi, \\
 Dh + (\sin \theta)^{-1} h(w_\varphi + (v \sin \theta)_\theta) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

где  $D = \partial_t + v \partial_\theta + (\sin \theta)^{-1} w \partial_\varphi$  — полная производная вдоль поверхности сферы. Уравнения (1.1) записаны в сферической системе координат:  $0 < \theta < \pi$  — широта,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  — долгота;  $v, w$  — меридиональная и долготная компоненты вектора скорости;  $h > 0$  — глубина слоя. Положительными считаются направления с севера на юг и с запада на восток. Безразмерные параметры  $r_0$  и  $f_0$  связаны с числами Россби  $R_0$  и Фруда  $F$

$$R_0 = \frac{V_0}{2a_0\Omega_0}, \quad F = \frac{V_0}{\sqrt{gH_0}}$$

соотношениями

$$r_0 = R_0^{-1}, \quad f_0 = F^{-2}.$$

Здесь  $V_0, H_0$  — характерные масштабы касательной к сфере компоненты вектора скорости и глубины слоя;  $a_0$  — радиус сферы;  $g$  — ускорение свободного падения (рис. 1).

Параметр мелкой воды  $\varepsilon = H_0/a_0$  предполагается малым по сравнению с параметрами  $r_0$  и  $f_0$ , которые для Земли имеют один порядок малости, следовательно, эффекты вращения и гравитации оказывают сопоставимое влияние на движение газа. Описание этого движения и является основной целью данной работы. Особенность модели состоит в компактности многообразия определения решения. В [1] построены бесконечномерные преобразования эквивалентности системы (1.1) в стационарном случае и представлены решения, соответствующие состоянию равновесия и зональным течениям вдоль параллелей. Задача о распространении звуковых возмущений в атмосфере для газодинамической модели поставлена Л. В. Овсянниковым. В настоящей работе описываются звуковые характеристики на состоянии равновесия и исследуются стационарные простые волны системы (1.1). Отметим также работы [3, 4], в которых изучены групповые свойства ряда моделей физики атмосферы и исследованы точные решения, построенные с помощью допускаемых этими моделями групп симметрий.

## 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ

Поскольку система (1.1) является гиперболической, большое значение для приложений имеет конечная скорость распространения звуковых возмущений. В силу газодинамической аналогии эта скорость равна скорости звука  $c = \sqrt{f_0 h}$ . Пусть семейство звуковых характеристик задается уравнениями  $\chi(t, \theta, \varphi) = \text{const}$ . Тогда на заданном решении  $\mathbf{u} = (v, w)$ ,  $h$  функция  $\chi$  удовлетворяет уравнению [5]

$$\chi_t + v\chi_\theta + (\sin \theta)^{-1}w\chi_\varphi = \varepsilon cN \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad (2.1)$$

где

$$N = |\nabla \chi| = (\chi_\theta^2 + (\sin \theta)^{-2}\chi_\varphi^2)^{1/2}.$$

При этом звуковые возмущения распространяются по поверхности сферы единичного радиуса.

Для вывода уравнений бихарактеристик системы (1.1) на заданном решении, т. е. характеристик уравнения (2.1), являющихся кривыми в пространстве  $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$ , вдоль которых распространяются звуковые возмущения (“звуковые лучи”), используем общие данные о структуре характеристик дифференциальных уравнений первого порядка [6].

Уравнение (2.1) является уравнением Гамильтона — Якоби для функции  $\chi = \chi(t, x_1, \dots, x_n)$  и записывается в виде

$$\chi_t + H(t, x_1, \dots, x_n, \chi_1, \dots, \chi_n) = 0, \quad (2.2)$$

где  $\chi_i = \partial \chi / \partial x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Характеристическая система для уравнения (2.2), называемая также канонической системой дифференциальных уравнений, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = H_{\chi_i}, \quad \frac{d\chi_i}{dt} = -H_{x_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.3)$$

и является гамильтоновой системой уравнений с гамильтонианом  $H$ .

Далее используется

**Теорема 1** [6. С. 115–116]. *Если для дифференциального уравнения (2.2) известен полный интеграл  $\chi = \varphi(t, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) + a$ , зависящий от  $n + 1$  параметров  $a, a_1, \dots, a_n$ , то из уравнений*

$$\varphi_{a_i} = b_i, \quad \varphi_{x_i} = p_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

где  $p_i = \chi_i$ , с  $2n$  произвольными параметрами  $a_i, b_i$  в неявном виде получается  $2n$ -параметрическое семейство решений канонической системы дифференциальных уравнений (2.3).

Изучим звуковые характеристики и бихарактеристики уравнений (1.1) на некоторых простых решениях.

Модель мелкой воды (1.1) допускает состояние равновесия, в котором относительные компоненты вектора скорости равны нулю ( $v = w = 0$ ) и имеет место следующее распределение глубины:

$$h = \alpha_0^2(k_0^2 + \sin^2 \theta). \quad (2.4)$$

Здесь  $\alpha_0^2 = r_0^2/(8f_0)$ ,  $k_0^2 = 8f_0 h_0/r_0^2$ ,  $h_0 > 0$  — постоянные. Скорость звука на данном решении  $c = (r_0/2\sqrt{2})(k_0^2 + \sin^2 \theta)^{1/2}$ . При  $\theta \in (0, \pi)$  уравнение

$$r = \alpha_0^2(k_0^2 + \sin^2 \theta) \quad (2.5)$$

в пространстве  $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$  задает поверхность вращения, характеризующую равновесный профиль глубины, отличный от сферического. Равновесная поверхность (2.5) показана на рис. 2 в работе [1].

Так как уравнение (2.1) однородно по производным функции  $\chi$  и само уравнение семейства характеристик допускает масштабное преобразование, то, умножая функцию  $\chi$  на постоянный множитель, гамильтониан  $H$  для уравнений (2.1) можно привести к виду

$$H = (k_0^2 + \sin^2 \theta)^{1/2} (\chi_\theta^2 + (\sin \theta)^{-2} \chi_\varphi^2)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Обозначим  $Q = (k_0^2 + \sin^2 \theta)^{1/2}$ . Тогда  $H = QN$ .

