

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.372

ПРИЧИННОСТЬ И ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ

Н.И. Зорин, Д.А. Алексеев*

ООО «Северо-Запад», 108811, Москва, пос. Московский, бизнес-центр «Румянцево», стр. 1а, офис 412а, Россия

* Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Москва, Нахимовский просп., 36, Россия

Рассматривается проблема причинности в низкочастотной электроразведке с искусственным и естественным источниками. Приведены численные примеры применения дисперсионных соотношений к спектрам передаточных функций методов вызванной поляризации и частотного зондирования, а также к компонентам теллурического, горизонтального магнитного и других магнитотеллурических тензоров. Предложены подходы к обработке и интерпретации спектров, в которых дисперсионные соотношения нарушаются.

Дисперсионные соотношения, причинность, минимальная фаза, вызванная поляризация, частотное зондирование, магнитотеллурика.

CAUSALITY AND DISPERSION RELATIONS IN ELECTRICAL PROSPECTING

N.I. Zorin and D.A. Alekseev

The problem of causality in low-frequency electrical prospecting with artificial and natural sources is considered. We present numerical examples of the application of dispersion relations to transfer function spectra used in the induced polarization and frequency sounding methods and to the components of telluric, horizontal magnetic, and other magnetotelluric tensors. Approaches to the processing and interpretation of spectra with violated dispersion relations are proposed.

Dispersion relations, causality, minimum phase, induced polarization, controlled-source electromagnetics, magnetotellurics

ВВЕДЕНИЕ

Частотные спектры применяемых в геофизике передаточных функций не могут быть произвольными, всегда оставаясь в рамках определенных ограничений. Это дает возможность использовать свойства того или иного класса функций в качестве априорной информации об измеряемом сигнале, среди прочего позволяя значительно повысить помехоустойчивость методов. Одним из наиболее важных в этом смысле является класс причинных спектров, мнимая и вещественная части которых связаны дисперсионными соотношениями (ДС). Не меньшее значение представляет и несколько более узкий класс минимум-фазовых (МФ) спектров, в которых аналогичные соотношения связывают также амплитудную и фазовую кривые.

ДС были введены в теорию низкочастотной электроразведки А.А. Кауфманом [1960] и нашли применение в методах частотного зондирования [Кауфман, 1960; Ваньян и др., 1961; Qian, Voerner, 1992], вызванной поляризации [Fuller, Ward, 1970; Zonge et al., 1972; Guptasarma, 1984] и магнитотеллурики [Kunetz, 1972; Weidelt, 1972; Bhoel et al., 1977; Sutarno, Vozoff, 1991; Marcuello et al., 2005]. Целью настоящей работы является систематизация и развитие существующих представлений о причинных и МФ спектрах, а также более детальное изучение проблемы нарушения дисперсионных соотношений в передаточных функциях низкочастотной электроразведки.

Статья состоит из четырех частей. В первой части рассмотрены наиболее важные следствия выполнения принципа причинности и приведен краткий вывод основных используемых формул в удобной для задач электроразведки форме. Вторая и третья части посвящены проблемам применения ДС при

изучении физически реализуемых систем, в том числе при проведении геофизических измерений методами вызванной поляризации (ВП), частотного зондирования (ЧЗ) и магнитотеллурики (МТ). Наконец, в заключительной части работы рассматриваются основные типы неминимум-фазовых (НМФ) и непрямолинейных передаточных функций, которые могут встречаться в электроразведке.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Причинные спектры

Пусть $F(\omega)$ — квадратично-интегрируемый спектр вещественного сигнала $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = F_r(\omega) + iF_i(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\varphi(\omega)}. \quad (1)$$

Рассмотрим плоскость комплексных частот $\Omega = \omega + iz$. Тогда в соответствии с теоремой Титчмарша [Titchmarsh, 1948; Nussenzweig, 1972] следующие четыре утверждения эквивалентны:

$$f(t) = 0 \text{ при } t < 0; \quad (2a)$$

$$F(\Omega) \text{ — аналитическая и квадратично-интегрируемая при } \forall z > 0; \quad (2b)$$

$$F_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_r(\omega_0) d\omega_0}{\omega_0 - \omega}; \quad (2c)$$

$$F_r(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_i(\omega_0) d\omega_0}{\omega_0 - \omega}, \quad (2d)$$

где символ P показывает, что интегралы рассматриваются в смысле главного значения.

Условие (2a) определяет класс причинных функций, описывающих системы, реакция которых не может наступить до момента внешнего воздействия на систему $t_0 = 0$. По аналогии, спектры $F(\omega)$, аналитическое продолжение которых удовлетворяет условию (2b), называют причинными спектрами [Toll, 1956]. Наконец, из частей (2c) и (2d) теоремы Титчмарша следует, что вещественная и мнимая части любого причинного спектра связаны интегральным преобразованием Гильберта.

Заметим, что при использовании $e^{-i\omega t}$ вместо $e^{i\omega t}$ в определении (1) условие (2b) будет относиться не к верхней, а к нижней комплексной полуплоскости, а знаки перед интегралами в (2c) и (2d) поменяются на противоположные. Для исключения возможной путаницы в последующих формулах и примерах мы будем всегда придерживаться определения прямого преобразования Фурье, представленного выражением (1). В такой конвенции, в частности, фаза комплексного сопротивления поляризуемого тела положительна, а фаза МТ импеданса над однородным полупространством отрицательна (-45°).

Поскольку $f(t)$ представляет собой вещественную функцию времени, то вещественная часть ее спектра $F_r(\omega)$ будет четной функцией частоты, а мнимая часть $F_i(\omega)$ — нечетной, поэтому формулы (2c) и (2d) можно переписать как

$$F_i(\omega) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\omega F_r(\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega_0, \quad (3a)$$

$$F_r(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\omega_0 F_i(\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega_0. \quad (3b)$$

В абсолютном большинстве задач электроразведки изучаемые спектры наиболее информативны в логарифмическом масштабе, для перехода к которому удобно ввести новую переменную $u = \ln(\omega_0 / \omega)$. Тогда $\omega_0 = \omega e^u$, $d\omega_0 = \omega e^u du$, следовательно,

$$F_i(\omega) = -\frac{2}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_r(\omega e^u)}{e^u - e^{-u}} du = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} F_r(\omega e^u) \operatorname{csch} u du, \quad (4a)$$

$$F_r(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_i(\omega e^u)}{1 - e^{-2u}} du = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\omega e^u) [\coth u + 1] du. \quad (4b)$$

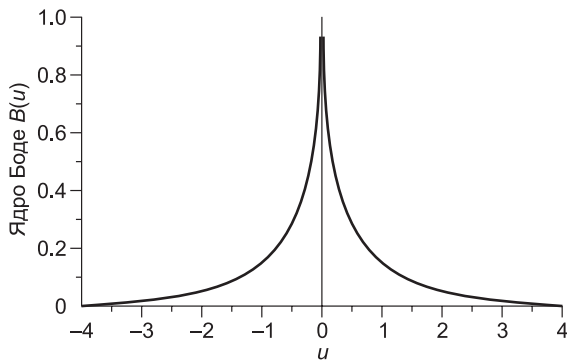


Рис. 1. Ядро Боде.

