

УДК 539.375

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЧНОГО ЗАКРЫТИЯ ТРЕЩИН В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, УСИЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТРИНГЕРОВ

М. В. Мир-Салим-заде

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан
E-mail: irakon63@hotmail.com

Построена математическая модель частичного закрытия трещины в перфорированной изотропной среде с системой инородных прямолинейных включений. Такая среда может быть интерпретирована как неограниченная пластина, усиленная регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники. Считается, что среда ослаблена периодической системой круговых отверстий и прямолинейных трещин. Определение неизвестных контактных напряжений и размеров зон контакта сводится к решению сингулярного интегрального уравнения, которое с помощью процедуры алгебраизации сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, решаемой методом последовательных приближений.

Ключевые слова: перфорированная усиленная пластина, стрингеры, трещины, зона контакта, контактные напряжения.

Как известно, одним из эффективных способов замедления роста трещин является использование подкрепляющих элементов жесткости на пути распространения трещины [1, 2]. В теории разрушения большое значение имеет проблема “залечивания” существующей в теле трещины. Первым этапом решения этой проблемы является решение задачи о закрытии вскрытой трещины.

1. Постановка задачи. Результаты, полученные в работах [1–3], показывают, что использование укрепляющих элементов позволяет уменьшить деформацию растягиваемой пластины в направлении, перпендикулярном линии расположения трещины, а следовательно, и коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины. При некотором соотношении физических и геометрических параметров усиленной пластины появляются зоны сжимающих напряжений, в которых на некотором участке берега трещины взаимодействуют, что вызывает появление контактных напряжений.

Рассмотрим упругую изотропную среду с периодической системой круговых отверстий радиусом λ , контуры которых свободны от внешних усилий. К пластине приклепаны поперечные ребра жесткости из другого упругого материала с площадью поперечного сечения A_s .

Выбранная система декартовых координат и используемые обозначения приведены на рис. 1. На бесконечности усиленная пластина подвергнута однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$.

Считается, что при деформировании толщина стрингера не меняется, а напряженное состояние является одноосным. Стрингеры не подвергаются изгибу и работают лишь на растяжение.

с учетом геометрии области D , занятой средой, напряжения являются периодическими функциями с периодом ω .

Под действием внешней растягивающей нагрузки σ_0 и сосредоточенных сил F_{mn} ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$), подлежащих определению в ходе решения задачи, на некоторых участках области сжимающих напряжений берега трещины взаимодействуют, что способствует появлению контактных напряжений на рассматриваемых участках. Вне данных участков берега трещины свободны от напряжений.

Параметры l_1 , l границы области контакта берегов трещины должны быть определены в ходе решения задачи. Следует отметить, что в рассматриваемой задаче зона взаимодействия берегов трещины всегда начинается в концевой точке трещины, находящейся в области сжимающих напряжений.

Задача заключается в разработке математической модели, позволяющей определить контактные напряжения на участках $(-l + m\omega, -l_1 + m\omega)$ и $(l_1 + m\omega, l + m\omega)$, величины сосредоточенных сил F_{mn} ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$) и напряженно-деформированное состояние вне круговых отверстий и трещин.

Рассмотрим примыкающие к вершинам трещины участки длиной $l_0 = l - l_1$ (концевые зоны контакта), на которых берега трещины взаимодействуют. Следует отметить, что взаимодействие берегов трещин препятствует раскрытию трещин.

В концевых зонах, где берега трещины контактируют, возникают нормальные напряжения $p(x)$. Значения этих контактных напряжений и размер зоны контакта заранее неизвестны и подлежат определению при решении задачи. В рассматриваемом случае на поверхности каждой трещины имеется две зоны: концевая зона контакта и зона, в которой берега трещины свободны от нагрузок.

Граничные условия на берегах трещин имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{на } L', \\ \sigma_y = p(x), \quad \tau_{xy} = 0, \quad v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = 0 \quad \text{на } L''. \end{aligned}$$

Здесь L' — совокупность свободных от нагрузок зон на поверхности трещин; L'' — совокупность концевых зон, в которых берега трещины взаимодействуют; $v^+(x, 0) - v^-(x, 0)$ — раскрытие берегов трещины; σ_x , σ_y , τ_{xy} — компоненты тензора напряжений; u , v — составляющие вектора смещения по осям x , y соответственно.