Гамильтонова система (2.3) для гамильтониана (2.6) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{Q}{N} \chi_\theta, & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{Q}{N} \frac{\chi_\varphi}{\sin^2 \theta}, \\ \frac{d\chi_\theta}{dt} &= -\frac{\sin \theta \cos \theta}{QN} (\chi_\theta^2 - k_0^2 (\sin \theta)^{-4} \chi_\varphi^2), & \frac{d\chi_\varphi}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Поскольку  $H_t = H_\varphi = 0$ , гамильтонова система (2.7) имеет интегралы  $H$  и  $H_\varphi$ . Заменой переменных гамильтониан (2.6) приводится к гамильтониану на сфере. Действительно, поверхность (2.5) состояния равновесия конформна сфере, поскольку ее метрика имеет вид

$$dl^2 = Q ds^2,$$

где  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  — метрика на единичной сфере. Конформное соответствие двумерных поверхностей в пространстве  $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$  может быть реализовано двумя способами: умножением метрики на ненулевой множитель (в данном случае — на  $Q$ ) либо заменой координат, являющейся конформным преобразованием на плоскости комплексной переменной, представляющей собой стереографическую проекцию сферы. В новых переменных  $\alpha = \alpha(\theta, \varphi)$ ,  $\beta = \beta(\theta, \varphi)$  имеем

$$H_1 = (H_\alpha^2 + (\sin \alpha)^{-2} H_\beta^2)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Гамильтониану (2.8) соответствует гамильтонова система на сфере. Следовательно, задача о распространении звуковых возмущений на состоянии равновесия (2.4) конформно-эквивалентна задаче о волновых фронтах на сфере [7].

Функции  $\alpha(\theta, \varphi)$  и  $\beta(\theta, \varphi)$  являются сложными комбинациями эллиптических интегралов, и переход к переменным  $(\alpha, \beta)$  не упрощает задачу. В этом случае сложность задачи заключается в поиске и исследовании преобразования  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\alpha, \beta)$ , приводящего гамильтониан к виду (2.8). Сказанное выше позволяет сделать вывод, что система (2.7) может быть проинтегрирована в эллиптических функциях. Для этого, используя теорему 1, представим решение в неявном виде. Интеграл  $\chi$  уравнения звуковых характеристик будем искать в виде

$$\chi = -a_0 t - b_0 \varphi + g(\theta),$$

где  $a_0, b_0$  — параметры; функция  $g$  определяется после подстановки ее в уравнение Гамильтона — Якоби (2.2) с гамильтонианом (2.6). В результате вычислений получаем

$$g(\theta) = \varepsilon \sigma_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \sqrt{\frac{1 - l_0^2 \sin^2 \theta}{k_0^2 + \sin^2 \theta}} d\theta \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad (2.9)$$

где

$$\sigma_0^2 = a_0^2 - b_0^2 k_0^2 > 0, \quad l_0^2 = (b_0 / \sigma_0)^2. \quad (2.10)$$

Функция  $g(\theta)$  вида (2.9) представляется в виде комбинации эллиптических интегралов. Из-за громоздкости это выражение в данной работе не приводится.

Звуковые характеристики на состоянии равновесия задаются уравнениями

$$\frac{\partial g}{\partial a_0} = t - t_0, \quad \frac{\partial g}{\partial b_0} = \varphi - \varphi_0. \quad (2.11)$$

Постоянные  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  определяют точку на единичной сфере, являющуюся вершиной характеристического коноида при  $t = t_0$ .

Уравнения (2.11) после подстановки в них функции  $g$  в виде (2.9), (2.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{|\sigma_0|} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \sqrt{\frac{k_0^2 + \sin^2 \theta}{1 - l_0^2 \sin^2 \theta}} d\theta = t - t_0, \\ \frac{b_0}{|\sigma_0|} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta (k_1^2 + \sin^2 \theta) \sqrt{\frac{k_0^2 + \sin^2 \theta}{1 - l_0^2 \sin^2 \theta}} d\theta = -(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $k_1^2 = (b_0 k_0)^2$ . Интегралы в левых частях уравнений (2.12) выражаются в виде комбинаций эллиптических интегралов и также не приводятся из-за громоздкости формул.

Из изложенного выше следует

**Теорема 2.** *Звуковые характеристики модели мелкой воды (1.1) на состоянии равновесия (2.4) задаются неявно уравнениями (2.12) и описываются комбинациями эллиптических интегралов.*

При интегрировании уравнений бихарактеристик (2.3) следует задать начальные данные  $x_{i0} = x_i(t_0)$  и  $\chi_{i0} = \chi_i(t_0)$ . При этом начальные значения всех производных  $\chi_{i0} = \chi_i(t_0)$  должны быть согласованы с исходным уравнением (2.2) и уравнением характеристик  $\chi(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) = \text{const}$ . Для характеристического коноида — геометрического места всех бихарактеристик, выходящих из данной точки  $P_0(\mathbf{x}_0)$  при  $t = t_0$ , — решение системы (2.3) дает двухпараметрическое семейство кривых, зависящее от параметров  $\lambda$  и  $\mu$ :  $r = R(t, \lambda, \mu)$ ,  $\theta = \Theta(t, \lambda, \mu)$ ,  $\varphi = \Phi(t, \lambda, \mu)$ . При рассмотрении распространения возмущений по поверхности сферы получим однопараметрическое семейство кривых  $\Gamma$ :  $\theta = \Phi(t, \lambda)$ ,  $\varphi = \Phi(t, \lambda)$ .

**Численный анализ характеристического коноида.** Из системы уравнений (2.7) следует, что вид характеристического коноида зависит от параметра  $k_0^2 = 8f_0 h_0 / r_0^2$  и параметров  $\varphi_0, \theta_0$ , определяющих положение вершины коноида на сфере. Поскольку система (2.7) допускает перенос по  $\varphi$ , параметр  $\varphi_0$  является несущественным.

Влияние параметров  $k_0$  и  $\theta_0$  на образование каустик удобно отслеживать, наблюдая за коноидом при достаточно больших временах распространения возмущения, близких к моменту, когда появляются особенности фронта возмущения.

*Влияние вращения.* В случае если глубина слоя жидкости при отсутствии вращения и радиус сферы фиксированы, большими значениям  $k_0$  соответствуют меньшие скорости вращения. При  $k_0 \rightarrow \infty$  скорость вращения стремится к нулю.

