

ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

И. Н. Щелчкоза

(Москва)

Вычислены главные компоненты тензора эффективной теплопроводности, характеризующего стационарный макроперенос тепла в сплошной среде с диспергированными эллипсоидальными частицами другого вещества, на основе метода, предложенного в [1]. В качестве примера рассмотрены случаи эллипсоидов, ориентированных в одном направлении, и распределенных изотропно.

1. Рассмотрим однородный в среднем материал, состоящий из сплошной среды с теплопроводностью λ_1 , содержащей частицы другого вещества с теплопроводностью λ_2 . Предполагается, что частицы одинаковы и имеют форму эллипсоидов вращения с выделенной осью e . Центры эллипсоидов распределены в пространстве случайным образом, так что корреляция между положениями отдельных включений отсутствует.

Ориентация векторов e произвольна с предпочтительным направлением m . Для удобства совместим с m ось Z лабораторной системы координат. Положение системы координат (x_1, x_2, x_3) , связанной с произвольным эллипсоидом, задается матрицей перехода γ_{ik} , определяемой через углы Эйлера, причем e направлен по оси x_3 . Функция распределения ансамбля N частиц по углам

$$(1.1) \quad f(a_1, \dots, a_N) = \prod_{i=1}^N f(a_i), \quad \int f(a) da = 1$$

$$a = \{\varphi, \psi, \theta\}, \quad da = \sin \theta \, d\varphi \, d\psi \, d\theta$$

В дальнейшем будем обозначать угловыми скобками усреднение по ансамблю, а квадратными скобками — усреднение по малому физическому объему, который содержит достаточно большое число включений.

Тензор эффективной теплопроводности материала λ_{ik} , характеризующий макроперенос тепла в нем, имеет два различных главных значения и определяется следующим образом:

$$(1.2) \quad [Q]_i = -\lambda_{ik} [\nabla T], \quad [Q] = (1 - \rho) [Q_1] + \rho \int f(a) [Q_2] da$$

$$[\nabla T] = (1 - \rho) [\nabla T_1] + \rho \int f(a) [\nabla T_2] da$$

$$[Q_1] = -\lambda_1 [\nabla T_1] = -\lambda_1 \nabla \langle T_1 \rangle, \quad [Q_2] = -\lambda_2 [\nabla T_2]$$

где ρ — объемная концентрация, а индексы 1 и 2 относятся соответственно к связующему и наполнителю.

2. В соответствии с методом, обсуждаемым подробно в [1], реальное возмущение, производимое частицей, заменяется возмущением от точечного диполя D , который приложен в центре частицы. Для определения $[\nabla T_2]$

задача о теплопереносе в теле со сложной геометрией заменяется задачей о теплопроводности в гомогенной среде с произвольным эллипсоидальным включением.

Как можно показать аналогично [1], средняя температура удовлетворяет уравнению

$$(2.1) \quad \lambda_{1\Delta} \langle T_1 \rangle = \nabla \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = \int \mathbf{D} n(a) da$$

где $\mathbf{d}$ — средний дипольный момент единицы объема, а $n(a) = nf(a)$ — счетная концентрация частиц.

Поскольку единственными выделенными направлениями в пространстве в среднем являются $\nabla \langle T_1 \rangle$ и $\mathbf{m}$, предполагаем, что

$$(2.2) \quad \mathbf{d} = \alpha \nabla \langle T_1 \rangle + \beta (\nabla \langle T_1 \rangle \mathbf{m}) \mathbf{m}$$

где $\alpha, \beta = \text{const}$, зависящие от $\lambda_1, \lambda_2, \rho$ и формы частиц.

Тогда уравнение (2.1) запишется в лабораторной системе координат в виде

$$(2.3) \quad \lambda' (\partial^2 / \partial X^2 + \partial^2 / \partial Y^2) \langle T_1 \rangle + \lambda'' (\partial^2 / \partial Z^2) \langle T_1 \rangle = 0$$

$$\lambda' = \lambda_1 - \alpha, \quad \lambda'' = \lambda_1 - \alpha - \beta$$

Для определения α, β рассмотрим влияние, которое оказывает произвольное эллипсоидальное включение на процесс теплопереноса в анизотропной среде (λ', λ'') с постоянным градиентом температуры $\mathbf{E}$ на бесконечности. Решение задачи дает выражение для ∇T_2 , что позволяет вычислить $\mathbf{d}$ из (2.1) и тем самым получить уравнения для определения α и β .