Граничные условия задачи на контурах круговых отверстий имеют вид

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0.$$

На основании формул [4]

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad z = x + iy, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = (\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta}) e^{-2i\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{aligned}$$

и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах трещин решение задачи сводится к определению двух аналитических в области D функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0; \quad (1.1)$$

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} = f, \quad (1.2)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); x — аффикс точек берегов трещины; $f = 0$ на L' и $f = p(x)$ на L'' .

2. Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z). \quad (2.1)$$

Здесь комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ определяют поля напряжений и деформаций в сплошной подкрепленной пластине под действием растягивающего напряжения σ_0 и сосредоточенных сил F_{mn} :

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{4} \sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right), \quad (2.2)$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{i\varkappa_0}{2\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right) + \frac{i}{2\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left(\frac{\bar{C}_3}{C_2^2} - \frac{C_3}{C_1^2} \right).$$

Здесь $C_1 = z - mL + iny_0$; $C_2 = z - mL - iny_0$; $C_3 = mL + iny_0$; h — толщина пластины; $\varkappa_0 = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν — коэффициент Пуассона материала пластины; штрих у знака суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = n = 0$.

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, соответствующие неизвестным нормальным смещениям вдоль трещины, будем искать в явном виде:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \quad (2.3)$$

$$\Psi_1(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \quad L_1 = [-l, -\lambda] + [\lambda, l].$$

Здесь искомая функция $g(x)$ характеризует производную раскрытия берегов трещины

$$\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)]$$

(μ — модуль сдвига усиленной пластины).

Для того чтобы найти комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$, граничное условие (1.1) представим в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = f_1(\theta) + if_2(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta), \quad (2.4)$$

где

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_0(\tau) - \overline{\Phi_0(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta}; \quad (2.5)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \overline{\Phi_1(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (2.6)$$

Комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ будем искать в виде

$$\Phi_2(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (2.7)$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

где

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 \sin^{-2} \left(\frac{\pi}{\omega} z \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2, \quad S(z) = \sum'_{m,n} \left(\frac{P_m}{(z - P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right).$$

Из условий симметрии относительно координатных осей получаем

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k+2} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k+2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Соотношения (2.1)–(2.3), (2.7) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Из условия постоянства главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области D , следует

$$\alpha_0 = \pi^2 \beta_2 \lambda^2 / 24.$$

Неизвестные коэффициенты α_{2k} , β_{2k} должны быть определены из краевого условия (2.4). Будем считать, что функции $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ и $\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)$ на контуре $|\tau| = \lambda$ разлагаются в ряды Фурье. В силу симметрии эти ряды имеют вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0, \quad (2.8)$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) + if_2(\theta)) e^{-2ik\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im } B_{2k} = 0, \quad (2.9)$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)) e^{-2ik\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив (2.5) в (2.8), после вычисления интегралов с помощью теории вычетов получим

$$A_0 = -\frac{1}{2} \sigma_0 + \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \frac{2ny_0}{C_3 \bar{C}_3},$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left(\frac{\lambda^2 \sin 3\varphi_3}{\rho_1^3} + \frac{\varkappa_0 \sin \varphi_3}{\rho_1} - \frac{\sin 3\varphi_3}{\rho_1} \right),$$

$$A_{2k} = \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa_0)} \left[\sum'_{m,n} F_{mn} \left(\frac{\lambda^{2k} \sin (2k+1)\varphi_3}{\rho_1^{2k+1}} + \frac{(-2)(-3) \cdots (-2k) \lambda^{2k} \sin (2k+1)\varphi_3}{(2k-1)! \rho_1^{2k+1}} - \frac{\varkappa_0 \lambda^{2k-2} \sin (2k-1)\varphi_3}{\rho_1^{2k-1}} + \frac{(-2)(-3) \cdots (1-2k) \lambda^{2k-2} \sin (2k+1)\varphi_3}{(2k-1)! \rho_1^{2k-1}} \right) \right] \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$A_{-2k} = \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \frac{\lambda^{2k} \sin (2k+1)\varphi_3}{\rho_1^{2k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\rho_1 = \sqrt{C_3 \bar{C}_3}, \quad \varphi_3 = \arctg \frac{ny_0}{mL}.$$