Предположим, что вершина коноида расположена на экваторе. Тогда при отсутствии вращения глубина жидкости на всей сфере постоянна и бихарактеристики представляют собой большие круги на сфере. В этом случае фронт возмущения всегда является окружностью и сходится в точке, диаметрально противоположной вершине коноида (рис. 2, а, б). При увеличении скорости вращения фронт возмущения вытягивается по широте. Следует отметить, что при  $k_0 > 0,37$  каустики на фронте, обусловленные пересечением бихарактеристик, образуются ближе к полюсам (рис. 2, в, г), а при меньших  $k_0$  (т. е. при больших скоростях вращения) — на экваторе (рис. 2, д, е).

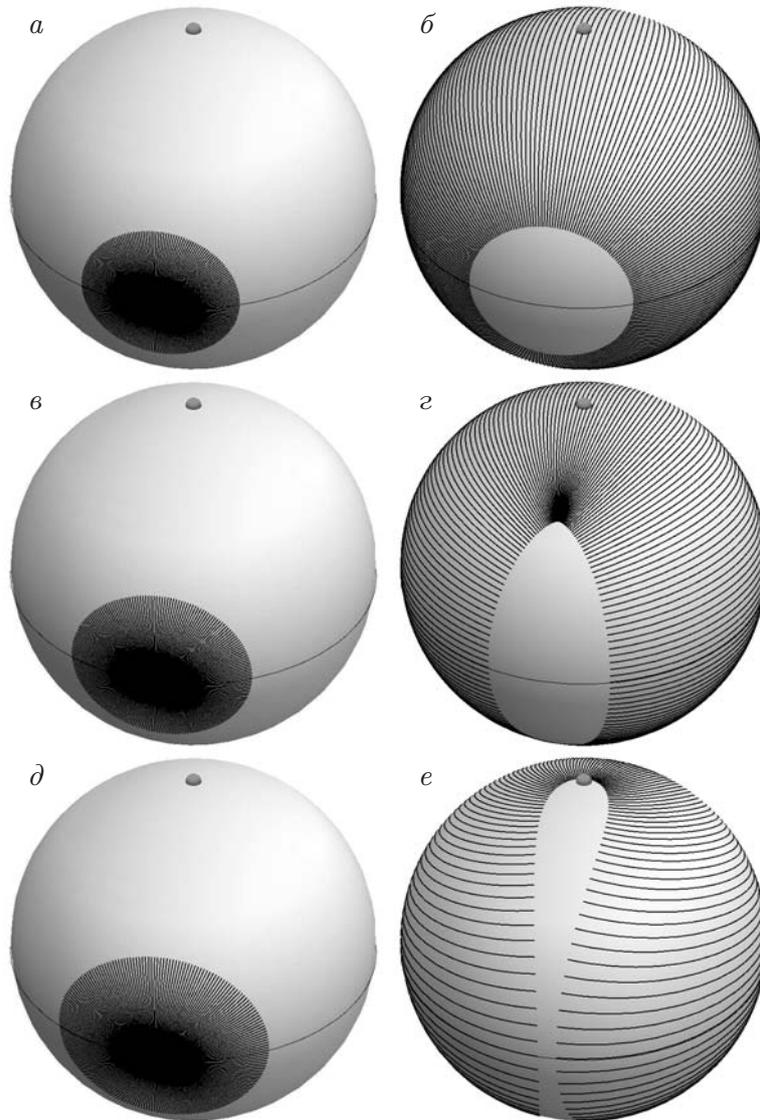


Рис. 2. Характеристический коноид с вершиной, расположенной на экваторе, при малых (*a, в, д*) и больших (*б, з, е*) временах распространения возмущения: *a, б* — в отсутствие вращения; *в, з* — при умеренной скорости вращения ( $k_0 > 0,37$ ); *д, е* — при большой скорости вращения ( $k_0 < 0,37$ )

При  $k_0 = 0$  уравнения для бихарактеристик интегрируются в элементарных функциях:

$$\varphi(t) = t/\sqrt{C_0^2 + 1} + \varphi_0, \quad \theta(t) = \text{arcctg}(\text{sh } \tau), \quad \chi_\varphi(t) = \chi_{\varphi 0}, \quad \chi_\theta(t) = -\chi_{\varphi 0} C_0 \text{ch } \tau.$$

Здесь  $\tau = (C_0/\sqrt{C_0^2 + 1})t + C_1$ .

Указанные два предельных случая подтверждают описанное выше поведение коноида.

*Влияние положения вершины коноида.* В случае если вершина коноида находится на экваторе, коноид симметричен относительно экватора. Если вершина коноида расположена в южном полушарии, то фронт возмущения сходится в северном полушарии (рис. 3). Такое поведение бихарактеристик естественно, поскольку скорость распространения возмущения не зависит от долготы  $\varphi$  и достигает максимального значения на экваторе.

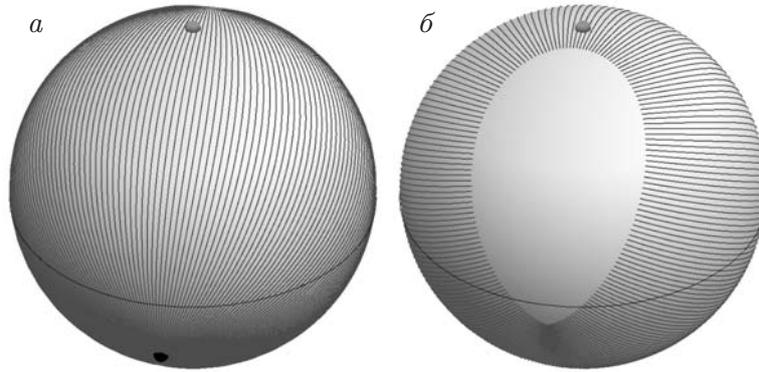


Рис. 3. Коноид с вершиной, расположенной в южном полушарии:  
*a* — вид со стороны вершины; *б* — вид с противоположной стороны

### 3. ПРОСТЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим простые стационарные волны, описываемые системой уравнений (1.1), в которых искомые функции  $v$ ,  $w$ ,  $h$  зависят лишь от широты  $\theta$ . В этом случае уравнения (1.1) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} vv' &= w^2 \operatorname{ctg} \theta + r_0 w \cos \theta + (r_0^2/4) \sin \theta \cos \theta - f_0 h', \\ vw' &= -vw \operatorname{ctg} \theta - r_0 v \cos \theta, \\ vh' \sin \theta + h(v \sin \theta)' &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где штрих означает производную по  $\theta$ . Система (3.1) интегрируется в конечном виде. Впервые этот класс решений описан в [8].