В соответствии с теоремой Титчмарша формулы (4а) и (4б) эквивалентны, однако по ряду причин применение первой из них оказывается более удобным на практике, поэтому далее мы будем рассматривать только ее. Принимая во внимание нечетность функции $\operatorname{csch}(u)$, после интегрирования (4а) по частям получаем

$$F_i(\omega) = -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_r(\omega e^u)}{du} B(u) du, \quad (5a)$$

$$B(u) = \frac{2}{\pi^2} \ln \coth \frac{|u|}{2}, \quad (5b)$$

где ядро Боде $B(u)$ нормализовано таким образом, чтобы его интеграл по бесконечным пределам был равен единице [Bode, 1945]. Кроме того, $B(u)$ обращается в бесконечность при $u \rightarrow 0$, тем самым напоминая расширенную дельта-функцию (рис. 1). Из этого следует, что если $F_r(\omega_0 e^u)$ в окрестности $u = 0$ слабо зависит от аргумента, то выражение (5а) упрощается до

$$F_i(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{dF_r(\omega)}{d \ln \omega}. \quad (6)$$

В общем случае оценка (6) является достаточно грубой, особенно если $F_r(\omega)$ сильно зависит от частоты (рис. 2, штриховая линия). Для получения более точного выражения положим $F_r^{\ln}(\ln \omega) = F_r(\omega)$, $F_i^{\ln}(\ln \omega) = F_i(\omega)$. Тогда из формулы (5а) следует

$$F_i^{\ln}(\ln \omega) = -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_r^{\ln}(\ln \omega_0)}{d \ln \omega_0} B(\ln \omega - \ln \omega_0) d \ln \omega_0 \quad (7)$$

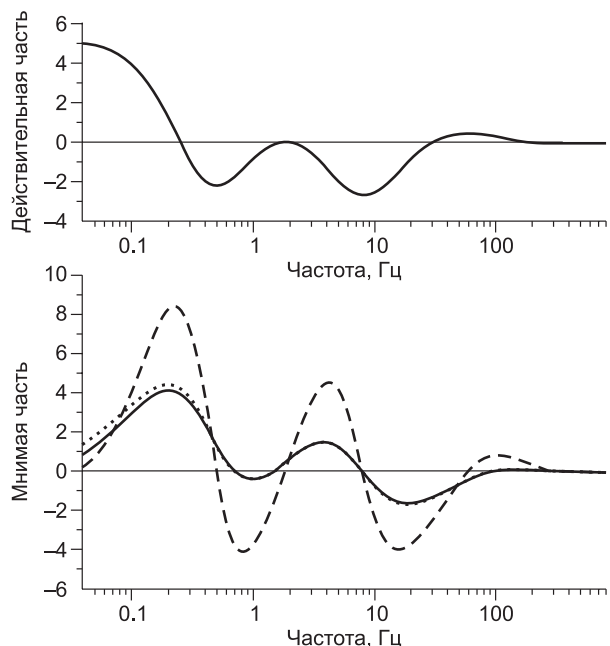
или, обозначив операцию свертки знаком $*$,

$$F_i^{\ln}(\ln \omega) = -\frac{\pi}{2} \frac{dF_r^{\ln}(\ln \omega)}{d \ln \omega} * B(\ln \omega). \quad (8)$$

Из определения (5b) и рис. 1 видно, что ядро Боде представляет собой бесконечный симметричный усредняющий фильтр. Таким образом, формула (8) означает, что мнимая часть причинного спектра равна сглаженной производной его вещественной части на логарифмическом бланке. При этом более 90 % площади фильтра $B(u)$ лежит в интервале $u \in (-\ln 10; \ln 10)$, поэтому для точной

Рис. 2. Пример вычисления мнимой части причинного спектра (сплошная линия, снизу) по действительной (сплошная линия, сверху) с помощью приближенного соотношения (6) (штриховая линия) и точной формулы (8) (пунктирная линия).

Расхождение между пунктирной и сплошной линиями в левой части рисунка обусловлено отсутствием информации о поведении действительной части спектра за пределами рассматриваемого частотного диапазона.



оценки $F_i(\omega)$ по $F_r(\omega)$ достаточно отступить от края доступной полосы частот на декаду (см. рис. 2, пунктирная линия). С другой стороны, это означает, что $F_i(\omega)$ несет существенную информацию о поведении $F_r(\omega)$ не только внутри, но и за пределами измеренной полосы частот, с чем, например, связана повышенная эффективность совместной инверсии вещественной и мнимой частей передаточных функций электроразведки.

МИНИМУМ-ФАЗОВЫЕ СПЕКТРЫ

В соответствии с (2b) причинный спектр $F(\omega)$ является граничным значением при $z = 0$ функции $F(\Omega)$, аналитической в верхней комплексной полуплоскости. Потребуем дополнительно, чтобы $F(\Omega)$ в той же области не обращалась в ноль — такие спектры, а также их Фурье-прообразы называются минимум-фазовыми (смысл данного названия будет понятен позже). В этом случае функция $G(\Omega) = \ln F(\Omega)$ также будет аналитической, и ее мнимая и вещественная части окажутся связанными преобразованием Гильберта. Поскольку $G(\omega) = G_r(\omega) + iG_i(\omega) = \ln|F(\omega)| + i\varphi(\omega)$, то приведенные выше соотношения между $F_r(\omega)$ и $F_i(\omega)$ будут также справедливы для $\ln|F(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$. В частности, из формулы (8) получаем

$$\varphi^{\ln}(\ln \omega) = -\frac{\pi}{2} \frac{dM(\ln \omega)}{d \ln \omega} * B(\ln \omega), \quad (9)$$

где $M(\ln \omega) = \ln|F(\omega)|$, т. е. фаза МФ спектра равна сглаженной производной его амплитуды на билогарифмическом бланке (см. [Bechhoefer, 2011]).

Упрощенная форма выражения (9) по аналогии с формулой (6) принимает вид

$$\varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d \ln|F(\omega)|}{d \ln \omega}. \quad (10)$$

НЕИНТЕГРИРУЕМЫЕ СПЕКТРЫ

Требование квадратичной интегрируемости не является существенным с точки зрения принципа причинности, однако необходимо для того, чтобы оба соотношения (2c), (2d) выполнялись в строгом виде. Действительно, в общем случае взаимно-однозначного соответствия между вещественной и мнимой частями (амплитудой и фазой) физически реализуемых спектров не существует — это следует хотя бы из того, что с помощью включения элементарного резистора в электрическую цепь можно изменить вещественную часть ее импеданса, не меняя его мнимой части, а с помощью усилителя сигнала изменить амплитуду спектра, не меняя его фазы. Однако, если система остается причинной, то ДС могут быть применены и к неинтегрируемому спектру, для чего обычно достаточно их лишь несколько модифицировать («обобщить»).

В качестве иллюстрации рассмотрим функцию $K(\Omega)$, аналитическую в верхней комплексной полуплоскости, но стремящуюся при $\omega \rightarrow \infty$ к некоторому постоянному ненулевому значению: в электроразведке такой функцией может быть, например, кажущееся сопротивление $\rho_k(\omega)$. Поскольку $K(\infty) \neq 0$, то спектр $K(\omega)$ не является интегрируемым, однако, если при этом он ограничен, то нормированный спектр $\tilde{K}(\omega) = K(\omega) - K(\infty)$ будет удовлетворять условиям теоремы Титчмарша, и в нем ДС будут выполняться.

Из приведенного примера видно, что в неинтегрируемом, но ограниченном спектре действуют обобщенные дисперсионные соотношения первого порядка, определяющие его компоненты с точностью до константы. При дальнейшем ослаблении накладываемых на поведение спектра условий ДС приобретают дополнительные переменные («вычитания»), с помощью которых могут быть формально обобщены для функций с любым конечным количеством полюсов на действительной оси частот [Toll, 1956; Nussenzweig, 1972]. Ввиду этого далее для простоты мы будем называть причинными любые спектры, аналитические в верхней комплексной полуплоскости (а если они в этой области еще и не обращаются в ноль, то минимум-фазовыми), независимо от их интегрируемости.

НЕМНОГО О ТЕРМИНОЛОГИИ

С точки зрения комплексного анализа формулы (2c), (2d) для аналитических функций являются частным случаем теоремы Сохоцкого—Племеля (которая, в свою очередь, непосредственно вытекает из формулы Коши) и в математической литературе обычно встречаются под аналогичными названиями [Жданов, 1984]. Выполнение соотношения (3a) в спектре физической величины было впервые обнаружено независимо Р. Кронигом и Х. Крамерсом при описании дисперсии рентгеновского излучения в элементарных моделях атомного газа [Kronig, 1926; Kramers, 1927], и поэтому приобрело широкую из-

вестность как дисперсионное соотношение Крамерса—Кронига [Nussenzweig, 1972; Bechhoefer, 2011]. Целый ряд уравнений, описывающих связь между компонентами МФ функций, был получен и популяризован в классических работах по теории управляющих систем Х. Боде [Bode, 1940, 1945], вследствие чего в инженерной литературе формула (9) известна как соотношение Боде [Kunetz, 1972; Bechhoefer, 2011].

