ПМТФ, № 1, 1964

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕНИЯ И ТЕПЛОВОГО ПОТОКА В АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Б. И. Резников, Ю. Н. Смыслов

(Ленинград)

Определение трения и теплового потока, обычно являющееся конечной целью задач теории пограничного слоя, без численного интегрирования самих уравнений представляет несомненный интерес, так как численное решение многопараметрических нелинейных краевых задач требует больших затрат машинного времени.

Некоторые результаты в этом направлении получены в работах [1–3]. Идея метода, применявшегося в [1] для известного в теории пограничного слоя уравнения Фокнера — Скен, заключалась в отыскании методом последовательных приближений функции, удовлетворительно аппроксимирующей решение краевой задачи. При этом задача об определении трения сводилась к квадратурам, причем в процессе последовательных приближений одновременно уточнялись аппроксимирующая функция и искомое значение трения. Следует отметить, что получаемые квадратуры выполнялись численно для каждого последующего приближения и сходимость метода зависела от удачного выбора нулевого приближения аппроксимирующей функции [1].

В работе [2] для определения трения предлагается итерационная схема, построенная для интегрального уравнения, полученного из краевой задачи. Обсуждается уравнение Блазиуса и частный случай уравнения Фокнера — Скен. Дано обоснование сходимости метода. В работах [3,5,6] тепловой и массовый потоки получены асимптотическим интегрированием уравнений энергии и диффузии.

Ниже излагается метод определения трения и теплового потока, не связанный с проведением численного интегрирования уравнений пограничного слоя.

§ 1. Пусть для краевой задачи

$$f^{(n)} + R\,[f, f', \ldots, f^{(n-1)}] = 0 \tag{1.1}$$

$$f = a_0, \ f' = a_1, \ldots, f^{(n-2)} = a_{n-2} \quad \text{при } \eta = 0, \quad f^{(n-2)} = b \quad \text{при } \eta \to \infty \tag{1.2}$$

требуется определить значение производной $f^{(n-1)}(0) = a_{n-1}$. Запишем уравнение (1.1) в форме

$$f^{(n)} + f^{(n-1)}\Phi = 0 \qquad \left(\Phi = \frac{R}{f^{(n-1)}}\right) \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) допускает формальное интегрирование

$$f^{(n-1)} = f^{(n-1)}(0)\exp\left(-\int_0^\eta \Phi dt\right) \tag{1.4}$$

Интегрируя соотношение (1.4) и удовлетворяя условию на бесконечности, имеем

$$a_{n-1} = \frac{b - a_{n-2}}{\omega(\infty)} \qquad \left(\omega(\infty) = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\eta \Phi\, dt\right) d\eta\right) \tag{1.5}$$

Существенно отметить, что в правую часть уравнения (1.5) величина a_{n-1} входит как параметр. В этом можно убедиться, разлагая функцию Φ в ряд Тейлора в окрестности нуля и выражая коэффициенты полученного разложения через a_{n-1}. Таким образом, соотношение (1.5) можно рассматривать как уравнение для определения искомой величины a_{n-1}.

---

[1] После того, как статья была отослана в печать, авторам стало известно о монографии Мексина [4].

Заметим, что предложенный метод позволяет свести краевую задачу (1.1)—(1.2) к задаче Коши, что существенно при использовании численных методов.

Краевые задачи вида (1.1)—(1.2) рассматриваются в теории пограничного слоя, где для уравнения движения надо положить $n = 3$, а в уравнении энергии и диффузии $n = 2$. Простейшим примером может служить неизотермическая задача Блазиуса

$$f''' + ff'' = 0, \qquad g'' + \sigma f g' = 0$$

$$f(0) = \alpha, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 2, \quad g(0) = 0, \quad g(\infty) = 1$$

Проиллюстрируем изложенный метод на некоторых примерах.