Аналогично, подставив (2.6) с учетом (2.3) в (2.9), после вычисления интегралов с помощью теории вычетов находим

$$B_{2k} = -\frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt,$$

где

$$f_0(t) = 2\gamma(t), \quad f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t), \quad \gamma(t) = \text{ctg} \frac{\pi}{\omega} t,$$

$$f_{2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Неизвестная функция $g(x)$ и коэффициенты α_{2k} , β_{2k} определяются из краевых условий (1.2), (2.4). Так как выполняются условия периодичности, то система граничных условий (2.4) вырождается в одно функциональное уравнение, например на контуре L_0 ($\tau = \lambda e^{i\theta}$), а система краевых условий (1.2) — в граничное условие на линии L_1 .

Для того чтобы построить уравнения относительно коэффициентов α_{2k} и β_{2k} функций $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$, разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки $z = 0$. Подставляя в левую часть граничного условия (2.4) на контуре $z = \lambda \exp(i\theta)$ вместо $\Phi_2(z)$, $\overline{\Phi_2(z)}$, $\Phi_2'(z)$ и $\Psi_2(z)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности точки $z = 0$, а в правую часть (2.4) вместо функций $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ и $\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)$ ряды Фурье (2.8), (2.9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, имеем две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} . После ряда преобразований получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k+2} :

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

Здесь

$$b_0 = M_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} M_{-2k-2},$$

$$b_j = M_{2j+2} - \frac{(2j+1)M_0 g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{K_1 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} M_{-2k-2},$$

$$A_{j,k} = (2j+1)\gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2}, \quad K_1 = 1 - \frac{\pi^2}{12} \lambda^2, \quad g_j = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}},$$

$$\gamma_{0,0} = \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{j,k} = & -\frac{(2j+2k+2)!g_{k+j+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)!g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} + \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)!g_{j+i+1}g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)! 2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k}, \end{aligned}$$

$$b_{0,k} = 0, \quad b_{j,0} = 0, \quad b_{j,k} = \frac{g_{j+1}g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left(1 + \frac{2K_2 \lambda^2}{K_1} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots),$$

$$K_2 = \pi^2/24, \quad M_{2k} = A_{2k} + B_{2k}.$$

Постоянные β_{2k+2} определяются из следующих соотношений:

$$\beta_2 = \frac{1}{K_1} \left(-M_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right),$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3) \alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - M_{-2j-2}. \quad (2.11)$$

Потребовав, чтобы функции (2.1) удовлетворяли краевому условию (1.2), после ряда преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = f(x). \quad (2.12)$$

Здесь $H(x) = \Phi_*(x) + \overline{\Phi_*(x)} + x\Phi'_*(x) + \Psi_*(x)$; $\Phi_*(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x)$; $\Psi_*(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x)$.

Сингулярное интегральное уравнение (2.12), а также алгебраические системы (2.10), (2.11) содержат неизвестные величины сосредоточенных сил F_{mn} ($m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$). Для определения величины сосредоточенной силы F_{mn} используем закон Гука и метод “склеивания” двух асимптотик искомого решения. Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы F_{mn} , действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, равна

$$F_{mn} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{m,n} \quad (m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots).$$

Здесь E_s — модуль Юнга материала стрингера; $2y_0 n$ — расстояние между точками крепления; $\Delta v_{m,n}$ — относительное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через a_0 радиус точек крепления (площадки сцепления). Примем естественное допущение о том, что в рассматриваемой задаче теории упругости относительное упругое смещение точек $z = mL + i(ny_0 - a_0)$ и $z = mL - i(ny_0 - a_0)$ равно относительному смещению точек крепления $\Delta v_{m,n}$. Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет найти решение поставленной задачи.