В настоящей статье связь между вещественной и мнимой частями спектра мы будем называть ДС I рода, а между фазой и амплитудой — ДС II рода. Такой выбор призван подчеркнуть существенную разницу между ними: в то время как первое применимо к причинным спектрам, второе справедливо лишь для более узкого класса минимум-фазовых спектров.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Аналитичность, причинность и устойчивость

Рассмотрим произвольную физическую систему, испытывающую на «входе» некоторое внешнее воздействие $x(t)$, которому на «выходе» соответствует отклик $y(t)$. В предположении, что выход — линейный оператор входа, а отклик инвариантен относительно временных сдвигов (т. е. если рассматриваемая система является линейной и стационарной), связь между $x(t)$ и $y(t)$ будет иметь вид

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t-t')x(t')dt' = k(t) \cdot x(t), \quad (11)$$

где $k(t)$ — отклик системы на дельта-функцию Дирака $\delta(t)$, т.е. ее импульсная характеристика (ИХ). Перевод выражения (11) в частотную область дает

$$Y(\omega) = K(\omega)X(\omega). \quad (12)$$

где $K(\omega)$ — частотная характеристика (ЧХ) системы.

В большинстве случаев все особенности $K(\Omega)$ располагаются строго в нижней комплексной полуплоскости. Однако данное условие выполняется не всегда — так, ЧХ некоторых физически реализуемых систем (например, электрических цепей, состоящих только из реактивных элементов) имеют полюса на действительной оси частот, в результате чего $K(\omega)$ хоть и остается причинной, но перестает быть интегрируемой. Наконец, если функция $K(\Omega)$ имеет как минимум один полюс в верхней комплексной полуплоскости, и, следовательно, не является аналитической в указанной области, то спектр $K(\omega)$ будет неспричинным по определению, а соответствующая ему импульсная характеристика $k(t)$ будет либо также неспричинной (т.е. отличной от нуля при $t < 0$), либо неустойчивой (т. е. неограниченно возрастающей со временем).

В качестве примера рассмотрим ИХ некоторой физической системы вида

$$k(t) = \theta(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad (13)$$

где α и β — вещественные числа, а $\theta(t)$ — функция Хэвисайда, обеспечивающая причинность $k(t)$.

При $\alpha < 0$ отклик системы представляет собой затухающую синусоиду и его ЧХ может быть легко получена с помощью прямого преобразования Фурье

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)e^{i\omega t} dt = \frac{\beta}{\beta^2 + (\alpha + i\omega)^2}. \quad (14)$$

Поскольку спектр $K(\omega)$ — квадратично-интегрируемый, то в соответствии с условием (2а) он обладает всеми свойствами причинных спектров — так, вещественная и мнимая компоненты $K(\omega)$ связаны ДС I рода, а все полюса $K(\Omega)$ лежат в нижней комплексной полуплоскости (в точках $\Omega_{1,2} = i\alpha \pm \beta$).

При $\alpha = 0$ импульсная характеристика $k(t)$ перестает быть интегрируемой, однако ее спектр может быть определен с помощью обобщенных функций

$$K(\omega) = \frac{1}{\beta^2 - \omega^2} + \frac{\pi i}{2} [\delta(\omega - \beta) - \delta(\omega + \beta)]. \quad (15)$$

Отметим, что особенности $K(\Omega)$ переместятся в точки $\Omega_{1,2} = \pm\beta$ действительной оси частот, делая ЧХ $K(\omega)$ неинтегрируемой, а теорему Титчмарша формально неприменимой.

Если положить $\alpha > 0$, то спектр Фурье импульсной характеристики $k(t)$ перестанет существовать. Но, поскольку $k(t) = 0$ при $t < 0$, то ЧХ системы может быть получена с помощью преобразования Лапласа

$$K(s) = \int_0^{+\infty} k(t) e^{-st} dt = \frac{\beta}{\beta^2 + (\alpha - s)^2}. \quad (16)$$

Легко видеть, что после формальной замены s на $-i\omega$, выражения (16) и (14) совпадут, т. е. формула (14) «останется верной» и для $\alpha > 0$. Однако в этом случае особенности при $\Omega_{1,2} = i\alpha \pm \beta$ уже окажутся в верхней полуплоскости комплексных частот, тем самым нарушая условие (2b). Как следствие, применение к спектру (14) обратного преобразования Фурье при $\alpha > 0$ дает непричинную ИХ

$$k'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \theta(-t) e^{\alpha t} \sin(-\beta t). \quad (17)$$

Приведенный пример демонстрирует важную особенность непричинных спектров: при определении соответствующей им импульсной характеристики мы можем потребовать от нее устойчивости (и получить непричинный отклик) или, наоборот, причинности (и получить неустойчивый отклик). В то же время и причинной, и устойчивой ИХ с таким спектром быть не может.

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ПАССИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Перейдем к изучению свойств пассивных (т.е. не содержащих в себе никаких источников энергии и, следовательно, способных только к ее поглощению) электрических цепей, наиболее интересных с точки зрения электроразведки.

Пассивные системы не способны к самостоятельной генерации сигнала на выходе и, следовательно, являются причинными. Кроме того, в соответствии с законом сохранения энергии они всегда устойчивы, из чего можно сделать вывод, что ЧХ любой пассивной электрической схемы представляет собой причинный спектр [Bode, 1945].

Простейшим примером такой схемы является пассивный двухполюсник — «черная коробка», к единственному клеммам которой подключен как источник, так и измеритель тока/напряжения (рис. 3). Уравнения связи в этом случае записываются как

$$U_1(\omega) = Z_{11}(\omega) I_1(\omega), \quad (18a)$$

$$I_1(\omega) = Y_{11}(\omega) U_1(\omega), \quad (18b)$$

где $Z_{11}(\omega)$ — входное сопротивление (или импеданс), а $Y_{11}(\omega)$ — входная проводимость (или адмитанс) двухполюсника. Поскольку $Z_{11}(\omega) = 1/Y_{11}(\omega)$, то из причинности этих двух функций следует также и то, что обе они обязаны быть минимум-фазовыми: действительно, если бы хоть одна из них обращалась в ноль в некоторой точке верхней комплексной полуплоскости, то для второй функции эта точка оказалась бы полюсом, что противоречит определению причинного спектра (2b).

Взяв вместо «черной коробки» элементарный объем произвольной изотропной среды, получим, что спектры $Z_{11}(\omega)$ и $Y_{11}(\omega)$ описывают ее эффективное удельное сопротивление $\rho(\omega)$ и проводимость $\sigma(\omega)$, соответственно, откуда следует, что и $\rho(\omega)$ и $\sigma(\omega) = 1/\rho(\omega)$ также являются МФ.

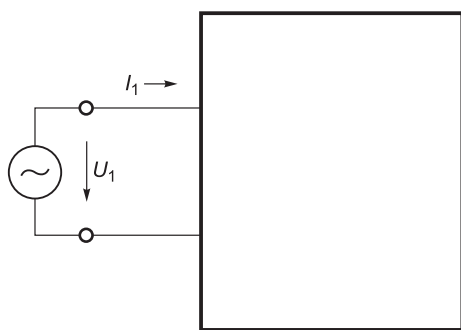


Рис. 3. Принципиальная схема двухполюсника.

