

УДК 519.632.4

Решение уравнения Пуассона с особенностями методом коллокации и наименьших квадратов*

В.А. Беляев

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090
E-mail: belyaevasily@mail.ru, va.belyaev@itam.nsc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 13, 2020.

Беляев В.А. Решение уравнения Пуассона с особенностями методом коллокации и наименьших квадратов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 3. — С. 249–263.

Предложены и реализованы новые h-, p- и hp-варианты метода коллокации и наименьших квадратов (КНК) решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. В работе рассматриваются примеры решения задач с особенностями в виде больших градиентов, высокой скорости роста производных решения с ростом порядка дифференцирования, разрыва вторых производных на границе области в угловых точках, осциллирующего решения с различными частотами при наличии точки разрыва типа полюс для производных любого порядка. Новые варианты метода основаны на специальном выборе точек коллокации в корнях полиномов Чебышева первого рода, а также базисных функций в виде произведения полиномов Чебышева. Проанализировано поведение численного решения на последовательности сеток и при увеличении степени аппроксимирующего полинома с использованием точных аналитических решений. Получены формулы для операции продолжения, необходимые для перехода с грубой сетки на более мелкую на многосеточном комплексе в методе Федоренко.

DOI: 10.15372/SJNM20200302

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов, уравнение Пуассона, краевая задача, особенность, полиномы Чебышева, многосеточный алгоритм.

Belyaev V.A. Solving the Poisson equation with singularities by the least-squares collocation method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 3. — P. 249–263.

New h-, p- and hp-versions of the least-squares collocation method are proposed and implemented for solving the Dirichlet problem for the Poisson equation. The paper considers some examples of solving problems with singularities such as large gradients, high growth rate of solution derivatives with increasing the order of differentiation, discontinuity of the second-order derivatives at the angular points of the domain boundary, and the oscillating solution with different frequencies in the presence of an infinite discontinuity for derivatives of any order. The new versions of the method are based on a special selection of collocation points in the roots of the Chebyshev polynomials of the first kind. Basis functions are defined as a product of the Chebyshev polynomials. The behavior of the numerical solution on a sequence of grids and with an increase in the degree of the approximating polynomial has been analyzed using exact analytical solutions. The formulas for the continuation operation necessary for the transition from a coarse mesh to a finer one on a multi-grid complex in the Fedorenko method have been obtained.

Keywords: least-squares collocation method, Poisson equation, boundary value problem, singularity, Chebyshev polynomials, multigrid algorithm.

*Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы (проект № ААА-А19-119051590004-5).

Введение

В настоящей работе рассматриваются четыре примера решения краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона с разными особенностями. Это уравнение, как достаточно простое и часто встречающееся на практике (см. [1] и цитируемую там литературу), выбрано с целью исследования возможностей различных вариантов метода КНК в более сложных случаях. Здесь приведено описание алгоритмов решения задач в прямоугольной области. Кроме того, не составляет особого труда на основе уже проведенных ранее исследований рассмотреть решение этой задачи в нерегулярных областях [1], в том числе и в многосвязных областях, в которых могут возникать другие особенности.

Проведенные в данной статье численные эксперименты при решении уравнения Пуассона показывают, что при наличии особенностей в решении эллиптической задачи на последовательности сеток и при увеличении степени аппроксимирующего полинома может наблюдаться высокий порядок сходимости и повышенная точность решения. При этом, естественно, они в значительной мере зависят от типа особенности и используемого варианта метода КНК. Не исключено, что некоторые такие тестовые задачи можно считать эталонными при исследовании возможностей различных приближенных методов для решения краевых задач с особенностями.

В методе КНК, как и в других численных методах, количество итераций, необходимых для достижения заданной точности приближения к решению задачи, зависит от начального приближения. В [2] приведены формулы операции продолжения (prolongation) на многосеточном комплексе в методе Федоренко [3] для достаточно простого случая, когда в качестве базисных элементов взяты мономы определенной степени. В данной работе также преследовалась цель получить общие формулы для операции продолжения, необходимые для перехода с грубой сетки на более мелкую при применении полиномов Чебышева произвольной степени, что, очевидно, является более сложной задачей.

1. Постановка задачи и описание метода

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u|_{\delta\Omega} &= g(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

в прямоугольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с внешней границей $\delta\Omega$. Здесь $u(x_1, x_2)$ — искомая функция, $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ — заданные функции.