Существует два типа решений. В решениях первого типа, рассмотренных в [1],  $v \equiv 0$ , в решениях второго типа  $v \neq 0$ .

Рассмотрим решения системы (3.1), в которых  $v \neq 0$ . В этом случае второе и третье уравнения (3.1) интегрируются и дают следующие представления для компонент вектора скорости:

$$v = \frac{q_0}{h \sin \theta}, \quad w = \frac{w_0}{\sin \theta} - \frac{r_0}{2} \sin \theta \quad (3.2)$$

( $q_0, w_0$  — постоянные интегрирования). Интеграл Бернулли на данных решениях имеет вид

$$(v^2 + w^2)/2 + f_0 h - (r_0^2/8) \sin^2 \theta = b_0, \quad (3.3)$$

где  $b_0 = \text{const}$ . Подставляя в (3.3) представления (3.2), получим алгебраическое уравнение третьей степени для определения глубины:

$$h^3 - \alpha h^2 + \beta = 0. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{2f_0} \left( \varkappa_0 - \frac{w_0^2}{\sin^2 \theta} \right), \quad \beta = \frac{q_0^2}{2f_0 \sin^2 \theta}, \quad \varkappa_0 = 2b_0 + w_0 r_0. \quad (3.5)$$

Решив уравнение (3.4), получим профиль глубины  $h = h(\theta)$ ; подставив найденное значение  $h$  в представления (3.2) для  $v$ , найдем вектор скорости. Таким образом, решение задачи о простых стационарных волнах сводится к анализу уравнения (3.4). Согласно (3.5)  $\beta > 0$ .

Поскольку в соответствии с физическим смыслом  $h > 0$ , из (3.4) следует, что и  $\alpha > 0$ . Тогда согласно (3.5)  $\varkappa_0 > 0$ .

Определим число вещественных положительных корней уравнения (3.4). Дискриминант уравнения (3.4) равен [9]

$$D_h = \beta(27\beta - 4\alpha^3),$$

следовательно, поскольку  $\beta > 0$ , при  $D_1 = 27\beta - 4\alpha^3 < 0$  уравнение (3.4) имеет три вещественных корня, при  $D_1 > 0$  — один, а уравнение  $D_1 = 0$  задает дискриминантную кривую, определяющую кратные корни.

Согласно теореме Виета и в силу того, что  $\beta > 0$ , произведение корней уравнения (3.4) отрицательно, а сумма положительна, поскольку  $\alpha > 0$ . Следовательно, один вещественный корень всегда отрицателен. Значит, вариант  $D_1 > 0$  можно не рассматривать, так как в этом случае отсутствуют решения, имеющие физический смысл.

Уравнение (3.4) имеет сигнатуру знаков коэффициентов вида  $(+ - +)$ , следовательно, согласно теореме Декарта [9] оно может иметь два положительных вещественных корня, что возможно при  $D_1 < 0$ . После ряда вычислений получим

$$D_1 = -\frac{\varkappa_0^3}{2f_0^3 s^3} P(s), \tag{3.6}$$

где  $s = \sin^2 \theta$ ,

$$P(s) = s^3 - 3(\lambda_0 + \mu_0)s^2 + 3\lambda_0^2 s - \lambda_0^3. \tag{3.7}$$

Коэффициенты многочлена (3.7) имеют вид

$$\lambda_0 = w_0^2 / \varkappa_0, \quad \mu_0 = 9f_0^2 q_0^2 / \varkappa_0^3. \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что  $\lambda_0 > 0$ ,  $\mu_0 > 0$ . Согласно (3.6)  $D_1 < 0$  при  $P(s) > 0$ . Дискриминант уравнения  $P(s) = 0$  равен

$$D_P = 27\mu_0^2 \lambda_0^3 (4\mu_0 + 9\lambda_0)$$

и положителен при любых  $\lambda_0 > 0$ ,  $\mu_0 > 0$  (см. (3.8)). Следовательно, уравнение  $P(s) = 0$  имеет только один вещественный корень. Сигнатура знаков коэффициентов этого уравнения имеет вид  $(+ - + -)$ . В этой сигнатуре три смены знака, значит, согласно теореме Декарта оно имеет либо три положительных корня, либо один. Может реализоваться лишь второй случай. Кроме того, поскольку  $s = \sin^2 \theta < 1$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , этот положительный корень  $s_*$  должен находиться в интервале  $(0, 1)$ , что обеспечивается неравенствами

$$P(0) = -\lambda_0^3 < 0, \quad P(1) = (1 - \lambda_0)^3 - 3\mu_0 > 0. \tag{3.9}$$

Первое из этих неравенств выполняется автоматически, второе определяет допустимую область  $\Gamma$  параметров на плоскости  $\mathbb{R}^2(\lambda_0, \mu_0)$ .

Интервал  $I = (\theta_*, \pi - \theta_*)$ , где  $\sin \theta_* = s_*$ , соответствует случаю  $D_1 < 0$ , следовательно, на этом интервале уравнение (3.4) имеет два вещественных положительных корня  $h_1 = h_1(\theta)$ ,  $h_2 = h_2(\theta)$ . Функции  $h_1$  и  $h_2$  могут быть выписаны по формулам Кардано [9], но такое представление не является эффективным для анализа решения.