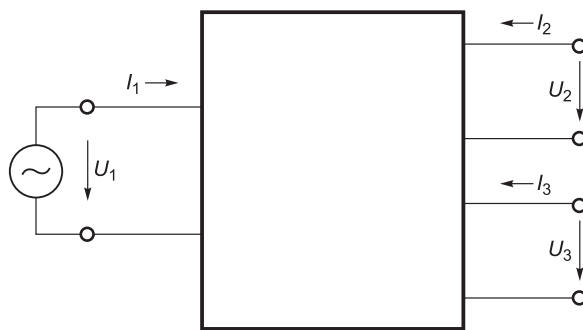


Рис. 4. Принципиальная схема шестиполюсника.

С точки зрения электроразведки Земля в общем случае может быть описана с помощью модели пассивного многополюсника (рис. 4). Так, при работах методами сопротивления или ВП, а также в большинстве модификаций метода ЧЗ измеряемым спектром является переходный импеданс $Z_{21}(\omega) = U_2(\omega) / I_1(\omega)$. Поскольку спектр $Z_{21}(\omega)$ представляет собой ЧХ пассивной электрической цепи, то он является причинным. То же самое можно сказать и про переходный адмитанс $Y_{21}(\omega) = I_2(\omega) / U_1(\omega)$, однако на этот раз эти два спектра не обязаны быть минимум-фазовыми, поскольку в общем случае не являются обратными друг другу. Аналогичным образом можно связать любую выходную функцию данного многополюсника с любой входной и получить причинную (но не обязательно МФ) частотную характеристику: $Z_{31}(\omega) = U_3(\omega) / I_1(\omega)$; $T_{21}(\omega) = I_2(\omega) / I_1(\omega)$ и т. д.

Если входной сигнал неизвестен как, например, в МТ методах, то ни одна частотная характеристика многополюсника не может быть непосредственно измерена и остается работать только со взаимными передаточными функциями. Такие функции связывают спектры двух выходных сигналов и в общем случае не обязаны быть даже причинными. Действительно, например, для взаимного импеданса Z_{22} имеем

$$Z_{22}(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{I_2(\omega)} = \frac{Z_{21}(\omega)I_1(\omega)}{T_{21}(\omega)I_1(\omega)} = \frac{Z_{21}(\omega)}{T_{21}(\omega)}. \quad (19)$$

И $Z_{21}(\omega)$, и $T_{21}(\omega)$ — причинные спектры, однако если $T_{21}(\omega)$ не является минимум-фазовым и у $T_{21}(\Omega)$ есть нули в верхней полуплоскости, не совпадающие с нулями $Z_{21}(\Omega)$, то все они окажутся полюсами функции $Z_{22}(\Omega)$, и спектр $Z_{22}(\omega)$ уже не будет причинным. Таким образом, из причинности и устойчивости физической системы вовсе не следует причинность и устойчивость связи между любыми ее измеряемыми компонентами. К сожалению, в геофизической литературе встречаются рассуждения такого рода: например, Ю. Йи и К. Паулсон в широко известной дискуссии с Г. Эгбертом о МТ спектрах обосновывают причинность тензора импеданса \mathbf{Z} так: «поскольку \vec{E} и \vec{H} — причинные функции, то и система $\vec{E} = \mathbf{Z}\vec{H}$ будет причинной» [Yee, Paulson, 1990, с. 12]. Однако из рассмотренного выше примера видно, что для аналитичности \mathbf{Z} одной лишь аналитичности \vec{E} и \vec{H} недостаточно, так как спектр \vec{H} в общем случае не обязан быть минимум-фазовым. Таким образом, утверждения о причинности той или иной взаимной передаточной функции всегда требуют отдельного обоснования.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ

Метод вызванной поляризации

В классическом методе ВП в качестве изучаемой функции используется кажущееся сопротивление $\rho_k(\omega)$, представляющее собой нормированное на некоторый геометрический коэффициент отношение спектра напряжения $U(\omega)$ на измерительных электродах к спектру силы тока $I(\omega)$ в питающей линии. Таким образом, $\rho_k(\omega)$ является ЧХ пассивного четырехполюсника и в рамках такой модели всегда должна оставаться причинной. Нарушение ДС между измеренными компонентами $\rho_k(\omega)$ может свидетельствовать о значительном влиянии сторонних помех (теллурические токи, промышленные наводки, естественная поляризация геологических тел и/или приемных электродов, и т. д.) на сигнал в измерительной линии. В то же время следует помнить, что внутренние помехи метода ВП (емкостные утечки, индукционные эффекты, наводки между проводами) не выходят за рамки рассматриваемой модели пассивного четырехполюсника и к нарушению принципа причинности привести не могут.

Поскольку эффективное удельное сопротивление $\rho(\omega)$ пассивных сред представляет собой МФ функцию, то при изучении эффекта ВП можно использовать общие свойства минимум-фазовых спектров. Например, закон постоянства площади фазовой характеристики [Bode, 1945] в терминах ВП примет следующий вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{ip}(\omega) d \lg \omega = \frac{\pi}{2} (\lg \rho_0 - \lg \rho_\infty) = -\frac{\pi}{2} \lg(1 - m), \quad (20)$$

где φ_{ip} — фаза ВП, ρ_0 и ρ_∞ — предельные значения сопротивления поляризуемой среды на бесконечно малой и бесконечно большой частотах соответственно, а переменной $m = (\rho_0 - \rho_\infty) / \rho_0$ обозначена поляризуемость [Seigel, 1959].

Формула (20) показывает, что площадь под графиком φ_{ip} на логарифмическом бланке не зависит от спектральных характеристик ВП и определяется лишь значением поляризуемости m . Покажем действие этого правила на примере наиболее распространенной в методе вызванной поляризации модели

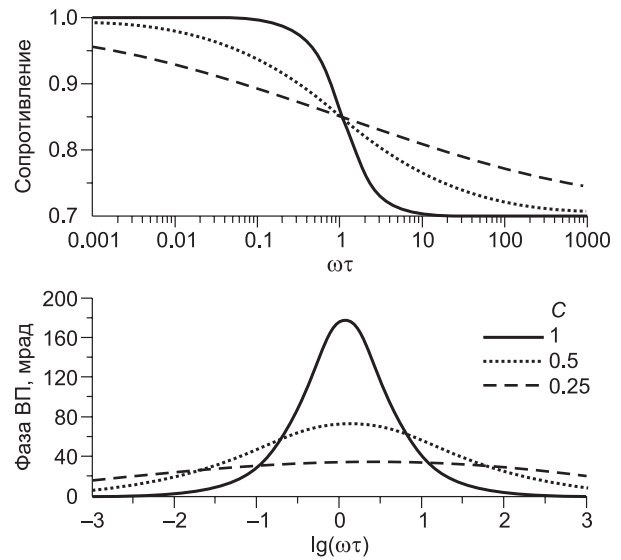
Рис. 5. Графики сопротивления и фазы ВП поляризуемого тела (модель Коул-Коул) для разных значений параметра C .

Поляризуемость фиксирована и составляет 30 %.

Коул-Коул [Cole, Cole, 1941; Pelton et al., 1983], которая с учетом используемого в тексте определения прямого преобразования Фурье (1) может быть записана как

$$\rho(\omega) = \rho_0 \left(1 - m \frac{(-i\omega\tau)^C}{1 + (-i\omega\tau)^C} \right), \quad (21)$$

где τ — постоянная времени сопротивления (с), а C — безразмерный коэффициент, определяющий ширину фазовой кривой. Частными случаями формулы (21) являются модели Дебая ($C = 1$), Варбурга ($C = 0.5$) и Маддена—Кантуэлла ($C = 0.25$) [Pelton et al., 1983]. На рис. 5 приведены графики амплитуды и фазы $\rho(\omega)$ этих трех моделей для фиксированной поляризуемости $m = 0.3$. Хорошо видно, что несмотря на сильное различие графиков, полная площадь S под фазовыми кривыми остается одинаковой. Более того, из соотношения (20) можно непосредственно получить ее значение, которое в данном случае будет равно $-(\pi/2)\lg(1-0.3) \approx 243$ мрад. Таким образом, МФ характер комплексного сопротивления поляризуемых тел может быть использован не только для оценки качества конкретных полевых или лабораторных данных, но и при исследовании общих свойств функций отклика ВП [Zonge et al., 1972; Guptaarma, 1984; Zorin, 2015].