§ 2. Рассмотрим изотермическую задачу Блазиуса. Требуется найти величину $\tau = \varphi''(0)$ для краевой задачи

$$\varphi''' + {}^1/_2 \varphi \varphi'' = 0, \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0, \qquad \varphi'(\infty) = 1 \tag{2.1}$$

Следуя § 1, имеем

$$\tau = \frac{1}{\omega(\infty)}, \qquad \omega(\infty) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\eta \varphi\, dt\right) d\eta \tag{2.2}$$

Разложение функции φ в окрестности нуля имеет вид [7]

$$\varphi(\eta) = \frac{\tau}{2}\eta^2 - \frac{\tau^2}{2.5!}\eta^5 + \frac{11\tau^3}{2^2 \cdot 8!}\eta^9 - \frac{375\tau^4}{2^3 \cdot 11!}\eta^{11} + \ldots \tag{2.3}$$

Используя это разложение и вводя новую независимую переменную t, получим

$$\omega(\infty) = \left(\frac{\tau}{12}\right)^{-1/3} \int_0^\infty e^{-t^3} e^{-Z(t)} dt \qquad \left(t = \left(\frac{\tau}{12}\right)^{1/3} \eta\right) \tag{2.4}$$

Здесь

$$Z(t) = t^6 \sum_{n=0}^\infty c_n t^{3n}, \qquad c_0 = -\frac{1}{20}, \qquad c_1 = \frac{11}{80 \cdot 21}, \qquad c_2 = -\frac{5}{56 \cdot 88} \tag{2.5}$$

Разложение функции $e^{-Z(t)}$ в степенной ряд в окрестности $t = 0$ имеет вид

$$e^{-Z(t)} = 1 + t^6 \sum_{m=0}^\infty d_m t^{3m} \qquad \left(d_0 = -c_0,\ d_1 = -c_1,\ d_2 = \frac{c_0^2}{2} - c_2, \ldots\right) \tag{2.6}$$

Подставляя разложение (2.6) в (2.4) и интегрируя почленно, получаем

$$\omega(\infty) = \frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{12}\right)^{-1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left[1 + \sum_{m=0}^\infty d_m \frac{\Gamma(m + {}^7/_3)}{\Gamma({}^1/_3)}\right] \tag{2.7}$$

Уравнение для τ имеет окончательный вид

$$\tau = \left[\frac{3}{12^{1/3}\,\Gamma({}^1/_3)\, J}\right]^{3/2} \qquad \left(J = 1 + \frac{1}{45} - 0.006790 + 0.005335 - \ldots\right) \tag{2.8}$$

Ограничиваясь первым членом разложения функции φ ($J = 1$), будем иметь $\tau_1 = 0.3421$. Сохранение последующих членов разложения функции φ дает соответственно $\tau_2 = 0.3310$, $\tau_3 = 0.3343$, $\tau_4 = 0.3317$.

Точное значение τ, полученное в результате численного интегрирования краевой задачи (2.1), равно 0.33206. Таким образом, погрешность уже в первом случае составляет всего 3.3%, а удержание четырех членов разложения функции φ позволяет вычислить значение τ с точностью до 0.12%.

§ 3. Перейдем к применению метода для более сложных случаев. Рассмотрим магнитогидродинамическое течение жидкости с постоянной электропроводностью в окрестности двумерной критической точки при наличии вдува. В этом случае имеем систему уравнений [8]

$$f''' + ff'' + A - f'^2 - M_m f' = 0, \qquad \theta'' + \sigma f \theta' = 0 \quad (A = 1 + M_m) \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$f(0) = \alpha \qquad f'(0) = 0, \qquad f'(\infty) = 1, \qquad \theta(0) = 0, \qquad \theta(\infty) = 1 \tag{3.2}$$

В первом уравнении (3.1) величина M_m — параметр магнитного взаимодействия, σ — число Прандтля.