С помощью комплексных потенциалов (2.1)–(2.3), (2.7) и формулы Колосова — Мухелишвили для перемещений [4] находим относительное смещение $\Delta v_{m,n}$:

$$\Delta v_{p,r} = \Delta v_{p,r}^{(0)} + \Delta v_{p,r}^{(1)} + \Delta v_{p,r}^{(2)}. \quad (2.13)$$

Здесь

$$\Delta v_{p,r}^{(0)} = \frac{1}{2\pi h \mu (1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left(\varkappa_0 \ln \frac{(p-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p-m)^2 L^2 + C^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(r-n)y_0 C [2p(p-m)L^2 + a_0 C]}{[(p-m)^2 L^2 + C^2][(p-m)^2 L^2 + a_0^2]} \right) + \frac{\sigma_0}{4\mu} (1 + \varkappa_0)(ry_0 - a_0),$$

$$\Delta v_{p,r}^{(1)} = \frac{1 + \varkappa_0}{\mu} \left\{ \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left[\operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-pL) \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} C \right) - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi p L}{\omega} \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} C \right) \right] dt \right\} - \\ - \frac{C}{\mu} \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left(\frac{\sin^2 \alpha_1 (\operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1)}{\sin^2 \alpha_1 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} \right) dt,$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{p,r}^{(2)} = & \frac{1}{\mu} \left((\varkappa_0 - 1)(ry_0 - a_0)a_0 + (1 + \varkappa_0) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} + \right. \\ & + (\varkappa_0 - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha + \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+2k+2}{2j+1} r_{j,k} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha \right), \end{aligned}$$

$$C = (r - n)y_0 - a_0, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{\omega} (t - pL), \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{ry_0 - a_0}{pL},$$

$$\rho_2^2 = (pL)^2 + (ry_0 - a_0)^2, \quad r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}}, \quad r_{0,0} = 0.$$

Искомая величина силы F_{mn} определяется с помощью формул (2.13) из бесконечной системы

$$F_{pr} = \frac{E_s A_s}{2y_0 r} \Delta v_{p,r} \quad (p = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots), \quad (2.14)$$

которая вследствие периодичности задачи вырождается в одну бесконечную алгебраическую систему.

Итак, уравнение (2.14), алгебраические системы (2.10), (2.11) и сингулярное интегральное уравнение (2.12) связаны и должны решаться совместно. Решая их с учетом отсутствия раскрытия берегов трещины в концевой зоне и ограниченности контактных напряжений, найдем искомую функцию $p(x)$ и величину F_{mn} и определим зону контакта берегов трещины.

3. Численное решение задачи и анализ результатов. Используя разложение

$$\frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z = \frac{1}{z} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{z^{2j+1}}{\omega^{2j+2}},$$

уравнение (2.12) можно привести к стандартному виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) K(t-x) dt + H(x) = f(x), \quad (3.1)$$

где

$$K(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}.$$

Учитывая, что функция $g(x)$ нечетная, преобразуем интегральное уравнение (3.1) к виду более удобному для нахождения приближенного решения:

$$\frac{2}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi^2 - \xi_0^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 K_0(\xi, \xi_0) g(\xi) d\xi + H(\xi_0) = f(\xi_0). \quad (3.2)$$

Здесь

$$K_0(\xi, \xi_0) = K(\xi - \xi_0) + K(\xi + \xi_0), \quad g(t) = p(\xi), \quad \xi = \frac{t}{l}, \quad \xi_0 = \frac{x}{l}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{l},$$

$$H(\xi_0) = \Phi_*(\xi_0 l) + \overline{\Phi_*(\xi_0 l)} + (\xi_0 l) \Phi'_*(\xi_0 l) + \Psi_*(\xi_0 l).$$

Выполним замену переменных:

$$\xi^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2.$$

При этом отрезок интегрирования $[\lambda_1, 1]$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, а преобразованное уравнение (3.2) принимает стандартный вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_*(\tau)}{\tau - \eta} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_*(\tau) B(\eta, \tau) d\tau + H_*(\eta) = f_*(\eta), \quad (3.3)$$