В пространстве  $\mathbb{R}^3(\lambda_0, \mu_0, \theta)$  область существования положительных корней уравнения (3.4) задается неравенством  $P(s) > 0$ :

$$\sin^6 \theta - 3(\lambda_0 + \mu_0) \sin^4 \theta + 3\lambda_0 \sin^2 \theta - \lambda_0^3 \geq 0. \tag{3.10}$$

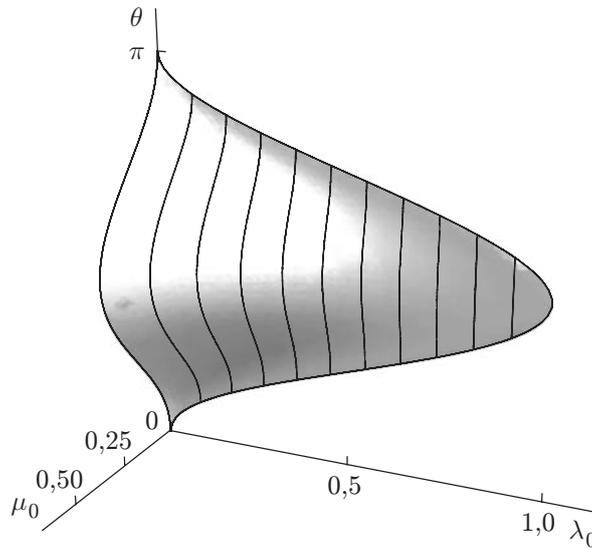


Рис. 4. Область существования положительных корней уравнения (3.4)

Неравенство (3.10) задает в пространстве  $\mathbb{R}^3(\lambda_0, \mu_0, \theta)$  замкнутую ограниченную поверхность (рис. 4). Для точек, лежащих внутри этой поверхности, выполняется строгое неравенство (3.10) и существует два различных положительных корня  $h_1$  и  $h_2$ . Для точек, принадлежащих поверхности  $P = 0$ , существует единственный кратный положительный корень. Эта поверхность является дискриминантной поверхностью в пространстве  $\mathbb{R}^3(\lambda_0, \mu_0, \theta)$ . Конкретные параметры  $\lambda_0 > 0$ ,  $\mu_0 > 0$  течения соответствуют точке  $P_0(\lambda_0, \mu_0)$ . Отрезок перпендикуляра, восстановленного из точки  $P_0$ , находящейся в области  $P > 0$ , соответствует сферическому поясу  $I$ , а точки пересечения перпендикуляра с поверхностью  $P = 0$  определяют граничные параллели  $\Gamma_i$ :  $\theta = \theta_i$  ( $i = 1, 2$ ), где  $\theta_1 = \theta_*$  и  $\theta_2 = \pi - \theta_*$ . Эти кривые являются компонентами дискриминантной кривой  $L = \{\Gamma_i, i = 1, 2\}$  на сфере. Все сечения поверхности  $P = 0$  плоскостями  $\theta = \text{const}$  подобны.

На основании сказанного выше можно сделать следующие выводы.

Решение вида (3.2), (3.4) существует лишь для определенных значений параметров  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ , задаваемых неравенствами (3.9).

Течения газа, соответствующие решениям вида (3.2), (3.4), определены в некотором сферическом поясе  $I$ , симметричном относительно экватора.

Пояс  $I$  может быть сколь угодно широк, за исключением областей в виде малых дисков на полюсах сферы.

При допустимых фиксированных значениях параметров  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  существует два типа течения, соответствующих двум различным положительным корням  $h_1$  и  $h_2$  уравнения (3.4).

При одинаковой ширине пояса  $I$ , т. е. при фиксированном значении  $\theta_*$ , существуют различные течения, определяемые различными наборами параметров  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ .

Остается выяснить физический смысл дискриминантных кривых, являющихся границами области определения решения.

#### 4. ЗВУКОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ПРОСТЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ

Будем искать звуковые характеристики стационарных уравнений (1.1) на решениях вида (3.2), (3.4). Пусть эти характеристики задаются на сфере семейством кривых  $\chi(\theta, \varphi) = \text{const}$ . Тогда функция  $\chi$  удовлетворяет уравнению

$$v\chi_\theta + (\sin \theta)^{-1}w\chi_\varphi = \varepsilon cN_1, \quad (4.1)$$

где  $N_1 = (\chi_\theta^2 + (r \sin \theta)^{-2}\chi_\varphi^2)^{1/2}$ ;  $c = \sqrt{f_0 h}$ ;  $v, w, h$  — решение (3.2), (3.4).

Запишем уравнение характеристик в разрешенном относительно долготы виде  $\chi(\theta, \varphi) \equiv \varphi - f(\theta) = \text{const}$ . Тогда уравнение (4.1) сводится к уравнению

$$af'^2 - 2bf' + k = 0, \quad (4.2)$$

где

$$a = (v^2 - f_0h) \sin^2 \theta, \quad b = vw \sin \theta, \quad k = w^2 - f_0h.$$

Уравнения (4.2) принадлежат к классу неявных дифференциальных уравнений [10] (чаще используется менее точное их название — уравнения, не разрешенные относительно производной). Главной особенностью таких уравнений является неединственность решения, а также то, что решения определены лишь в некоторой области, граница которой представляет собой многообразие ветвления решений. Следует отметить, что исследование задач околосвуковой газовой динамики инициировало создание завершенной теории таких уравнений [11].

Уравнение (4.2) исследуется достаточно просто. При  $a \neq 0$  оно разрешается в виде

$$f' = \frac{vw \pm \sqrt{f_0h(v^2 + w^2 - f_0h)}}{(v^2 - f_0h) \sin \theta}. \quad (4.3)$$

Область определения решения уравнения (4.3) задается неравенством

$$v^2 + w^2 > f_0h, \quad (4.4)$$

описывающим область гиперболичности исходной стационарной системы (1.1) на данном решении. Используя интеграл Бернулли (3.3), получим

$$v^2 + w^2 = 2b_0 + (r_0^2/4) \sin^2 \theta - 2f_0h. \quad (4.5)$$

Сопоставляя (4.4) и (4.5), находим условие гиперболичности в виде

$$h < 2(b_0 + (r_0^2/8) \sin^2 \theta)/(3f_0). \quad (4.6)$$

При выполнении неравенства (4.6) течение является сверхкритическим, в противном случае — докритическим. Учитывая наличие двух режимов течения (3.2), (3.4), соответствующих корням  $h_1$  и  $h_2$ , и вид этих корней, можно сделать следующий вывод. Меньшему корню  $h_1 > 0$  уравнения (3.4) соответствует сверхкритическое (сверхзвуковое) течение, а большему  $h_2$  — докритическое (дозвуковое).