Введем функцию

$$\Phi = f - f' \frac{f' + M_m}{f''} + \frac{A}{f''} \tag{3.3}$$

Тогда первое уравнение (3.1) приведется к виду (1.3); уравнение (1.5) запишется в виде

$$f''(0) = \tau = \omega^{-1}(\infty) \tag{3.4}$$

Из (1.5), подставляя разложение функции Φ в ряд Тейлора в окрестности нуля, получим

$$\omega(\infty) = \int_0^\infty e^{-\Phi(0)\eta - \frac{1}{2}\Phi'(0)\eta^2} e^{-Z(\eta)} d\eta \qquad \left(Z = \eta^3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n, \quad c_n = \frac{\Phi^{(n+2)}(0)}{(n+3)!}\right) \tag{3.5}$$

Разлагая далее $e^{-Z(\eta)}$ в ряд и производя в (3.5) почленное интегрирование, получаем для $\omega(\infty)$ окончательное выражение

$$\omega(\infty) = \psi_0 + \sum_{m=0}^{\infty} d_m \psi_{m+3} \tag{3.6}$$

где d_m — коэффициенты разложения $e^{-Z(\eta)}$, равные

$$d_0 = -c_0, \quad d_1 = -c_1, \quad d_2 = -c_2, \quad d_3 = \frac{1}{2}c_0^2 - c_3, \quad d_4 = c_0 c_1 - c_4 \ldots \tag{3.7}$$

$$\psi_p(a, b) = \int_0^\infty e^{-a\eta - b^2\eta^2} \eta^p d\eta \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

Первые две квадратуры даются формулами

$$\psi_0(a, b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \exp\left(\frac{a^2}{4b^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{a}{2b}\right)\right], \quad \psi_1(a, b) = \frac{1}{2b^2}(1 - a\psi_0) \tag{3.9}$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Вычисление следующих интегралов ведется при помощи рекуррентного соотношения

$$\psi_{p+2} = \frac{1}{2b^2}[(p+1)\psi_p - a\psi_{p+1}] \tag{3.10}$$

Рассмотрим частный вид уравнения (3.1), когда $\alpha = 0$, $M_m = 0$. Это соответствует отсутствию вдува и магнитного поля. В этом случае входящие в интеграл (3.5) величины $\Phi(0)$, $\Phi'(0)$ и коэффициенты разложения $Z(\eta)$ равны

$$\Phi(0) = \tau^{-1}, \quad \Phi'(0) = \tau^{-2}, \quad c_0 = \frac{2 - \tau^4}{3!\,\tau^3}, \quad c_1 = \frac{3 - \tau^4}{12\tau^4}$$

$$c_2 = \frac{2 - \tau^4}{10\tau^5}, \quad c_3 = \frac{11\tau^8 - 72\tau^4 + 120}{6!\,\tau^6}, \quad c_4 = \frac{720 - 504\tau^4 + 73\tau^8}{7!\,\tau^7} \tag{3.11}$$

Очевидно, точность определения τ зависит от количества членов, взятых в разложении Φ, или, что то же самое, от числа членов, удержанных в (3.6).

Если ограничиться двумя членами разложения функции Φ, то уравнение (3.4) примет вид

$$\tau = \psi_0^{-1} \tag{3.12}$$

Вычисляя ψ_0, согласно (3.9), найдем

$$\psi_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi e}\,[1 - \Phi(1/\sqrt{2})]\,\tau = C\tau \qquad (C = 0.655678) \tag{3.13}$$

Уравнение (3.12) дает $\tau = \sqrt{1/C} = 1.235$.

Значение τ, найденное численным интегрированием [7], равно 1.2326. Таким образом, сохранение двух членов в разложении Φ позволяет вычислить значение τ с точностью 0.15%.

Изучим поведение корней уравнения (3.4) при сохранении последующих членов разложения функции Ф. При этом уравнение (3.4) имеет вид

$$\tau^2 = (s + q\tau^4 - t\tau^8)^{-1} \tag{3.14}$$

Результаты вычислений приведены ниже, где в первой строке указано число членов, удержанных в выражении $\omega(\infty)$, во второй — значение τ, а также отклонение значения $\delta\tau$ % от точного решения

$n = 2$	3	4	5	6
$\tau = 1.222$	1.241	1.227	1.237	1.229
$\delta\tau = -0.86$	+0.68	−0.45	+0.36	−0.29

Последовательность корней уравнения (3.14) колеблется около точного значения τ, постепенно приближаясь к нему. Хорошее совпадение значения τ, полученного из уравнения (3.12), с точным решением объясняется тем, что сумма знакопеременного ряда (3.6) слабо отличается от нулевого члена ψ_0.