Покроем исходную область регулярной сеткой $N_1 \times N_2$, состоящей из прямоугольных ячеек Ω_j размера $2h_1 \times 2h_2$ по направлениям осей x_1 и x_2 соответственно, $j = \overline{1, N_{\text{cells}}}$, где $N_{\text{cells}} = N_1 N_2$ — количество расчетных ячеек. Для удобства реализации метода КНК в каждой ячейке области введем локальные координаты

$$y_1 = \frac{(x_1 - x_{1j})}{h_1}, \quad y_2 = \frac{(x_2 - x_{2j})}{h_2}, \quad (2)$$

где (x_{1j}, x_{2j}) — центр j -й ячейки, $j = \overline{1, N_{\text{cells}}}$. Положим далее $v(y_1, y_2) = u(x_1(y_1), x_2(y_2))$. Задача (1) после замены (2) в локальных переменных примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} &= f(x_1(y_1), x_2(y_2)), & (y_1, y_2) \in \Omega_j \subset \Omega, \\ v &= g(x_1(y_1), x_2(y_1)), & (y_1, y_2) \in \delta\Omega \cap \delta\Omega_j, \quad j = \overline{1, N_{\text{cells}}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В каждой j -й ячейке сетки приближенное решение v_{hj} задачи (3) ищем в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных элементов пространства полиномов некоторой степени относительно двух переменных. Здесь в качестве базисных элементов рассматриваются ортогональные полиномы Чебышева. Представление приближенного решения имеет вид

$$v_{hj}(y_1, y_2) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K c_{i_1 i_2, j} \phi_{i_1}(y_1) \phi_{i_2}(y_2), \quad (y_1, y_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad (4)$$

где

$$\phi_{i_1}(y_1) = \cos(i_1 \arccos(y_1)), \quad \phi_{i_2}(y_2) = \cos(i_2 \arccos(y_2)). \quad (5)$$

По аналогии с [4], посвященной методу конечных элементов, введем следующие понятия.

Определение 1. h-КНК — вариант метода КНК, в котором уточнение решения происходит за счет измельчения шагов сетки при фиксированной степени базисных полиномов используемого полиномиального пространства.

Определение 2. p-КНК — вариант метода КНК, в котором уточнение решения происходит за счет увеличения степени базисных полиномов используемого полиномиального пространства при фиксированной величине шага сетки.

Определение 3. hp-КНК — вариант метода КНК, в котором уточнение решения происходит за счет измельчения шагов сетки и/или за счет увеличения степени базисных полиномов используемого полиномиального пространства.

В настоящей работе уделено особое внимание исследованию возможностей p-КНК при аппроксимации решения полиномами достаточно высокой степени в одной ячейке (p-КНК_s), совпадающей со всей областью решения задачи. Численные методы, основанные на таком подходе построения приближенного решения, называются спектральными методами и в последнее время встречаются довольно часто. К их основным преимуществам следует отнести экспоненциальный характер уменьшения погрешности в случае достаточно гладких решений, относительную простоту их реализации по сравнению с реализацией сеточных методов, экономичность в плане вычислительных затрат. В p-КНК_s, в отличие от других вариантов метода КНК, не используются условия согласования, выбор и работа с которыми является сложной задачей, особенно для дифференциальных уравнений высокого порядка, входящих в исходную постановку задачи. При применении p-КНК_s также достаточно применить прямой метод линейной алгебры для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), не прибегая к итерациям по подобластям [1, 2, 5, 6]. С другой стороны, в том случае, когда решение не является достаточно гладким, применение p-КНК_s не является столь эффективным по сравнению с другими вариантами метода. Из таблиц, посвященных результатам численных экспериментов, полученных с помощью hp-КНК, не составляет труда выделить в частности результаты для h- или p-КНК.

В методе КНК для определения неизвестных коэффициентов $c_{i_1 i_2, j}$ в каждой ячейке выписывается переопределенная “локальная” СЛАУ, состоящая из уравнений коллокации, условий согласования на общих сторонах, принадлежащих двум соседним ячейкам, и краевых условий на $\delta\Omega$, если ячейка является граничной. Совокупность всех “локальных” СЛАУ — глобальная СЛАУ, которая определяет глобальное решение задачи.

