ПМТФ, № 3, 1967

ВЫРОЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЖИДКОСТИ С ВНУТРЕННИМ ВРАЩЕНИЕМ

В. А. Городцов

(Москва)

Поведение жидкостей, обладающих помимо вязкости некоторой, даже слабой, упругостью, сильно отличается от поведения вязких жидкостей в достаточно быстрых нестационарных течениях. Так, наличие упругости приводит к изменению характера затухания мелкомасштабных (высокочастотных) турбулентных вихрей при вырождении турбулентности [1]. На поведении этих вихрей сказывается различие конкретных особенностей упруго-вязких жидкостей.

Наличие в жидкости достаточно крупных прочных надмолекулярных образований может придать ей «упругие» свойства. С отставанием примеси от ускоренно двигающегося растворителя связана релаксация поступательных степеней свободы составной модели. Влияние этой релаксации на затухание высокочастотных вихрей было рассмотрено в [1]. Ниже рассматривается характер влияния вращательной релаксации. В жидкости с внутренним вращением вихри по характеру затухания разбиваются следующим образом: наиболее крупные и наиболее мелкие вихри имеют вязкий (диффузионный) характер затухания, для средних вихрей более существенна локальная релаксация и они затухают как $\exp(-t/\theta)$, где θ — константа, пропорциональная времени вращательной релаксации.

1. Процессы, связанные с перестройкой структуры жидкостей, которые приводят к появлению у них упругих свойств, весьма разнообразны. Весьма разнообразны и феноменологические модели, описывающие течение таких жидкостей. Поэтому можно ожидать, что существует качественно различные типы турбулентности упруго-вязких жидкостей. Хотя на конечной стадии затухания турбулентности нелинейные особенности различных жидкостей нивелируются, поведение движений разных масштабов представляет интерес и на линейной стадии. В работе [1] было показано, что вырождение турбулентности упруго-вязких жидкостей с одним временем релаксации имеет весьма общий характер: крупномасштабные движения затухают, как и в вязкой жидкости, а мелкие вихри вырождаются универсальным образом (независимо от размера), но быстрее крупных, и на конечной стадии при больших временах характер затухания турбулентности в целом определяют «вязкие» крупные вихри, приводящие к асимптотическому закону $t^{-5/2}$.

Однако уже для рассмотренных в [1] примеров жидкостей с релаксацией напряжений и скоростей сдвига характерны и существенные отличия в затухании движений разных масштабов.

Поведение жидкости с релаксацией скоростей сдвига подобно поведению вязкой жидкости с эффективной вязкостью, зависящей от масштаба рассматриваемого движения. Для движения с волновым числом k эффективная вязкость имеет вид

$$\nu_\theta(k) = \nu\,(1 + 2\nu\theta k^2)^{-1}$$

Здесь ν, θ — константы кинематической вязкости и времени релаксации. Из этого выражения видно, что эффективная вязкость $\nu_\theta(k)$ монотонно падает с уменьшением масштаба движения (ростом k).

Если же сравнить затухание турбулентных движений жидкости с релаксацией напряжений и затухание пульсаций в вязкой жидкости [1], то в этом случае можно ввести эффективную вязкость, которая будет зависеть от масштаба движения следующим образом:

$$\nu_\theta(k) = [1 - (1 - 4\nu\theta k^2)^{1/2}]\,(2\theta k^2)^{-1}$$

Отсюда видно, что, в противоположность предыдущему, эффективная вязкость растет для крупномасштабных движений (от ν при $k = 0$ до $2\,\nu$ при $k = {}^1/_2\,(\nu\theta)^{-1/2}$), а для мелкомасштабных движений с $k > {}^1/_2\,(\nu\theta)^{-1/2}$ становится даже комплексной (при этом энергетический спектр движений осциллирует в своей высокочастотной области с частотой, растущей асимптотически линейно при больших k).

Даже на основании этого рассмотрения линейной стадии затухания движений можно предположить, что характер развитой турбулентности будет радикально меняться, когда масштаб $(\nu\theta)^{1/2}$ станет сравнимым с масштабом, на который приходилась основная часть энергии турбулентности в вязкой жидкости. Если же длина $(\nu\theta)^{1/2}$ сравнима с внутренним масштабом турбулентности, то это может привести к перестройке высокочастотного конца спектра кинетической энергии турбулентности.

Таким образом, можно ожидать сильного изменения тех турбулентных движений, масштаб которых меньше или порядка размера вязкостной зоны влияния релаксационного процесса $(\nu\theta)^{1/2}$.

В дальнейшем рассматривается поведение турбулентных движений на конечной стадии их затухания в случае жидкости с вращательной релаксацией структуры.