Метод частотного зондирования

В качестве источника и приемника в методе ЧЗ используются заземленные линии и/или магнитные диполи, которые при этом могут быть совмещены или разнесены; однако во всех случаях исследуемая функция представляет собой ЧХ пассивного четырехполюсника. Следовательно, независимо от строения геоэлектрического разреза и типа используемой установки вещественная и мнимая части спектра функции отклика ЧЗ всегда связаны ДС I рода, что можно использовать, например, для контроля качества данных [Macnae, Springall, 2011].

Абсолютное большинство передаточных функций частотного зондирования помимо причинных обладают также МФ свойствами, что позволяет применять к ним ДС не только I, но и II рода [Ваньян и др., 1961; Qian, Voerner, 1992].

В качестве интересного примера рассмотрим отклик ЧЗ от следующей модели: в однородном проводящем полупространстве ($10 \text{ Ом} \cdot \text{м}$) на глубине от 30 до 130 м расположен горизонтальный экранирующий слой ($1000 \text{ Ом} \cdot \text{м}$). Источник и приемник — заземленные электрические линии, установка — дипольная осевая, разнос — 2 км. Численное моделирование проведено с помощью программы EM1D (автор П.Ю. Пушкарев), результаты которого для всех компонент нормированного спектра $F(\omega)$ показаны на рис. 6.

Как и следовало ожидать, для $F(\omega)$ выполняется ДС I рода, что хорошо видно из левого нижнего графика, где на его мнимую компоненту (см. рис. 6, сплошная линия) наложен результат применения формулы (8) к его вещественной компоненте (см. рис. 6, пунктирная линия). Однако то же самое можно сказать и про ДС II рода, результат применения которого приведен пунктирной линией на правом нижнем графике. Таким образом, $F(\omega)$ оказывается не только причинным, но еще и МФ спектром, что на первый взгляд может показаться странным, принимая во внимание возникающий на частоте около 1000 Гц антирезонанс (см. рис. 6, справа вверху), связанный с влиянием экранирующего слоя на электрическое поле в точке измерения. На самом деле никакого противоречия здесь нет, поскольку наличие нуля или нарушение аналитичности функции в замкнутой нижней комплексной полуплоскости (в том числе и на действительной оси частот) не обязательно влечет за собой несоблюдение аналогичных требований в открытой верхней полуплоскости, что и демонстрируют полученные результаты.

Данный пример не означает, что любые передаточные функции ЧЗ должны иметь МФ характер. В некоторых частных случаях, например, при работе с совмещенными установками, когда изучаемую систему можно заменить пассивным двухполюсником, отклик ЧЗ всегда будет минимум-фазовым [Све-

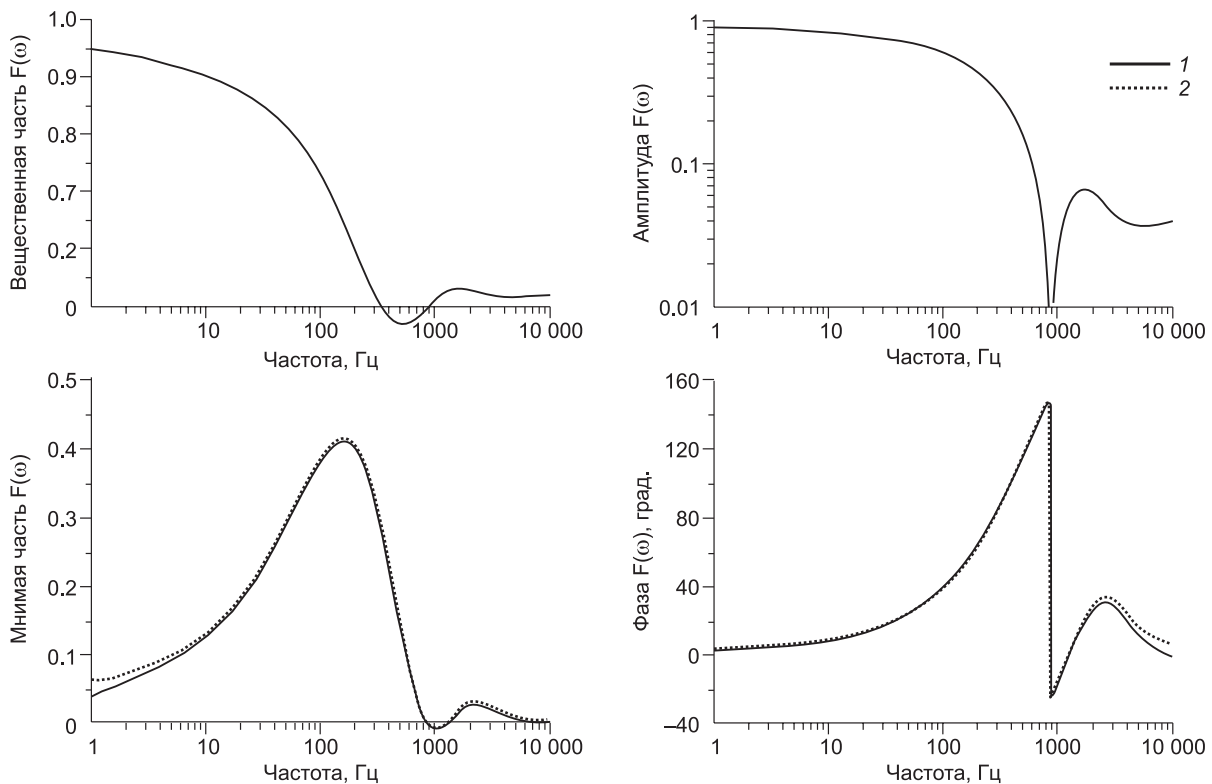


Рис. 6. Компоненты передаточной функции ЧЗ над одномерной моделью с экранирующим слоем.

1 — точная кривая, 2 — показаны результаты применения дисперсионных соотношений I рода (слева) и II рода (справа).

тов, 1991], однако в общем случае при проведении частотного зондирования сложнопостроенного геоэлектрического разреза ДС II рода не обязаны выполняться.

Магнитотеллурические методы

ДС II рода давно и широко используются в методе магнитотеллурического зондирования, главным образом для контроля качества данных и повышения устойчивости определения тензора импеданса [Kunetz, 1972; Bhoel et al., 1977; Sutarno, Vozoff, 1991]. Тем не менее вопрос о причинности МТ передаточных функций в общем случае остается предметом дискуссий [Egbert, 1990; Yee, Paulson, 1990; Berdichevsky, 1999], поэтому его необходимо рассмотреть более подробно.

1D среды. В одномерном изотропном геоэлектрическом разрезе горизонтальное магнитное поле на земной поверхности пропорционально первичному полю возбудителя, следовательно, спектр магнитной передаточной функции $h(\omega)$ является МФ, а магнитотеллурический импеданс $Z(\omega) = E(\omega) / H(\omega) = e(\omega) / h(\omega)$ — причинным [Светов, 1991]. Более того, П. Вайдельт показал, что $Z(\omega)$ обладает не только причинными, но и МФ свойствами [Weidelt, 1972], откуда непосредственно вытекает, что и адмитанс $Y(\omega) = 1 / Z(\omega)$ и спектр $e(\omega)$ передаточной функции, описывающей поведение горизонтального электрического поля на земной поверхности, тоже обязаны быть минимум-фазовыми.

2D среды. ЭМ поле в двумерном геоэлектрическом разрезе разделяется на две независимые части: ТЕ-моду или Е-поляризацию (электрическая компонента вдоль структур) и ТМ-моду или Н-поляризацию (электрическая компонента поперек структур). В последнем случае спектр магнитной передаточной функции $h_{TM}(\omega)$ и импеданс $Z_{TM}(\omega)$ являются минимум-фазовыми [Светов, 1991; Weidelt, Kaikonen, 1994], поэтому все рассуждения, приведенные выше для одномерного разреза, остаются справедливыми и для двумерных Н-поляризованных сред.