Здесь количество точек для записи вышеперечисленных уравнений определялось следующим образом. У полиномиального представления (4) количество неизвестных коэффициентов $N_{\text{nu}} = (K + 1)^2$. Полагаем в каждой ячейке $N_c = N_{\text{nu}}$, где N_c — количество точек коллокации, в которых выписываются уравнения коллокации. На общих сторонах между соседними ячейками выписываются условия согласования в $N_m = K + 1$ точках согласования. Если сторона ячейки совпадает с границей области (граничная ячейка), то на ней в $N_b = \lfloor N_{\text{nu}}/4 \rfloor$ точках выписываются краевые условия, где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа. Таким образом, во внутренних ячейках, границы которых не совпадают с $\delta\Omega$, выписывались $N_{\text{nu}} + 4N_m$ уравнений, т. е. степень переопределенности локальной СЛАУ в них $\eta = \frac{K + 5}{K + 1}$. В случае граничной ячейки $\eta = \frac{(K + 1)^2 + 3(K + 1) + \lfloor (K + 1)/4 \rfloor}{(K + 1)^2}$, $\eta = \frac{(K + 1)^2 + 2(K + 1) + 2\lfloor (K + 1)^2/4 \rfloor}{(K + 1)^2}$ или $\eta = \frac{(K + 1)^2 + 4\lfloor (K + 1)^2/4 \rfloor}{(K + 1)^2}$ в зависимости от того, одна, две или четыре (р-КНК_s) стороны ячейки принадлежат $\delta\Omega$. Получается, что $\eta \leq 2$ при $K > 3$. В методе КНК нет строгих правил относительно выбора величины η при дискретизации дифференциальной задачи. Она для каждой задачи определяется экспериментально. Обычно число уравнений превышает число неизвестных в полтора-два раза. При этом, как правило, чем хуже обусловлена исходная дифференциальная задача, тем большее значение η СЛАУ приближенной задачи приходится брать, чтобы получить по возможности лучшую ее обусловленность в методе КНК.

Уравнения коллокации, умноженные на $h_1 h_2$, в каждой j -й ячейке, $j = \overline{1, N_{\text{cells}}}$, выписываются в N_c точках коллокации и имеют вид

$$k_c \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_1^2} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_2^2} \right) = k_c h_1 h_2 f, \quad (y_1, y_2) \in \Omega_j, \quad (6)$$

где k_c — положительный весовой множитель уравнения коллокации. Точки коллокации выписываются в локальной системе координат в точках с координатами $(\alpha_{i_1}^1, \alpha_{i_2}^2)$, $i_1 = \overline{0, K}$, $i_2 = \overline{0, K}$, $\alpha_{i_1}^1$ и $\alpha_{i_2}^2$ — корни многочлена Чебышева первого рода степени $K + 1$.

Во всех вариантах метода КНК, за исключением р-КНК_s, в качестве условия согласования решения в N_m точках согласования на каждой общей стороне между соседними ячейками требуется непрерывность линейной комбинации с весами значений искомого решения и его производной по нормали

$$k_{m_0} v_{hj} + k_{m_1} \frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = k_{m_0} \hat{v}_h + k_{m_1} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_j}, \quad (y_1, y_2) \in \delta\Omega_j \setminus \delta\Omega, \quad (7)$$

где n_j — внешняя нормаль к границе j -й ячейки, $j = \overline{1, N_{\text{cells}}}$, v_{hj} и \hat{v}_h — пределы значений приближенного решения задачи при стремлении изнутри и извне к границе j -й ячейки соответственно, k_{m_0}, k_{m_1} — положительные весовые множители условий согласования. Отметим, что в точках согласования из условия (7) следует непрерывность решения и его производной. Оно включено в конструкцию метода КНК под влиянием работ по альтернирующему методу Шварца (см. [7] и цитируемую там литературу). В частности, благодаря ему ускоряется итерационный процесс, улучшается устойчивость метода.

Точки согласования выписываются в локальной системе координат в точках с координатами $(\pm 1, \alpha_{i_2}^2)$ для правой и левой сторон ячейки соответственно, $(\alpha_{i_1}^1, \pm 1)$ для верхней и нижней сторон ячейки соответственно, $i_1 = \overline{0, K}$, $i_2 = \overline{0, K}$.

Если сторона ячейки принадлежит $\delta\Omega$, то в N_b точках на ней выписывались краевые условия

$$k_b u = k_b g, \quad (y_1, y_2) \in \delta\Omega, \quad (8)$$

где k_b — положительный весовой множитель краевых условий Дирихле. Здесь точки для записи краевых условий располагались на стороне равномерно.