где

$$g_*(\tau) = g(\xi), \quad H_*(\eta) = H(\xi_0), \quad f_*(\eta) = f(\xi_0),$$

$$B(\eta, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} u_0^j A_j^*,$$

$$A_j^* = 2j + 1 + \frac{(2j + 1)2j(2j - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{u}{u_0} + \dots$$

$$\dots + \frac{(2j + 1)2j(2j - 1) \dots [2j + 1 - (2j + 1 - 1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2j + 1)} \left(\frac{u}{u_0}\right)^j.$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (3.3) представим в виде [5, 6]

$$g_*(\eta) = g_0(\eta) / \sqrt{1 - \eta^2}. \quad (3.4)$$

Здесь функция $g_0(\eta)$ непрерывна по Гельдеру на отрезке $[-1, 1]$. Функция $g_0(\eta)$ заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам:

$$L_n[g_0; \eta] = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} g_k^0 \frac{\cos M\theta \sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k}. \quad (3.5)$$

Здесь

$$g_k^0 = g_*(\eta_k), \quad \eta = \cos \theta, \quad \eta_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m - 1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M).$$

Используя формулу (3.5) и соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos M\tau}{\cos \tau - \cos \theta} d\tau = \frac{\sin M\theta}{\sin \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{F(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} d\tau = \frac{\pi}{M} \sum_{k=1}^M F(\cos \theta_k),$$

получаем квадратурные формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_*(\tau)}{\tau - \eta} d\tau &= \frac{1}{M \sin \theta} \sum_{k=1}^M g_k^0 \sum_{m=0}^{M-1} \cos m\theta_k \sin m\theta, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_*(\tau) B(\eta, \tau) d\tau &= \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M g_k^0 B(\eta, \tau_k), \end{aligned} \tag{3.6}$$

использование которых позволяет свести интегральное уравнение (3.3) к системе алгебраических уравнений относительно приближенных значений g_k^0 искомой функции в узловых точках. В рассматриваемой задаче один конец трещины выходит на поверхность свободного отверстия. Напряжения на этом конце трещины ограничены. После ряда преобразований интегральное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M a_{m,k} g_k^0 + \frac{1}{2} H_*(\eta_m) &= f_*(\eta_m), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1, \\ \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} g_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} &= 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$a_{m,k} = \frac{1}{2M} \left(\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\tau_m, \eta_k) \right).$$

В правые части системы (3.7) входят неизвестные значения контактных напряжений $f_*(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих концевой контактной зоне. Условием, позволяющим определить неизвестные контактные напряжения, возникающие на берегах трещины в концевых контактных зонах, является отсутствие раскрытия трещины в этих зонах (второе условие на L''). В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее записать для производной раскрытия перемещений берегов трещины

$$g(x) = \frac{2\mu}{1 + \nu_0} \frac{\partial}{\partial x} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)] = 0, \tag{3.8}$$

где x — аффикс точек берегов концевой контактной зоны трещины (l_1, l) .

Потребовав выполнения условий (3.8) в узловых точках, содержащихся в концевой зоне (l_1, l) , получим недостающие уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений $p(t_{m_1})$ в узловых точках:

$$g(t_{m_1}) = 0, \quad m_1 = 1, 2, \dots, M_1 \tag{3.9}$$

(M_1 — число узловых точек, принадлежащих концевой контактной зоне трещины).