Вернемся к общему виду уравнения (3.1), когда α и M_m отличны от нуля. В этом случае

$$\Phi(0) = \frac{A + \alpha\tau}{\tau}, \qquad \Phi'(0) = \frac{A^2 + A\alpha\tau - M_m\tau^2}{\tau^2} \tag{3.15}$$

Сохраняя в $\omega(\infty)$ один член, придем к уравнению (3.12) в форме

$$\frac{2\tau^2}{A + \alpha\tau} = G(x) \quad \left(x = \frac{A + \alpha\tau}{\sqrt{2(A^2 + A\alpha\tau - M_m\tau^2)}}, \; G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\frac{1}{1 - \Phi(x)}\right) \tag{3.16}$$

Решения уравнения (3.16) при различных комбинациях α и M_m приведены в таблице 1. В этой таблице в скобках приведены результаты численного интегрирования уравнения (3.1), взятые из работы [8].

Таблица 1

M_m	$\alpha = 0$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = -1$
0	1.235 (1.233)	0.9680 (0.9697)	0.7526 (0.7605)
0.5	1.420 (1.418)	1.160 (1.164)	0.9455 (0.9549)
1	1.585 (1.584)	1.329 (1.333)	1.114 (1.124)

Проведенное сравнение показывает, что в данной задаче удержание двух членов разложения Ф позволяет получить значение τ, практически совпадающее с результатами численного интегрирования.

Перейдем к решению уравнения энергии (3.2). Формула (1.5) дает для теплового потока следующее выражение

$$\theta'(0) = \frac{1}{\omega_1(\infty)} \qquad \left(\omega_1(\infty) = \int_0^\infty \exp\left(-\sigma\int_0^\eta f dt\right) d\eta\right) \tag{3.17}$$

Подставляя в (3.17) разложение f в окрестности нуля, найдем

$$\omega_1(\infty) = \int_0^\infty e^{|\alpha|\sigma\eta}\frac{d\eta}{dZ}e^{-Z(\eta)}dZ \qquad \left(Z = \eta^3\sum_{n=0}^\infty c_n\eta^n, \quad c_n = \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+3)!}\right) \tag{3.18}$$

Один из методов вычисления интеграла (3.18) рассматривался в работе [3]. Интегрирование в (3.18) может быть также выполнено следующим образом. Обращая ряд $Z(\eta)$, найдем

$$\eta = \sum_{m=0}^\infty b_m Z^{\frac{m+1}{3}} \tag{3.19}$$

Дифференцируя (3.19), умножая результат на

$$e^{|\alpha|\sigma\eta} = 1 + \sum_{k=0}^\infty \rho_k Z^{\frac{k+1}{3}}$$

и подставляя полученный ряд в (3.18), имеем после преобразований

$$\omega_1(\infty) = \frac{1}{3}(c_0\sigma)^{-1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{m=0}^{\infty} dm\,(c_0\sigma)^{-1/3m}\frac{\Gamma(1/3(m+1))}{\Gamma(1/3)} \tag{3.20}$$

где

$$d_0 = 1, \quad d_1 = -\frac{2}{3}\frac{c_1}{c_0} - \sigma\alpha, \quad d_2 = \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \sigma\alpha\frac{c_1}{c_0} + \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 - \frac{c_2}{c_0}$$

$$d_3 = -\frac{\sigma^3\alpha^3}{6} - \frac{2}{3}\sigma^2\alpha^2\frac{c_1}{c_0} - \frac{14}{9}\sigma\alpha\frac{c_1^2}{c_0^2} + \frac{4}{3}\sigma\alpha\frac{c_2}{c_0} - $$
$$-\frac{140}{81}\frac{c_1^3}{c_0^3} + \frac{28}{9}\frac{c_1c_2}{c_0^2} - \frac{4}{3}\frac{c_3}{c_0} \tag{3.21}$$

Вычислим $\theta'(0)$ для случая $\alpha = 0$, $M_m = 0$. Подстановка выражения (3.20), в котором удержаны три члена, в уравнение (3.17) дает следующую формулу

$$\theta'(0) = \left(\frac{\tau}{6}\right)^{1/3}\frac{3}{\Gamma(1/3)}\sigma^{1/3}\left[1 + \frac{1}{6\tau}\left(\frac{6}{\tau\sigma}\right)^{1/3}\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} + \frac{1}{16\tau^2}\left(\frac{6}{\tau\sigma}\right)^{2/3}\frac{1}{\Gamma(1/3)}\right]^{-1} \tag{3.22}$$

Для $\sigma = 1$, используя значение τ, полученное из решения динамической задачи, найдем $\theta'(0) = 0.570$, что в точности совпадает с результатами численного интегрирования [6].