В Е-поляризованных изотропных средах импеданс $Z_{TE}(\omega)$ на земной поверхности по всей видимости также имеет МФ характер, что хоть и не является строго доказанным фактом, однако подтверждено с помощью целого ряда численных экспериментов [Shilovsky, 1988; Fischer, Schnegg, 1993; и др.] и, насколько нам известно, ни разу не было опровергнуто. Таким образом, с некоторыми оговорками,

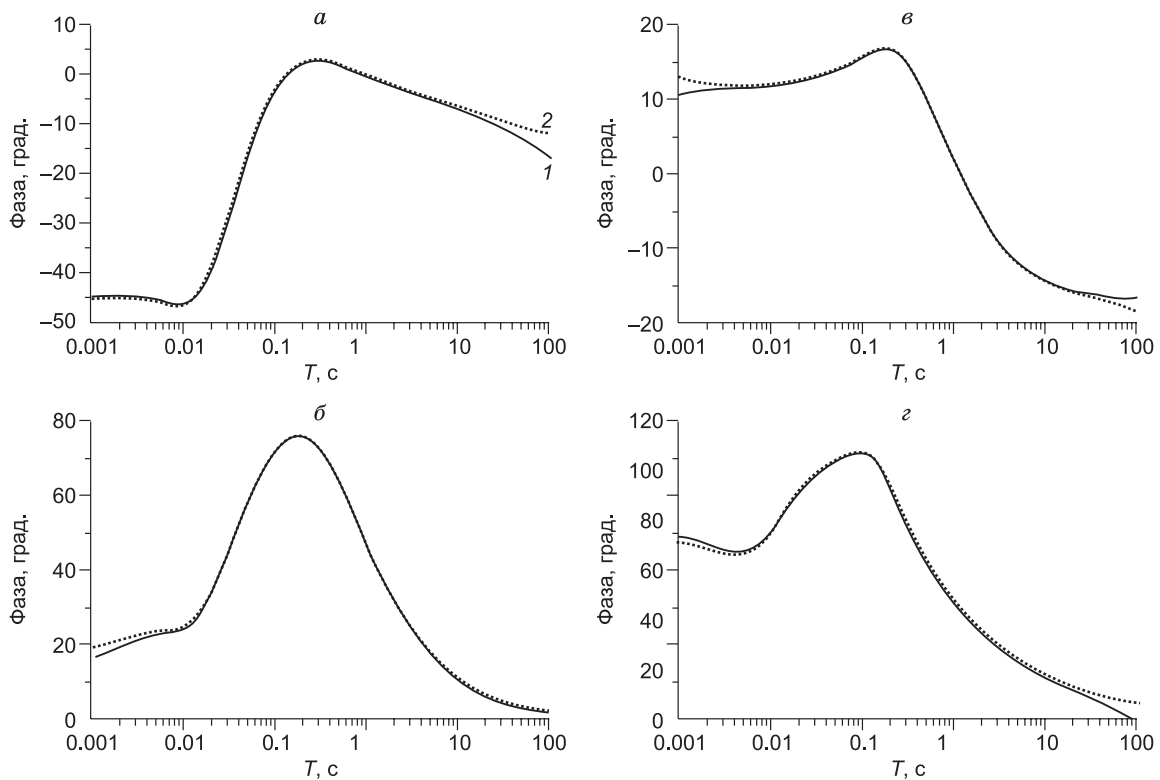


Рис. 7. Фазы продольных компонент тензора импеданса Z (а), теллурического тензора T (б), горизонтального магнитного тензора M (в) и матрицы Визе W (г) над двумерной моделью.

1 — точная кривая, 2 — показаны результаты применения ДС II рода к соответствующим амплитудным кривым.

если $Z_{TE}(\omega)$, действительно, всегда имеет МФ характер, причем в $h_{TE}(\Omega)$ и $e_{TE}(\Omega)$ отсутствуют совпадающие нули в верхней полуплоскости, можно утверждать, что спектры последних (а значит и любые их отношения) также являются минимум-фазовыми.

В качестве примера рассмотрим двумерную модель [Selway et al., 2012], состоящую из полубесконечного приповерхностного проводника (1 Ом·м, мощность 100 м) в высокоомном полупространстве (10 000 Ом·м). Прямая задача была рассчитана для ТЕ-моды с помощью программы ZondMT2D (автор А. Каминский) на периодах от 10^{-3} до 10^2 с. Все полученные результаты относятся к точке на поверхности проводника, расположенной в двух километрах от его края. При таком выборе места измерения фаза Z_{TE} заметно выходит из «своей» четверти, т. е. отклик рассматриваемой модели в ТЕ-моды оказывается принципиально неоднородным [Weidelt, 1972]. В качестве базы для расчета теллурического и горизонтального магнитного тензоров использовалась вторая точка, расположенная также в 2 км от границы проводника, но уже на поверхности изолятора.

На рис. 7 сплошными линиями приведены фазы продольных компонент тензора импеданса Z_{TE} , теллурического тензора T_{TE} , горизонтального магнитного тензора M_{TE} и матрицы Визе W_{TE} , а пунктирными линиями — результаты применения ДС II рода к соответствующим амплитудным кривым: хорошо видно, что все представленные спектры носят МФ характер. Это полностью согласуется с полученными ранее выводами, а также наглядно показывает, что сам по себе выход фазы МТ функции из «своей» четверти совершенно не обязательно свидетельствует о нарушении в ней дисперсионных соотношений.

Прочие среды. Как известно, МТ импеданс может терять МФ свойства при измерении внутри проводящей среды [Alekseev et al., 2009; Karinos, Brasse, 2011] или при наличии сильной анизотропии сопротивления [Martí, 2014], поэтому важно подчеркнуть, что приведенные выше рассуждения и примеры относятся к поверхностным измерениям над изотропными 1D и 2D средами. Что же касается общего (трехмерного) случая, то достоверных примеров грубого нарушения ДС II рода в передаточных функциях МТ поля на дневной поверхности достаточно даже при рассмотрении изотропных сред [Berdichevsky, 1999; Ichihara, Mogi, 2009; Kaufman et al., 2014], обычно такие явления наблюдаются над

изгибами и краями контрастных проводящих тел в трехмерных разрезах и чаще всего связаны с резкими локальными изменениями направления электрического поля.

Детальный разбор нарушений ДС на синтетических и полевых МТ данных выходит за рамки настоящей работы, поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением свойств НМФ и не причинных функций электроразведки с наиболее общих теоретических позиций.

НАРУШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ В МТ ФУНКЦИЯХ

Пусть земля возбуждается однородным плоскополяризованным полем, источники которого расположены высоко в верхнем непроводящем полупространстве. В такой модели изучаемая система предстает в виде пассивного многополюсника с неизвестным входным сигналом (см. рис. 4), и любая МТ функция $a(\omega)$ внутри выбранной поляризации поля может быть представлена в виде отношения двух причинных (но принципиально неизмеримых на практике) спектров $b(\omega)$ и $c(\omega)$

$$a(\omega) = \frac{b(\omega)}{c(\omega)}. \quad (22)$$

Последние, вообще говоря, не обязаны быть минимум-фазовыми, что, в свою очередь, может приводить к нарушениям ДС в спектре $a(\omega)$, обусловленным возникновением одной из трех ситуаций, описанных ниже.

1. $b(\omega)$ — НМФ, $c(\omega)$ — МФ.

В этом случае $a(\omega)$ является не МФ, но причинным спектром, так как функция $c(\Omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости, и, следовательно, деление на нее не нарушает аналитичности всего отношения в указанной области. В таких спектрах ДС II рода не выполняется, однако его нарушение имеет строго определенный характер [Bechhoefer, 2011; Kaufman et al., 2014], на чем стоит остановиться подробнее.