Уравнение (4.2) вырождается при  $a = 0$ , т. е. при  $v^2 = f_0h$ . В этом случае оно описывает звуковые характеристики вида  $\theta = \theta_0$ , являющиеся параллелями на сфере. Таким образом, имеется два типа звуковых характеристик на решениях вида (3.2), (3.4). Этот вывод следует из общей теории неявных дифференциальных уравнений, а именно из теоремы Чибрарио [10]. Параллели  $\theta = \theta_i$  задают на сфере дискриминантные кривые, определяющие границы области определения решения. Из каждой точки  $P$  такой кривой выходит пара звуковых характеристик (4.3), образующих в точке  $P$  “клювик” — особенность типа полукубической параболы Нейля.

Можно доказать, что дискриминантная кривая  $L = 0$  задает на сфере звуковые характеристики. Уравнения дискриминантной кривой  $L = 0$ :

$$h^3 - \alpha h^2 + \beta h = 0, \quad 3h^2 - 2\alpha h = 0. \quad (4.7)$$

При  $h \neq 0$  из второго уравнения в (4.7) следует  $\alpha = 3h/2$ . Подставляя это выражение в первое уравнение в (4.7), на граничных параллелях  $\Gamma_i$  получаем  $h = (2\beta)^{1/3}$ , что совпадает с решением уравнения  $v^2 = f_0h$ , задающего звуковые характеристики вида  $\theta = \theta_i$ .

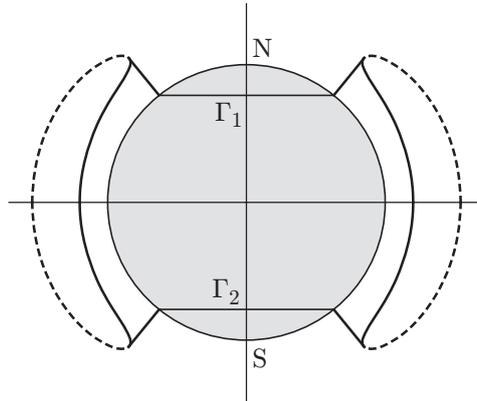


Рис. 5. Типичные профили глубины на сфере:  
сплошные линии — сверхкритическое течение; штриховые — докритическое течение

Вычислим производную  $h'$  в точках дискриминантной кривой:

$$h' = \frac{\alpha' h^2 - \beta'}{3h(h - 2\alpha/3)} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad h \rightarrow \frac{2\alpha}{3}. \quad (4.8)$$

Согласно (4.8) на граничных параллелях  $L = \{\Gamma_i, i = 1, 2\}$ , являющихся компонентами дискриминантной кривой  $L$ , решение (3.2), (3.4) претерпевает градиентную катастрофу. В силу интеграла Бернулли (3.4) сами функции  $v$ ,  $w$ ,  $h$  ограничены. Неограниченность производной (4.8) можно трактовать как наличие источника и стока на параллелях  $\Gamma_i$ : глубина  $h$  возрастает при удалении от кривой  $\Gamma_1$  начиная с некоторого значения и, напротив, убывает до этого значения в малой окрестности параллели  $\Gamma_2$  (рис. 5).

Таким образом, границы  $\Gamma_i$  сферического пояса  $I$ , в котором определено решение (3.2), (3.4), являются звуковыми характеристиками. Одна из этих параллелей, например  $\Gamma_1$ , является источником для данного течения, вторая  $\Gamma_2$  — стоком.

## 5. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Уравнение линий тока течения

$$\frac{d\theta}{v} = \frac{\sin \theta d\varphi}{w}$$

на решении (3.2), (3.4) приводится к виду

$$\varphi = \frac{1}{q_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{h(\theta)(w_0 - (r_0/2) \sin^2 \theta)}{\sin \theta} d\theta, \quad (5.1)$$

где  $(0, \theta_0)$  — стартовая точка на граничной параллели, например  $\Gamma_1$ , из которой выходит линия тока (5.1). В силу вращательной симметрии решения любая линия тока получается из линии тока (5.1) поворотом ее на угол  $\varphi_0$ . На рис. 6 представлены картины течений, полученные в результате численного интегрирования уравнения (5.1) при различных значениях параметра  $r_0/(2w_0)$ .

Наличие двух решений, соответствующих двум корням  $h_1$  и  $h_2$  уравнения (3.3), позволяет построить решение в виде ячейки. Движение, являющееся, например, сверхкритическим (меньший корень  $h_1$ ), начинается из параллели источника  $\Gamma_1$  и заканчивается на