§ 4. Обратимся теперь к системе уравнений, описывающей обтекание критической точки сжимаемым газом при наличии вдува

$$\varphi''' + n\varphi\varphi'' = \varphi'^2 - \theta, \qquad \theta'' + n\sigma\varphi\theta' = 0 \qquad (n = 1.2) \tag{4.1}$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = \alpha, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 1, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(\infty) = 1 \tag{4.2}$$

В этом случае функция Φ имеет вид

$$\Phi = n\varphi + \frac{\theta - \varphi'^2}{\varphi''} \tag{4.3}$$

Для τ и $\theta'(0)$ из (1.5) получим

$$\tau = \omega^{-1}(\infty), \qquad \theta'(0) = (1 - \theta_0)\,\omega_1^{-1}(\infty) \tag{4.4}$$

Вычисление $\omega(\infty)$ проводится так же, как в § 3. Ограничиваясь одним членом в разложении $\omega(\infty)$, придем к уравнению вида (3.16)

$$\frac{2\tau^2}{n\alpha\tau + \theta_0} = G(x) \qquad \left(x = \frac{n\alpha\tau + \theta_0}{\sqrt{2[(n\alpha\theta_0 + \theta_0')\tau + \theta_0^2]}}, \quad \theta_0' \equiv \theta'(0)\right) \tag{4.5}$$

где $G(x)$ совпадает с функцией, введенной в (3.16).

Для определения $\omega_1(\infty)$ имеем формулу (3.20), в которой теперь σ следует заменить на $n\sigma$. Подстановка $\omega_1(\infty)$ в (4.4) приводит к уравнению

$$\theta'(0) = \frac{3(1-\theta_0)}{\Gamma(1/3)}\left(\frac{\tau n\sigma}{6}\right)^{1/3}\left[1 + d_1\left(\frac{6}{\tau n\sigma}\right)^{1/3}\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} + d_2\left(\frac{6}{\tau n\sigma}\right)^{2/3}\frac{1}{\Gamma(1/3)} + \frac{2d_3}{\tau n\sigma} + \ldots\right]^{-1} \tag{4.6}$$

Значения коэффициентов d_m равны

$$d_1 = -n\alpha\left(\sigma - \frac{1}{6}\right) + \frac{\theta_0}{6\tau} \tag{4.7}$$

$$d_2 = \frac{n^2\alpha^2(40\sigma^2 - 20\sigma + 1)}{80} - \frac{n\alpha\theta_0}{\tau}\frac{10\sigma - 3}{40} + \frac{\theta_0^2}{16\tau^2} + \frac{\theta_0'}{20\tau}$$

$$d_3 = \frac{n^3\alpha^3}{1296}(-216\sigma^3 + 216\sigma^2 - 39.6\sigma - 1) + \frac{n^2\alpha^2\theta_0}{\tau}\left(\frac{72\sigma^2 - 84\sigma + 35}{432} + \frac{\sigma - 1}{15}\right) -$$
$$-\frac{(2-n)\tau}{90} + \frac{n\alpha\theta_0^2}{\tau^2}\frac{91 - 210\sigma}{2160} + \frac{35}{1296}\frac{\theta_0^3}{\tau^3} + \theta_0'\left[\frac{7\theta_0}{180\tau^2} - \frac{n\alpha}{180\tau}(14\sigma - 5)\right]$$