Возможность появления НМФ передаточных функций с математической точки зрения объясняется тем, что существует неограниченное количество причинных спектров с одной и той же амплитудой. При этом среди них всегда можно выделить МФ («канонический») спектр, фаза которого связана с амплитудной кривой через ДС II рода. Все остальные спектры отличаются от канонического тем, что имеют не менее одного нуля в верхней комплексной полуплоскости, каждый из которых приводит к дополнительному фазовому сдвигу, т. е. как и следует из его названия, МФ спектр обладает наименьшей фазой среди всех причинных спектров с заданной амплитудой. Действительно, пусть у некоторого причинного спектра $a_k(\omega)$ есть k нулей в верхней полуплоскости, т. е.

$$\exists \Omega_j = \alpha_j + i\beta_j, \beta_j > 0, j = \overline{1, k} \text{ такие, что } a_k(\Omega_j) = 0. \quad (23)$$

Тогда с помощью произведения Блашке [Toll, 1956] можно записать

$$a_k(\Omega) = \pm a_0(\Omega) \prod_{j=1}^k \frac{\omega - \Omega_j}{\omega - \Omega_j^*}, \quad (24)$$

где знак в правой части уравнения определяется значением $a_k(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ (т. е. знаком соответствующей ИХ в начальный момент времени).

МФ спектр $a_0(\omega)$ является каноническим представлением $a_k(\omega)$, так как он имеет тот же модуль, но уже не обращается в ноль в верхней полуплоскости. Таким образом, дополнительный сдвиг фазы, на который и нарушается ДС II рода в $a_k(\omega)$, определяется фазой произведения Блашке $\Delta\phi_k(\omega)$, которая принимает строго отрицательные значения и асимптотически стремится к $-\pi k$ при $\omega \rightarrow 0$.

В качестве примера возьмем элементарный НМФ спектр $a_1(\omega)$, имеющий единственный ноль в точке Ω_1 . Очевидно, комплексное число Ω_1 при этом должно быть чисто мнимым (в противном случае в силу свойства симметричности спектра вещественных функций нулей было бы два), поэтому

$$\Delta\phi_1 = \arg\left(\frac{\omega - i\beta_1}{\omega + i\beta_1}\right) = -2\operatorname{atan}\left(\frac{\beta_1}{\omega}\right) = -2\operatorname{atan}\left(\frac{T\beta_1}{2\pi}\right). \quad (25)$$

Легко видеть, что $\Delta\phi_1(T)$ монотонно убывает от нуля ($T \rightarrow 0$) до $-\pi$ ($T \rightarrow \infty$), «выбивая» фазу спектра a_1 на больших периодах в диаметрально противоположную четверть, что является очень характерным для поведения НМФ компонент МТ тензора импеданса [Ichihara, Mogi, 2009; Marti, 2014;

Kaufman et al., 2014]. Из формулы (25) также следует, что на логарифмической оси частот/периодов график $\Delta\varphi_1$ имеет одну и ту же форму для любых значений параметра β_1 , поэтому наличие и положение единственного нуля в причинном спектре несложно установить, даже если последний известен в ограниченном частотном диапазоне.

Вернемся к вопросу обработки и интерпретации НМФ функций рассматриваемого типа. Поскольку спектр $a(\omega)$ — причинный, то проблема оценки и улучшения качества его измерения легко решается использованием для этой цели ДС не II, а I рода. Таким образом, в программы обработки магнитотеллурических данных крайне желательно включать возможность проведения сплайнов не только в традиционном представлении «амплитуда—фаза», но и в варианте «вещественная часть—мнимая часть». Отметим, что вместо классического МТ тензора импеданса $Z(\omega)$ в этом случае удобнее рассматривать его частотно-нормированный вариант $Z(\omega)/\sqrt{i\omega\mu_0}$, компоненты которого более информативны в линейном масштабе оси ординат [Basokur, 1999].

Поскольку нарушение ДС II рода обычно свидетельствует о наличии сильноанизотропных или трехмерных тел в изучаемой среде, то наиболее естественный способ интерпретации данных такого типа заключается в проведении полноценной инверсии соответствующей размерности. Однако такой подход применим далеко не всегда, особенно в случае ограниченного количества данных. М.Н. Бердичевский [Berdichevsky, 1999] приводит следующий пример: допустим, что объектом исследования является глубокозалегающее сильно вытянутое тело и решение задачи ищется в классе двумерных моделей. В этом случае наличие приповерхностных трехмерных неоднородностей, нарушающих ДС II рода, делает совместную инверсию амплитудных и фазовых кривых невозможной. Для коррекции таких данных следует сравнить фактическую фазу с канонической кривой, рассчитанной через ДС II рода для центральных частот. Если разница между ними отвечает одному из элементарных НМФ откликов (например, равна $\Delta\varphi_1$), то можно восстановить каноническую фазу рассматриваемой компоненты во всем измеренном диапазоне частот [Zogin, Alekseev, 2014].

2. $b(\omega)$ — МФ, $c(\omega)$ — НМФ.

В этом случае $a(\omega)$ не является причинной и в ней не выполняются никакие дисперсионные соотношения. Однако ее можно привести к рассмотренному выше типу причинных, но не МФ функций простым обращением $\tilde{a}(\omega) = a^{-1}(\omega)$, после чего могут быть использованы уже описанные подходы.

3. $b(\omega)$ — НМФ, $c(\omega)$ — НМФ.

Данный случай оказывается самым неблагоприятным, поскольку в спектрах такого типа дисперсионные соотношения не выполняются наиболее произвольным образом, в частности, они могут несильно нарушаться, что значительно осложняет их идентификацию. Например, если ноль функции $b(\Omega)$ расположен близко к нулю функции $c(\Omega)$, то отрицательный фазовый сдвиг одного из них будет достаточно быстро скомпенсирован положительным сдвигом другого, в результате чего их общее влияние должно привести к образованию «горба» на фазовой кривой функции $a(\omega)$, который может быть неверно проинтерпретирован. В такой ситуации есть смысл проверить реакцию «подозрительной» компоненты МТ тензора на его вращение. Действительно, поскольку линейной комбинации функций передается аналитичность всех ее слагаемых, но не передается положение и количество нулей, то при вращении тензора ноль функции $b(\Omega)$ может исчезнуть/отдалиться от нуля функции $c(\Omega)$, делая нарушение ДС более явным, или, наоборот, полностью совпасть с ним, превращая функцию $a(\omega)$ в минимум-фазовую. Как бы то ни было, спектры такого типа на практике должны встречаться крайне редко, о чем также свидетельствует отсутствие опубликованных работ с примерами МТ функций, в которых ДС несильно (но достоверно) нарушаются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В статье описаны необходимые условия и наиболее важные следствия выполнения принципа причинности, приведены наглядные примеры его применения в самых разных областях низкочастотной электроразведки. В заключительной части рассмотрены основные свойства неминимум-фазовых и не-причинных спектров и предложены подходы к их обработке и интерпретации.

Наиболее общий вывод работы состоит в том, что в современной электроразведке недостаточно внимания уделяется ДС I рода, связывающему вещественную и мнимую части причинных спектров. Это вызвано тем, что обработка большинства данных традиционно ведется в представлении «амплитуда—фаза», где удобнее применять ДС II рода. К сожалению, последнее является менее универсальным, так как выполняется для более узкого класса функций. Кроме того, кривые «вещественная часть—мнимая часть» иногда определяются более устойчиво, поэтому было бы разумно использовать возможность

такого представления данных в программах обработки и интерпретации МТ методов и частотного зондирования наравне с традиционным.

Другая перспективная область применения ДС I рода — контроль точности расчета прямых задач, в том числе магнитотеллурических. Действительно, поскольку при численном моделировании спектр источника поля обычно является константой, то в качестве рассматриваемых выше причинных передаточных функций $b(\omega)$ и $c(\omega)$ выступают сами компоненты ЭМ поля в той или иной точке модели. Таким образом, при расчете прямой задачи ДС I рода обязаны выполняться для любой компоненты ЭМ поля в любой точке произвольной (трехмерной, анизотропной и т. д.) среды.