В системе координат

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = k^{-1}Z, \quad k^2 = \lambda'' / \lambda'$$

отнесенной к центру произвольной частицы, имеем вне эллипсоида уравнение (2.3) внутри и на границе

$$(2.4) \quad \lambda' \Delta \langle T_1 \rangle = 0$$

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_2 + k^{-2} \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_2 = 0$$

$$\langle T_1 \rangle = T_2, \quad \mathbf{n} \mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{n} \mathbf{Q}^{(2)}, \quad \nabla \langle T_1 \rangle \rightarrow \mathbf{E}^{(1)}, \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty$$

Известно из [2], что решение поставленной задачи удовлетворяет соотношению

$$(2.5) \quad E_i^{(2)} - \hat{n}_{ik} (Q_k^{(2)} / \lambda' + E_k^{(2)}) = E_i^{(1)}$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \nabla T_2, \quad Q_k^{(2)} = -\lambda_k^{(2)} E_k^{(2)}, \quad \lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_2, \quad \lambda_3^{(2)} = k^{-2} \lambda_2$$

$\mathbf{Q}^{(2)}$ — поток тепла внутри эллипсоида. При переходе к системе координат (x, y, z) эллипсоид, имеющий тензор деполяризации $n_{ik} = \gamma_{li} \gamma_{lk} n_l$, преобразуется в эллипсоид с тензором деполяризации $\hat{n}_{ik} = \Gamma_{li} \Gamma_{lk} \hat{n}_l$, где $\hat{n}_l$ — главные значения. Компоненты матрицы перехода Γ_{ik} к его осям будут зависеть от углов Эйлера новых осей, причем $\langle \Gamma_{li} \Gamma_{lk} \rangle = 0, i \neq k$. Отметим, что оси преобразованного эллипсоида, а следовательно, и $\hat{n}_l$ будут зависеть только от $\cos^2 \theta$ и λ'' / λ' .

Из (2.5) находим градиент температуры $E^{(2)}$, возникающий в эллипсоиде при внесении в анизотропную среду с градиентом температуры E

$$(2.6) \quad E_i^{(2)} = N_{ik} E_k, \quad N_{ik}^{-1} = \delta_{ik} + \hat{n}_{ik} (\lambda_k^{(2)} / \lambda' - 1)$$

В лабораторной системе координат вычисляем дипольный момент D , а также d из (2.4)

$$(2.7) \quad D = \int (qn) r ds, \quad q = -\lambda_2 E^{(2)} + \lambda_1 E$$

$$D_i = V (\lambda_1 \delta_{ik} - \lambda_2 N_{ik}) E_k, \quad d_i = \rho (\lambda_1 \delta_{ik} - \lambda_2 \langle N_{ik} \rangle) E_k$$

где V — объем эллипсоида. Можно показать, что

$$\langle N_{ik} \rangle = 0, \quad i \neq k, \quad \langle N_{11} \rangle = \langle N_{22} \rangle$$

Сравнивая (2.2) и (2.7), получаем уравнения для определения α и β как функций от ρ , λ_1 , λ_2 , n_l

$$(2.8) \quad \alpha = \rho (\lambda_1 - \lambda_2 \langle N_{11} \rangle), \quad \alpha = \lambda_1 - \lambda'$$

$$\alpha + \beta = \rho (\lambda_1 - \lambda_2 \langle N_{33} \rangle), \quad \alpha + \beta = \lambda_1 - \lambda''$$

3. Эффективная теплопроводность λ_{ik} вычисляется на основании (1.2). Из (2.6), (2.8) средний поток тепла и средний градиент температуры

$$(3.1) \quad [Q]_i = -\{(1 - \rho) \lambda_1 + \rho \lambda_2 \langle N_{ii} \rangle\} \nabla \langle T_1 \rangle = \begin{cases} -\lambda' \nabla \langle T_1 \rangle; & i = 1, 2 \\ -\lambda'' \nabla \langle T_1 \rangle; & i = 3 \end{cases}$$

$$[\nabla T]_i = (1 - \rho + \rho \langle N_{ii} \rangle) \nabla \langle T_1 \rangle$$

В безразмерных переменных

$$\kappa = \lambda_2 / \lambda_1, \quad \xi_1 = \xi_2 = \lambda' / \lambda_1, \quad \xi_3 = \lambda'' / \lambda_1, \quad \Lambda_{ik} = \lambda_{ik} / \lambda_1$$

главные компоненты Λ_i тензора эффективной теплопроводности Λ_{ik} следующие:

в предпочтительном направлении ориентации эллипсоидов

$$(3.2) \quad \Lambda_3 = \xi_3 (1 - \rho + \rho \langle N_{33} \rangle)^{-1}$$

в любом направлении, перпендикулярном к нему,

$$(3.3) \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 = \xi_1 (1 - \rho + \rho \langle N_{11} \rangle)^{-1}$$

где $\langle N_{ii} \rangle$ вычисляется исходя из (2.6) и уравнений (2.8) для определения λ' , λ'' .