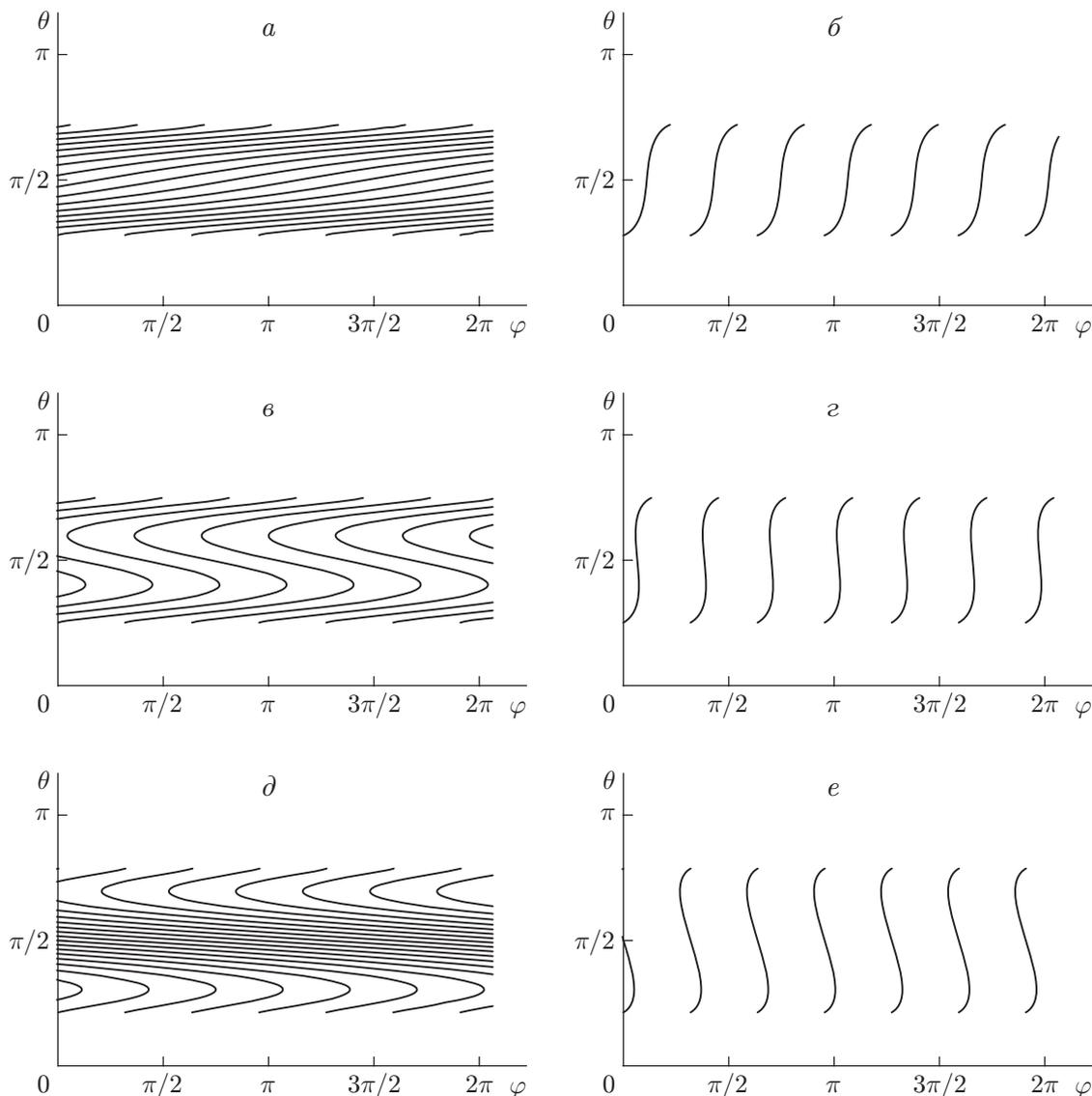


Рис. 6. Линии тока для докритического (а, в, д) и сверхкритического (б, г, е) режимов:  
 а, б —  $r_0/(2w_0) = 0,9$ ; в, г —  $r_0/(2w_0) = 1,1$ ; д, е —  $r_0/(2w_0) = 1,5$

параллели  $\Gamma_2$ , соответствующей стоку. В свою очередь параллель  $\Gamma_2$  является источником для докритического течения, соответствующего большему корню  $h_2$ , при этом газ течет в противоположном направлении, стекая в сток, расположенный вдоль параллели  $\Gamma_1$ .

При  $w_0 > 0$  особенностью решения является возможность обращения в нуль окружной компоненты вектора скорости  $w$  на некоторых параллелях  $\theta = \theta_0, \pi - \theta_0$ , расположенных симметрично относительно экватора. Согласно (3.2) это происходит при  $2w_0/r_0 < 1$  для значений  $\theta_0$ , являющихся решением уравнения

$$\sin \theta_0 = \sqrt{2w_0/r_0}. \tag{5.2}$$

Если уравнение (5.2) имеет решение, то окружная компонента вектора скорости меняет знак при переходе через параллели  $\theta = \theta_0, \pi - \theta_0$ , течение меняет направление по долготе на противоположное (с западного на восточное или наоборот).

## 6. ОБРАЗОВАНИЕ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ПОЯСОВ

В предельном случае, когда параметр  $\mu = r_0/b_0$  является малым, область определения решения может разделяться на два сферических пояса.

Отбрасывая в интеграле Бернулли (3.3) член с  $\mu^2$ , получаем

$$v^2 + w^2 + h = 1.$$

Сохраним прежние обозначения функций, считая, что соответствующее растяжение уже выполнено. Тогда представления для скоростей задаются формулами

$$v = \frac{v_0}{h \sin \theta}, \quad w = \frac{w_0}{\sin \theta} + \beta_0 \sin \theta.$$

Уравнение (3.4) принимает вид

$$h^3 - \left(1 - \left(\frac{w_0}{\sin \theta} + \beta_0 \sin \theta\right)^2\right) h^2 + \frac{v_0^2}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (6.1)$$

В пространстве  $\mathbb{R}^3(v_0, w_0, \theta)$  неравенство

$$\begin{aligned} & -64 \sin^6 \theta + (432v_0^2 + 192w_0^2) \sin^4 \theta - 192w_0^4 \sin^2 \theta + 64w_0^6 + \\ & + (192w_0 \sin^6 \theta - 384w_0^3 \sin^4 \theta + 192w_0^5 \sin^2 \theta) \beta_0 + \\ & + (48 \sin^8 \theta - 288w_0^2 \sin^6 \theta + 240w_0^4 \sin^4 \theta) \beta_0^2 + (-96w_0 \sin^8 \theta + 160w_0^3 \sin^6 \theta) \beta_0^3 + \\ & + (-12 \sin^{10} \theta + 60w_0^2 \sin^8 \theta) \beta_0^4 + (12w_0 \sin^{10} \theta) \beta_0^5 + (\sin^{12} \theta) \beta_0^6 < 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

задает область существования двух вещественных положительных корней уравнения (6.1) (аналог области, задаваемой неравенством (3.10) в пространстве  $\mathbb{R}^3(\mu_0, \lambda_0, \theta)$ ). При этом важную роль играет следующее утверждение.

**Лемма.** *Заменой  $w_0 \rightarrow w_0 - (\beta_0/2) \sin^2 \theta$  неравенство (6.2) сводится к неравенству*

$$-4 \sin^6 \theta + (27v_0^2 + 12w_0^2) \sin^4 \theta - 12w_0^4 \sin^2 \theta + 4w_0^6 < 0.$$

*То же неравенство получается из (6.2), если положить  $\beta_0 = 0$ .*

Геометрический смысл леммы следующий: в пространстве  $\mathbb{R}^3(v_0, w_0, \theta)$  область существования решения для вращающейся сферы получается из области существования решения для неподвижной сферы сдвигом сечений  $\theta = \text{const}$  вдоль оси  $w_0$  по закону, указанному в лемме. При этом полюсы  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  остаются неподвижными.