Для замыкания системы (2.10), (2.11), (2.14), (3.7), (3.9) необходимо еще одно уравнение, определяющее размер концевой зоны. Размер концевой контактной зоны определяется из условия конечности напряжений в окрестности вершины $x = \pm l$ трещины. Записывая условие конечности напряжений в точке $x = \pm l$, получаем недостающее уравнение в виде

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_k^0 \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \tag{3.10}$$

Поскольку размер концевой зоны контакта неизвестен, алгебраическая система (2.10), (2.11), (2.14), (3.7), (3.9), (3.10) является нелинейной. При заданной внешней растягива-

ющей нагрузке полученные системы уравнений относительно α_{2k} , β_{2k} , g_k^0 , F_{mn} , $p(t_{m_1})$ и l_1 позволяют определить напряженно-деформированное состояние перфорированной изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров, при наличии трещин с частично контактирующими берегами, контактные напряжения, а также размер концевой зоны контакта. Для решения полученных алгебраических систем (2.10), (2.11), (2.14), (3.7), (3.9), (3.10) использовался метод последовательных приближений, суть которого заключается в следующем. При некотором значении l_{1*} решается система (2.10), (2.11), (2.14), (3.7), (3.9) относительно неизвестных α_{2k} , β_{2k} , $g_1^0, g_2^0, \dots, g_M^0$, p_1, p_2, \dots, p_{M_1} и $N_1 \times N_2$ неизвестных сосредоточенных сил. Значения l_{1*} и найденные величины подставляются в (3.10). Выбранное значение параметра l_{1*} , соответствующие значения α_{2k} , β_{2k} , $g_1^0, g_2^0, \dots, g_M^0$, p_1, p_2, \dots, p_{M_1} и сосредоточенные силы, вообще говоря, не удовлетворяют уравнению (3.10) системы. Поэтому вычисления повторяются с другими значениями параметра l_{1*} , до тех пор пока уравнение (3.10) не будет выполняться с заданной точностью.

Расчеты проводились при следующих геометрических параметрах подкрепленной пластины: $\nu = 0,3$, $\varepsilon_1 = a_0/L = 0,01$, $\varepsilon = y_0/L = 0,15; 0,25$, $E = 7,1 \cdot 10^4$ МПа (сплав В95), $E_s = 11,5 \cdot 10^4$ МПа (композит алюминий — сталь), $A_s/(y_0h) = 1$. Число стрингеров и точек крепления принималось конечным: 6, 10, 14.

Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений $p(x)$ от размера трещины и геометрических параметров задачи.

На рис. 2 представлены результаты расчетов контактных напряжений p/σ_0 в концевой зоне при различной длине трещин. В расчетах использовались безразмерные координаты x' :

$$x = \frac{l + l_1}{2} + \frac{l - l_1}{2} x'.$$

Наибольшие значения контактных напряжений имеют место в середине контактной зоны, где берега трещины смыкаются.

На рис. 3 приведена зависимость параметра $l_0/(l_1 - \lambda)$ от длины трещины l/L . Зависимость длины концевой контактной зоны $l_0/(l_1 - \lambda)$ от безразмерной интенсивности растягивающей внешней нагрузки σ_0/σ_s при различных значениях радиуса отверстия λ представлена на рис. 4.