В случае, когда выделенные оси эллипсоидов параллельны (функция распределения по углам $f(a) = \frac{1}{2} \pi^{-2} \delta(\cos \theta - 1)$)

$$(3.4) \quad \langle N_{33} \rangle = \{1 + \hat{n}_3 (\lambda_2 / \lambda' - 1)\}^{-1}$$

$$\langle N_{11} \rangle = \langle N_{22} \rangle = \{1 + n_1 (\lambda_2 / \lambda' - 1)\}^{-1}$$

Главные значения тензора эффективной теплопроводности из (3.2) и (3.3)

$$(3.5) \quad \Lambda_3 = \xi_3 \{ \xi_3 (1 - \hat{n}) + \kappa \hat{n} \} \{ (1 - \hat{n} + \rho \hat{n}) \xi_3 - \kappa \hat{n} (1 - \rho) \}^{-1}$$

$$\Lambda_1 = \xi_1 \{ \xi_1 (1 + \hat{n}) + \kappa (1 - \hat{n}) \} \{ (1 + \hat{n} + \rho (1 - \hat{n})) \xi_1 - \kappa (1 - \hat{n}) (1 - \rho) \}^{-1}$$

$$\hat{n} = \hat{n}_3$$

Сложность представляет вычисление ξ_i из (2.8) и $\hat{n} = \hat{n}(\xi_3 / \xi_1)$ — коэффициента деполяризации в преобразованной системе координат (см. (2.4)).

В случае изотропной функции распределения по углам $f(a) = 1/8\pi^{-2}$ тензор эффективной теплопроводности шаровой. Обозначая коэффициент деполяризации n_3 через n ($n_1 = n_2 = (1 - n) / 2$) и учитывая, что

$$N_{ik} = \gamma_i \gamma_{lk} \{ 1 + n_l (\lambda_2 / \lambda' - 1) \}^{-1}, \quad \langle \gamma_i^2 \rangle = 1/3$$

получаем из (2.8) кубическое уравнение для определения $\xi = \lambda / \lambda_1$

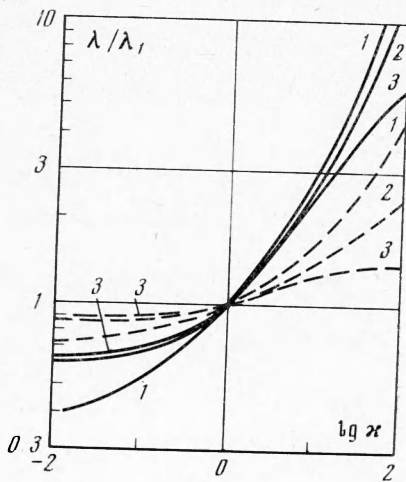
$$(3.6) \quad \xi^3 (1 - n^2) + \xi^2 \{ \kappa (1 - n + 2n^2) - \rho \kappa (5/3 - n) - (1 - \rho) (1 - n^2) \} + \xi \kappa \{ \kappa n (1 - n) - \rho \kappa (n + 1/3) - (1 - \rho) \times \\ \times (1 - n + 2n^2) \} - \kappa^2 n (1 - n) (1 - \rho) = 0$$

Коэффициенты уравнения таковы, что возможен только один положительный корень. На основании (3.2), (3.3), (3.6) безразмерная эффективная теплопроводность материала

$$(3.7) \quad \Lambda = \lambda / \lambda_1 = \xi \Delta \{ (1 - \rho) \Delta + \rho \xi^2 (5/3 - n) + \rho \xi \kappa (n + 1/3) \}^{-1}$$

$$\Delta = \xi^2 (1 - n^2) + \xi \kappa (1 - n + 2n^2) + \kappa^2 n (1 - n)$$

При фиксированных ρ и $\kappa < 1$ величина Λ имеет максимум при $n = 1/3$, что соответствует случаю сферических частиц. Если $\kappa > 1$, Λ имеет минимум при $n = 1/3$. Подробно сферические включения рассмотрены в [1].



На фигуре приведена зависимость Λ от $\lg \kappa$ при $\rho = 0.1$ (пунктирные линии), при $\rho = 0.3$ (сплошные линии). Кривые 1 соответствуют чечевицеобразной форме ($n = 0.9$), кривые 2 — игольчатой форме ($n = 0.05$). Кривые 3 ($n = 1/3$), лежащие при $\kappa < 1$ выше, а при $\kappa > 1$ ниже соответствующих кривых 1, 2, характеризуют модель «перекрывающихся» сфер из [1].

Подчеркнем, что полученные формулы применимы при достаточно малых ρ , так как используемая функция распределения центров частиц в пространстве допускает перекрытие частиц при высокой объемной концентрации ρ . По-видимому, вследствие этого ξ из (3.6) и эффективная теплопроводность Λ из (3.7) обращаются в бесконечность при $\kappa \rightarrow \infty$ и $\rho > \rho_*$, $\rho_* = n(1 - n) / (n + 1/3)$, ($\max \rho_* = 1/3$ и достигается при $n = 1/3$).

В случае сферических включений можно ввести (см. [1]) функцию распределения центров, которая учитывает, что частицы не перекрываются. Сравнение результатов для моделей «перекрывающихся» и «неперекрывающихся» сфер показало, что значения эффективных теплопроводностей Λ близки при $\rho < \rho^* = 1/3$ и $\kappa \lesssim 10$.

Отметим, что в соответствующих постановках задачи об определении эффективной теплопроводности, диэлектрической проницаемости и электропроводности математически эквивалентны.

Автор благодарит Ю. А. Бувевича за внимание к работе.

Поступила 28 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Бувевич Ю. А. Об эффективной теплопроводности зернистых материалов. ПМТФ, 1973, № 4.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.