Пусть  $v_0 \neq 0$  и  $w_0 < 0$ . При увеличении параметра  $\beta_0$  вид поверхности  $S$ , задаваемой равенством (6.2), изменяется:

- 1) при небольших значениях  $\beta_0$  сферический пояс  $I$  расширяется с ростом  $\beta_0$ ;
- 2) при некотором значении  $\beta_0 = \beta_0^k$  поверхность  $S$  становится невыпуклой в направлении оси  $\theta$ ;
- 3) при дальнейшем увеличении параметра  $\beta_0$  область течения распадается на два сферических пояса  $I_1$  и  $I_2$ , расположенных в разных полушариях симметрично относительно экватора;
- 4) далее при увеличении значения  $\beta_0$  сферические пояса  $I_1, I_2$  смещаются к полюсам и их ширина уменьшается. При некотором критическом значении параметра  $\beta_0 = \beta_0^c$  пояса исчезают, модель перестает работать.

На рис. 7 показана поверхность  $S$  при различных значениях  $\beta_0$ .

В п. 5 построено решение в виде циркуляционной ячейки. При наличии двух поясов в разных полушариях, в которых определено решение, можно построить течение в виде симметричных циркуляционных ячеек (рис. 8).

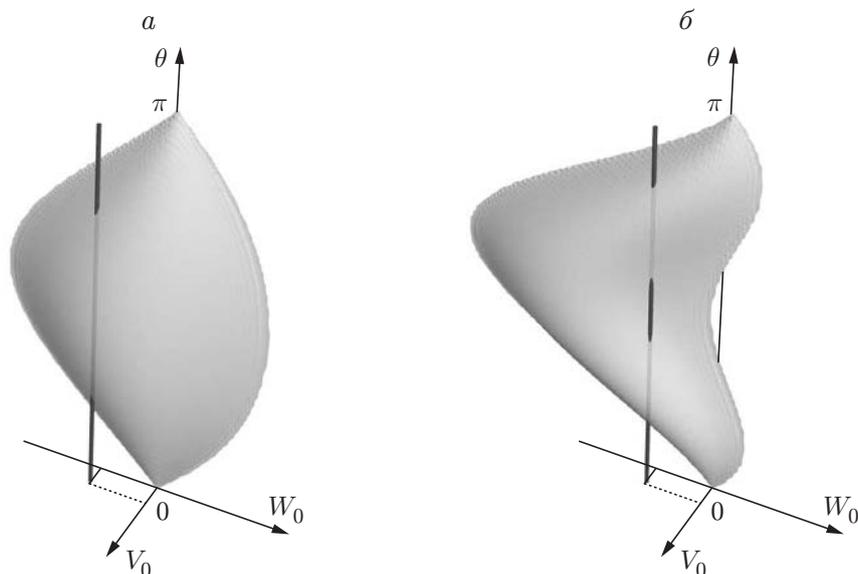


Рис. 7. Поверхность  $S$  при различных значениях параметра  $\beta_0$ :  
 $a - \beta_0 < \beta_0^k$ ;  $b - \beta_0^k < \beta_0 < \beta_0^c$

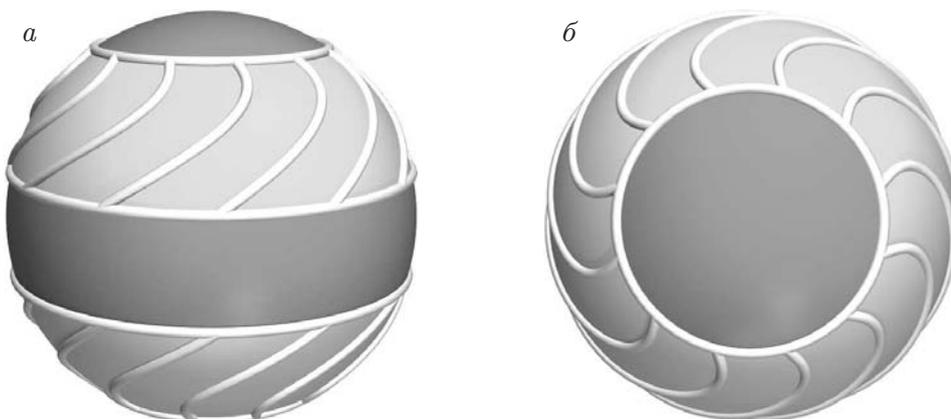


Рис. 8. Симметричные циркуляционные ячейки:  
 $a -$  вид сбоку;  $b -$  вид со стороны полюса

Такие пары ячеек моделируют ячейки Гадлея, Ферреля и полярные ячейки [12], которые являются крупномасштабными (планетарными) течениями, обеспечивающими циркуляцию воздуха в атмосфере преимущественно в меридиональном направлении. Из области экватора, где давление пониженное, воздух движется в область тропиков с более высоким давлением (на север и юг соответственно для северной и южной ячеек). При достижении некоторого максимального давления возникает течение в противоположном направлении, в котором давление уменьшается по мере приближения к экватору. Вращение приводит к отклонению линий тока от меридионального направления. В модели мелкой воды эти два течения можно представить происходящими на разных глубинах. Действительно, из анализа характеристик (см. п. 4) следует, что сверхкритические течения определены при меньших  $h$ , а докритические — при бóльших. Таким образом, для экваториальных ячеек в нижнем подслое ячейки происходит сверхкритическое движение газа на север, а в верхнем докритическом — в противоположном направлении.

Авторы выражают благодарность Л. В. Овсянникову за содержательное обсуждение представленных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 1. Вывод и общие свойства // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 24–36.
2. **Педлоски Дж.** Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.
3. **Vila N., Mansfield E. L., Clarkson P. A.** Symmetry group analysis of the shallow water and semi-geostrophic equations // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2005. V. 59, N 1. P. 95–123.
4. **Чесноков А. А.** Симметрии и точные решения уравнений мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 41–54.
5. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
6. **Курант Р.** Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964.
7. **Арнольд В. И.** Волновые фронты и топология кривых. М.: Фазис, 2002.
8. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Модель мелкой воды на сфере и ее подмодели // Тез. докл. Междунар. конф. “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”, Новосибирск, 27–31 мая 2005 г. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2005. С. 87–88.
9. **Прасолов В. В.** Многочлены. М.: Моск. центр непрерывного мат. образования, 1999.
10. **Арнольд В. И.** Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевск. респ. тип., 2000.
11. **Кузьмин А. Г.** Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1990.
12. **Атмосфера** (справочные данные, модели). Л.: Гидрометеоздат, 1991.

*Поступила в редакцию 29/X 2007 г.,  
в окончательном варианте — 4/IV 2008 г.*

---