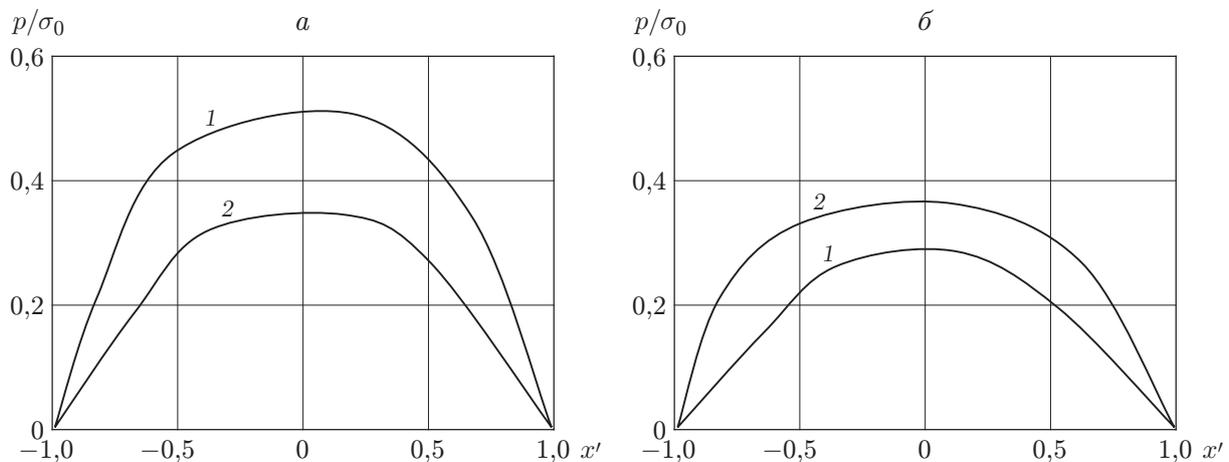


Рис. 2. Распределение контактных напряжений вдоль концевой зоны трещины при $\varepsilon = 0,25$:

a — $l_* = l/L = 0,7$, b — $l_* = l/L = 0,5$; 1 — $\lambda = 0,3$, 2 — $\lambda = 0,5$

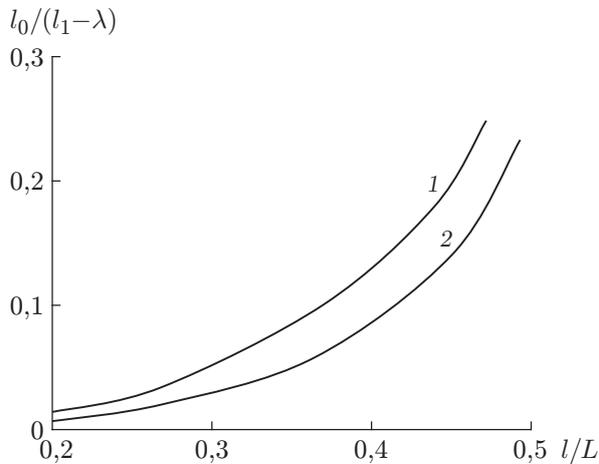


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость величины $l_0/(l_1 - \lambda)$ от безразмерной длины трещины l/L при $\varepsilon = 0,25$:

1 — $l/\lambda = 1,5$, 2 — $l/\lambda = 1,25$

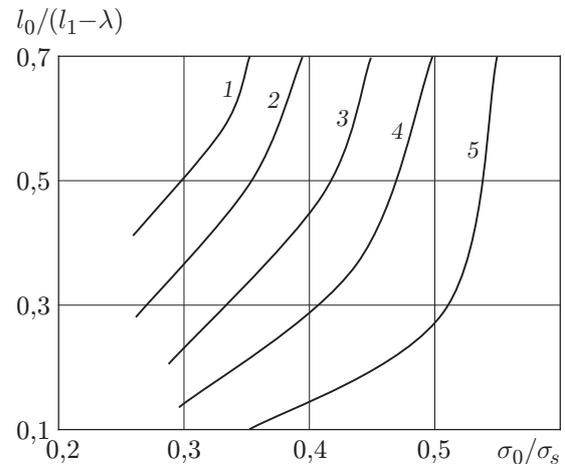


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость величины $l_0/(l_1 - \lambda)$ от безразмерной интенсивности растягивающей внешней нагрузки σ_0/σ_s при различных значениях радиуса отверстия λ :

1 — $\lambda = 0,5$; 2 — $\lambda = 0,4$; 3 — $\lambda = 0,3$; 4 — $\lambda = 0,2$; 5 — $\lambda = 0,1$

Результаты расчетов показывают: чем чаще расположены точки крепления, тем больше размер концевой зоны контакта трещин.

Анализ модели частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой поперечных стрингеров, сводится к параметрическому исследованию алгебраических систем (2.10), (2.11), (2.14), (3.7), (3.9), (3.10) при различных геометрических и физических параметрах задачи. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определять расположение стрингеров и точек их крепления, а также напряженное состояние пластины, которые соответствуют заданной области контакта берегов трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Финкель В. М.** Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977.
2. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1985.
3. **Мирсалимов В. М.** Некоторые задачи конструкционного торможения трещин // Физ.-хим. механика материалов. 1986. Т. 22, № 1. С. 94–98.
4. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. Киев: Наук. думка, 1976.
6. **Мирсалимов В. М.** Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.