2. Многочисленные исследования гидродинамики разбавленных растворов полимеров указывают на большое влияние незначительных количеств полимерной примеси на турбулентное течение жидкостей. Согласно работе [2], одной из причин гасящего действия полимера на турбулентные вихри является наличие в растворе больших надмолекулярных полимерных агрегатов. Наличие крупной примеси приводит к дополнительным диссипативным эффектам. При наличии примеси проявляется эффект подстройки отстающей примеси к движениям жидкости. Влияние этого на турбулентность жидкости в рамках феноменологической модели с релаксацией скоростей деформации было рассмотрено в работе [1]. Кроме того, происходит подстройка вращательных движений примеси к турбулентным вихрям, что приводит к вихревой релаксации жидкости и дополнительной диссипации энергии. Феноменологическая модель жидкости, учитывающая это обстоятельство, была предложена в работе [3]. Рассмотрим здесь некоторые характерные черты турбулентности в этой модели.

Полная система уравнений для несжимаемой жидкости с внутренним вращением

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla\,(p + \mathbf{M\Omega} - \alpha \mathbf{M}^2) + (\eta + {}^1/_4\,\gamma)\,\Delta\mathbf{v} + {}^1/_2\,\alpha\gamma\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$$
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{M} = \gamma\,(\mathbf{\Omega} - \alpha\mathbf{M}) + \mu\Delta\mathbf{M}, \qquad (\nabla\mathbf{v}) = 0 \tag{2.1}$$

Здесь η, γ, μ, α ($\geqslant 0$) — коэффициенты первой и третьей (вихревой) вязкости, диффузии внутреннего момента $\mathbf{M}$ и структурный коэффициент, v — вектор скорости, p — давление; система единиц выбрана так, чтобы плотность $\rho = 1$, т. е. все величины приведены к кинематическим (в размерность входят лишь длина и время) делениям на постоянную плотность.

Применив к первому уравнению (2.1) операцию ротора, получим

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,[\mathbf{v\Omega}] = (\eta + {}^1/_4\,\gamma)\,\Delta\mathbf{\Omega} + {}^1/_4\,\alpha\gamma\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M} \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{M} = \mu\Delta\mathbf{M} + \gamma\,(\mathbf{\Omega} - \alpha\mathbf{M}), \qquad \mathbf{\Omega} = {}^1/_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \qquad (\nabla\mathbf{v}) = 0$$

Система уравнений (2.2) похожа на подобную систему уравнений в магнитной гидродинамике, однако здесь ни о какой вмороженности поля **M** не может быть и речи. Наоборот поле **M** имеет как локальные отклонения от равновесного состояния $\alpha^{-1}\Omega$, так и диффузионную неравновесность при неравномерном распределении.

Уравнения (2.2) сильно упрощаются в случае течений, допускающих линеаризацию (например, на конечной стадии затухающей турбулентности). При этом, исключая из первых двух уравнений (2.2) поле **M**, получим

$$\frac{\partial^2\mathbf{\Omega}}{\partial t^2} + [\alpha\gamma - (\eta + {}^1/_4\gamma + \mu)\,\Delta]\,\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t} - \alpha\gamma\eta\Delta\mathbf{\Omega} + \mu\,(\eta + {}^1/_4\gamma)\,\Delta^2\mathbf{\Omega} = 0$$

$$\gamma\mathbf{\Omega} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mu\Delta + \alpha\gamma\right)\mathbf{M} \tag{2.3}$$

Из (2.3) видно, что изменение угловой скорости Ω и внутреннего момента **M** для движения заданного масштаба на конечной стадии идет подобным образом, хотя и от различных начальных распределений (так как на нелинейной стадии уравнения не совпадают), следовательно, достаточно говорить об одном из полей.

Вырождение движений различных масштабов на конечной стадии происходит независимо, поэтому удобнее описывать его в терминах волнового пространства, преобразовав уравнение (2.3) по Фурье. При этом уравнение для

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3}\int \mathbf{\Omega}(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\,d^3r$$

примет вид

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} + [\alpha\gamma + (\eta + {}^1/_4\gamma + \mu)\,k^2]\,\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + k^2\alpha\gamma\eta\boldsymbol{\omega} + \mu\,(\eta + {}^1/_4\gamma)\,k^4\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{2.4}$$

Если искать решение в виде e^{st}, то для s получаем

$$2s = -\,[\alpha\gamma + k^2\,(\eta + {}^1/_4\gamma + \mu)] \pm \{[\alpha\gamma + k^2\,(\eta + {}^1/_4\gamma + \mu)]^2 - \\ - 4\alpha\gamma\eta k^2 - \mu\,(\eta + {}^1/_4\,\gamma)\,k^4\}^{1/2} \tag{2.5}$$

В силу того что это выражение всегда вещественно и отрицательно, имеет место плавное (без осцилляции) затухание движений всех масштабов. Из двух корней (2.5) достаточно оставить тот, который дает более медленное затухание, т. е. со знаком плюс. Разлагая подкоренное выражение в ряд и вводя обозначение $\tau = (\alpha\gamma)^{-1}$ для времени локальной релаксации [3] внутреннего момента **M**, получим

$$s\,(k) = -\,\eta k^2\,\frac{1 + \tau k^2\mu\,(1 + {}^1/_4\gamma/\eta)}{1 + \tau k^2\,(\eta + \mu + {}^1/_4\gamma)}\left\{1 + \tau\eta k^2\,\frac{1 + \tau k^2\mu\,(1 + {}^1/_4\gamma/\eta)}{[1 + \tau k^2\,(\eta + \mu + {}^1/_4\gamma)]^2} + \ldots\right\} \tag{2.6}$$

Это выражение (сравни с формулой (2.3) работы [1]) показывает, что затухание движений в такой жидкости может быть описано эффективной вязкостью $-\,k^{-2}s\,(k)$, которая при $k \to 0$ (крупномасштабные неоднородности) стремится к η, т. е. крупные вихри затухают со временем как $\exp\,(-\eta k^2\,t)$ подобно вихрям в обычной вязкой жидкости с вязкостью η.