Значительный интерес также представляет возможность применения ДС не только в тензоре импеданса, но и в прочих МТ функциях. Поскольку любая функция, представляющая собой отношение некоторого причинного спектра к минимум-фазовому, тоже будет причинной, то для обеспечения выполнения ДС I рода во всех компонентах теллурического и горизонтального магнитного тензоров при изучении произвольно построенного разреза достаточно просто расположить базовую точку над одно- или двумерной изотропной средой. На практике, по всей видимости, база может выбираться и над относительно «спокойными» участками реальных трехмерных сред, т. е. на достаточном удалении от контрастных неоднородностей, резко возмущающих поведение ЭМ поля на дневной поверхности. Вообще при изучении какой-либо принципиальной модели среды на предмет соблюдения принципа причинности следует рассчитать для нее прямую задачу и отметить области пространства, в которых для той или иной компоненты поля не выполняются ДС II рода. Тогда принцип причинности может быть нарушен только в отмеченных областях и только для тех МТ функций, в которых НМФ компонента ЭМ поля окажется в знаменателе.

Среди основных направлений дальнейшей работы в рассматриваемой области следует выделить вопрос строгого обоснования МФ свойств поверхностного импеданса в двумерных изотропных E -поляризованных средах (или, наоборот, приведения достоверного примера нарушения ДС между его компонентами), а также более детальное изучение НМФ и не причинных МТ спектров на синтетических/полевых данных в свете приведенных выше теоретических соображений.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (№ 0149-2018-0005).

ЛИТЕРАТУРА

Ваньян Л.Л., Кауфман А.А., Терехин Е.И. Расчет фазовых кривых частотного зондирования способом трансформации // Прикладная геофизика, 1961, т. 30, с. 103—113.

Жданов М.С. Аналогии интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М., Наука, 1984, 326 с.

Кауфман А.А. Об изучении амплитудных и фазовых характеристик полей, применяемых в низко-частотной электроразведке // Изв. вузов. Геология и разведка, 1960, № 6, с. 34—41.

Светов Б.С. Передаточные функции электромагнитного поля // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1991, № 1, с. 119—128.

Alekseev D.A., Palshin N.A., Varentsov Iv.M. Magnetotelluric dispersion relations in a two-dimensional model of the coastal effect // Izv. Phys. Solid Earth, 2009, v. 45, p. 167—170.

Basokur A.T. Properties of the magnetotelluric frequency-normalised impedance over a layered medium // J. Balkan Geophys. Soc., 1999, v. 2, p. 63—74.

Bechhoefer J. Kramers-Kronig, Bode, and the meaning of zero // Am. J. Phys., 2011, v. 79, p. 1053—1059.

Berdichevsky M.N. Marginal notes on magnetotellurics // Surv. Geophys., 1999, v. 20, p. 341—375.

Bode H.W. Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design // Bell Syst. Tech. J., 1940, v. 19, p. 421—454.

Bode H.W. Network analysis and feedback amplifier design. New York, D. Van Nostrand Company, Inc. 1945, 551 p.

Boehl J.E., Bostick F.X., Smith H.W. An application of the Hilbert transform to the magnetotelluric method. Tech. Rep. Electr. Geophys. Res. Lab., University of Texas, Austin, 1977, 98 p.

Cole K.S., Cole R.H. Dispersion and absorption in dielectrics // J. Chem. Phys., 1941, v. 9, p. 341—351.

Egbert G.D. Comments on «Concerning dispersion relations for the magnetotelluric impedance tensor» by E. Yee and K.V. Paulson // Geophys. J. Int., 1990, v. 102, p. 1—8.

Fischer G., Schnegg P.A. The magnetotelluric dispersion relations over 2-D structures // Geophys. J. Int., 1993, v. 115, p. 1119—1123.

Fuller B.D., Ward S.H. Linear system description of the electrical parameters of rocks // IEEE Trans. Geosci. Electr., 1970, v. GE-8, p. 7—18.

- Guptasarma D.** True and apparent spectra of buried polarizable targets // *Geophysics*, 1984, v. 49, p. 171—176.
- Ichihara H., Mogi T.** A realistic 3-D resistivity model explaining anomalous large magnetotelluric phases: The L-shaped conductor model // *Geophys. J. Int.*, 2009, v. 179, p. 14—17.
- Kapinos G., Brasse H.** Offshore magnetotellurics in the presence of bathymetry // *Proceedings of the 24th Schmucker-Weidelt Colloquium*, 2011, p. 113—117.
- Kaufman A.A., Alekseev D., Oristaglio M.** *Methods in geochemistry and geophysics: Principles of EM methods in surface geophysics*. Amsterdam, Tokyo, Elsevier, 2014, 754 p.
- Kramers H.A.** La diffusion de la lumiere par les atomes // *Atti Cong. Intern. Fisica*, 1927, v. 2, p. 545—557.
- Kronig R.deL.** On the theory of the dispersion of X-rays // *J. Opt. Soc. Amer.* 1926, v. 12, p. 547—557.
- Kunetz G.** Processing and interpretation of magnetotelluric soundings // *Geophysics*, 1972, v. 37, p. 1005—1021.
- Macnae J., Springall R.** Dispersion constraints and the Hilbert transform for electromagnetic system response validation // *Expl. Geophys.*, 2011, v. 42, p. 1—6.
- Marti A.** The role of electrical anisotropy in magnetotelluric responses: From modelling and dimensionality analysis to inversion and interpretation // *Surv. Geophys.*, 2014, v. 35, p. 179—218.
- Nussenzweig H.M.** *Causality and dispersion relations*. New York, Acad. Press, 1972, 434 p.
- Pelton W.H., Sill W.R., Smith B.D.** Interpretation of complex resistivity and dielectric data. Part I // *Geophys. Trans.*, 1983, v. 29, p. 297—330.
- Seigel H.O.** Mathematical formulation and type curves for induced polarization // *Geophysics*, 1959, v. 24, p. 547—565.
- Selway K., Thiel S., Key K.** A simple 2-D explanation for negative phases in TE magnetotellurics data // *Geophys. J. Int.*, 2012, v. 188, p. 945—958.
- Shilovsky A.P.** Correlation between amplitude and phase of MN-response for 2D models // *Abstract of IX Workshop on EM Induction in the Earth*, 1988, p. 64.
- Sutarno D., Vozoff K.** Phase-smoothed robust M-estimation of magnetotelluric impedance functions // *Geophysics*, 1991, v. 56, p. 1999—2007.
- Titchmarsh E.C.** *Theory of Fourier integrals* // Clarendon Press, Oxford, second edition. 1948, p. 119—128.
- Toll J.S.** Causality and the dispersion relation: Logical foundations // *Phys. Rev.*, 1956, v. 104, p. 1760—1770.
- Qian W., Boerner D.E.** Using a causal dispersion relation to estimate phase from magnitude for controlled-source electromagnetic field measurements // *Geophys. J. Int.*, 1992, v. 111, p. 203—212.
- Weidelt P.** The inverse problem of geomagnetic induction // *Zeitschrift für Geophysik*, 1972, v. 38, p. 257—289.
- Weidelt P., Kaikkonen P.** Local 1-D interpretation of magnetotelluric B-polarization impedances // *Geophys. J. Int.*, 1994, v. 117, p. 733—748.
- Yee E., Paulson K.V.** Reply to the «Comments on: Concerning dispersion relations for the magnetotelluric impedance tensor» by G.D. Egbert // *Geophys. J. Int.*, 1990, v. 102, p. 9—13.
- Zonge K.L., Sauck W.A., Sumner J.S.** Comparison of time, frequency, and phase measurements in induced polarization // *Geophys. Prosp.*, 1972, v. 20, p. 626—648.
- Zorin N.** Spectral induced polarization of low and moderately polarizable buried objects // *Geophysics*, 2015, v. 80, p. E267—E276.
- Zorin N., Alekseev D.** On violation of dispersion relations: A method of MT phase correction // *Extended abstract. 22 EM Induction Workshop*. Weimar, Germany, 2014, 4 p.