Выражение (4.6), в случае удержания в разложении $\omega_1(\infty)$ трех членов, будет квадратным уравнением относительно $\theta'(0)$. Решение этого уравнения

$$\theta'(0) = -p + \sqrt{p^2 + q} \tag{4.8}$$

представляет собой выражение теплового потока через p и q, являющиеся известными функциями τ, θ_0, α и σ

$$p = \frac{1}{2}\,\frac{1 + d_1\left(\dfrac{6}{\tau n\sigma}\right)^{1/3}\dfrac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} + d_2{}^*\left(\dfrac{6}{\tau n\sigma}\right)^{2/3}\dfrac{1}{\Gamma(1/3)} + d_3{}^*\dfrac{2}{\tau n\sigma}}{\dfrac{1}{20\tau}\left(\dfrac{6}{\tau n\sigma}\right)^{2/3}\dfrac{1}{\Gamma(1/3)} + \dfrac{1}{90\tau^2 n\sigma}\left[\dfrac{7\theta_0}{\tau} - n\alpha(14\sigma - 5)\right]} \tag{4.9}$$

$$q = 3(1-\theta_0)\left(\frac{\tau n\sigma}{6}\right)^{1/3}\tau\left[\frac{1}{20}\left(\frac{6}{\tau n\sigma}\right)^{2/3} + \frac{\Gamma(1/3)}{90\tau n\sigma}\left(\frac{7\theta_0}{\tau} - n\alpha(14\sigma-5)\right)\right]^{-1} \tag{4.10}$$

(*) означает пропуск членов с $\theta'(0)$ в d_m.

Таким образом, определение трения и теплового потока сводится к совместному решению уравнений (4.5), (4.8). Так как $\theta'(0)$ явно выражена через τ, то система (4.5), (4.8) будет по существу не связанной, что сильно облегчает ее решение.

$n = 1$, $\sigma = 1$ *Таблица 2*

α	θ_0	τ	$Z'(0)$
0	0.5	0.9600 (0.9548)	0.2719 (0.2711)
	1	1.235 (1.233)	0.5700 (0.5705)
—0.5	0.5	0.6666 (0.6669)	0.2680 * (0.2580)
	1	0.9680 (0.9692)	0.3006 * (0.2950)

В табл. 2 для некоторых значений параметров α и θ_0 дано сравнение решения системы (4.5)—(4.8) с результатами численного интегрирования, помещенными в работе [3]. Функции безразмерной энтальпии $\theta(\eta)$ и $Z(\eta)$, использованные в настоящей работе и в работе [3], различны, поэтому в табл. 2 приведены значения $Z'(0)$, полученные при значениях $n = 1$, $\sigma = 1$, из $\theta'(0)$ по формуле

$$Z'(0) = \frac{\theta'(0)}{1-\theta_0} = \omega_1^{-1}(\infty) \tag{4.14}$$

В скобках даны результаты численного интегрирования. Звездочкой отмечены значения $Z'(0)$, подсчитанные с удержанием пяти членов в выражении (4.9).

Проведенное сравнение показывает, что для более сложного случая системы связанных уравнений предложенный метод позволяет вычислять трение и тепловой поток достаточно точно.

Поступила 21 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. M e k s y n D. Integration of the boundary-layer equation of a plane in an incompressible fluid. Proc. Roy. Soc. A, 1948, vol. 192, p. 567.
2. W e y l H. Concerning the differential equations of some boundary layer problems. Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1941, vol. 27, No. 12, p. 578.
3. Т и р с к и й Г. А. Сублимация тупого тела в плоском и осесимметричном потоке смеси газов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5.
4. M e k s y n D. The new methods in laminar boundaryloyer theory. London, 1961.
5. Т и р с к и й Г. А. Оплавление тела в окрестности критической точки и линии в диссоциированном потоке воздуха с испарением пленки расплава. ПМТФ, 1961, № 5.
6. Т и р с к и й Г. А. Разрушение передней кромки стреловидного крыла в гиперзвуковом потоке. ПМТФ, 1961, № 6.
7. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
8. S p a r r o w E. M., E c k e r t E. R. G., M i n k o w y c z W. I. Transpiration cooling in a magnetohydrodynamic stagnation-point flow. Appl. Sci. Res. A, 1962, vol. 11, No. 1.