Для описания пульсаций с большими волновыми числами k снова воспользуемся уравнениями (2.3); видно, что поле $\mathbf{\Omega}$ определяется изменением поля **M**, которое происходит по-разному в зависимости от того, какой механизм релаксации преобладает: локальная релаксация со временем τ или диффузионная релаксация с характерным временем $(k^2\mu)^{-1}$ для движения масштаба $\sim k^{-1}$.

Для движений, волновые числа которых удовлетворяют условию $\mu k^2 \gg 1/\tau$ (мелкомасштабные движения), диффузионная релаксация определяет основное изменение поля $\mathbf{M}$. При этом, как можно видеть из (2.3), затухание движений описывается двумя типами зависимостей: $\exp[-(\eta + {}^1/_4\gamma)k^2 t]$ и $\exp[-\mu k^2 t]$. Когда одна из них преобладает, затухание подобно затуханию движений в вязкой жидкости с вязкостью $\eta + {}^1/_4\gamma < \mu$ или с вязкостью $\mu < \eta + {}^1/_4\gamma$.

В противоположном случае $\mu k^2 \ll 1/\tau$, когда определяющей является локальная релаксация вектора $\mathbf{M}$, уравнения (2.3) примут вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{\Omega}}{\partial t^2} + \left[\frac{1}{\tau} - (\eta + {}^1/_4\gamma)\Delta\right]\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \frac{\eta \Delta \mathbf{\Omega}}{\tau} = 0, \quad \gamma \mathbf{\Omega} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\right)\mathbf{M} \qquad (2.7)$$

Отсюда видно, что при $k^2(\eta + {}^1/_4\gamma) \ll 1/\tau$ (крупномасштабные движения) среда быстро приходит к локальному равновесию, затухание имеет чисто вязкий характер. Малость k определяется здесь соотношениями $k^2 \ll (\tau\mu)^{-1}$, $k^2 \ll \tau^{-1}(\eta + {}^1/_4\gamma)^{-1}$. Наоборот, при $k^2(\eta + {}^1/_4\gamma) \gg 1/\tau$ основную роль играет локальная релаксация и закон затухания имеет универсальный вид $\exp(-t/\theta)$. Здесь время релаксации $\theta = \tau(1 + {}^1/_4\gamma/\eta) > \tau$. Так затухают движения с волновыми числами k из интервала $(\mu\tau)^{-1} \gg k^2 \gg \tau^{-1}(\eta + {}^1/_4\gamma)^{-1}$, если, конечно, он существует.

Таким образом, пространство волновых чисел разбивается, вообще говоря, на три области: область малых k с затуханием движений, подобным затуханию в вязкой жидкости с вязкостью η, область средних k с универсальным затуханием $\exp(-t/\theta)$ и, наконец, область больших k с затуханием, как в вязкой жидкости, с постоянными вязкости $\eta + {}^1/_4\gamma$ и μ. Такой более сложный характер, чем в [1], затухания движений жидкости с внутренним вращением связан с наличием большего числа характерных времен релаксации: кроме времен вязкого затухания $(\eta k^2)^{-1}$, $k^{-2}(\eta + {}^1/_4\gamma)^{-1}$, имеются еще два основных времени: τ и $\mu^{-1}k^{-2}$, характеризующих вращательную перестройку структуры жидкости.

В силу линейной связи (2.3) между $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{M}$ вихревые неоднородности поля $\mathbf{M}$ с заданным k затухают со временем так же, как и пульсации $\mathbf{\Omega}$, в то время как безвихревая часть поля затухает как $\exp[-t(1/\tau + \mu k^2)]$.

Что касается полной кинетической энергии турбулентных движений, то на конечной стадии вырождения турбулентности, когда движения масштабов, меньших размера зоны влияния релаксации структуры $\tau^{1/2}(\eta + \mu + {}^1/_4\gamma)^{1/2}$, практически затухают, убывание кинетической энергии будет описываться законом $t^{-5/2}$, как и в вязкой жидкости.

Поступила 28 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Городцов В. А., Мясников В. П. Конечный период вырождения турбулентных движений упруго-вязких жидкостей. ПМТФ, 1965, № 4.
2. Баренблатт Г. И., Булина И. Г., Зельдович Я. Б., Калашников В. Н., Шоломович Г. И. Об одном возможном механизме влияния малых добавок высокомолекулярных соединений на турбулентность. ПМТФ, 1965, № 5.
3. Шлиомис М. И. К гидродинамике жидкости с внутренним вращением. Ж. эксперим. и теор. физ., 1966, 51, вып. 1.