Замечание 1. Стоит отметить, что существуют и другие возможности расстановок точек записи уравнений приближенной задачи. При этом в некоторых случаях выбор расстановки точек коллокации в зависимости от расположения некоторых особенностей решения задачи является критическим (см. пример 2, п. 3).

Объединяя уравнения (6)–(8), в каждой j -й ячейке получим переопределенную локальную СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов $c_{i_1 i_2, j}$ вида

$$Ax = b, \quad (9)$$

определяющую приближенно локальное решение в окрестности начала локальной системы координат в ячейке, где A — прямоугольная вещественная матрица, x , b векторы неизвестных и правых частей соответственно. Для того чтобы определить, что понимается под решением этой системы, рассмотрим функционал

$$\Phi = (Ax - b, Ax - b). \quad (10)$$

Он представляет собой сумму квадратов невязок всех уравнений в ячейке на приближенном решении задачи. Система уравнений, полученная объединением уравнений во всех ячейках расчетной области (глобальная СЛАУ), здесь решается с помощью метода итераций по подобластям, в котором каждая ячейка сетки является подобластью. В нем одна “глобальная итерация” состоит из последовательного решения локальных СЛАУ (9) во всех ячейках области. Решение системы (9) на каждой итерации находится из условия минимума функционала (10) по коэффициентам $c_{i_1 i_2, j}$. При построении решения в каждой ячейке делается QR -декомпозиция матрицы A с помощью метода отражений Хаусхолдера.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{i_1 i_2, j} |c_{i_1 i_2, j}^{n+1} - c_{i_1 i_2, j}^n| < \epsilon, \quad (11)$$

где $c_{i_1 i_2, j}^n$ — коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером j на n -й итерации, $j = \overline{1, N_{\text{cells}}}$, величина ϵ — наперед заданная малая константа, называемая псевдопогрешностью решения. Ее значение вычислителем выбирается экспериментально таким, чтобы погрешность решения глобальной СЛАУ была существенно меньше ожидаемой погрешности решения. Естественно, ее величина зависит от конкретной решаемой задачи, размера сетки и степени аппроксимирующего полинома.

В p -КНК_s переопределенная СЛАУ решается прямым методом отражений Хаусхолдера.

2. Ускорение итерационного процесса

Для значительного уменьшения времени, необходимого для проведения расчета, и количества итераций здесь было использовано комбинированное применение [2] операции продолжения в методе Федоренко [3], диагонального предобуславливателя [2] и на всех сетках комплекса метода ускорения сходимости итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова [8]. Кроме того, большинство ячеек в расчетной области являются внутренними. В рассматриваемой линейной задаче матрицы A локальных СЛАУ таких ячеек совпадают друг с другом и не зависят от номера итерации. От последней зависят только правые части уравнений, полученных из условий согласования. По этой причине целесообразно на первой итерации запомнить ортогональную матрицу Q , с помощью которой приведена к верхнетреугольному виду матрица A . Перед решением локальной СЛАУ на каждой итерации достаточно умножить на Q только ее правую часть. Такой прием не дает сокращения количества итераций, но позволяет уменьшить время решения задачи примерно на 20%.

Значения весовых множителей в методе КНК в некоторых пределах влияют на точность приближенного решения задачи, скорость сходимости итерационного процесса, обусловленность локальных СЛАУ [5], т. е. в данной работе применяется взвешенный метод КНК. Поэтому в нем одним из эффективных способов уменьшения времени решения задачи является выбор оптимальных значений этих множителей. Задаче поиска оптимальных значений весовых множителей уделено особое внимание в [2, 5].

2.1. Операция продолжения на многосеточном комплексе

Приведем общие формулы для операции продолжения, необходимых для перехода с грубой сетки на более мелкую на многосеточном комплексе. Конкретный вид формул может быть полезен при реализации подобных алгоритмов.

Пусть у нас есть решение, построенное на сетке размера $N_1/2 \times N_2/2$ с ячейками размера $2h_1 \times 2h_2$, которое в j -й ячейке имеет вид

$$v_{hj}(Y_1, Y_2) = \sum_{i_1=0}^{K_1} \sum_{i_2=0}^{K_2} c_{i_1 i_2, j} \phi_{i_1}(Y_1) \phi_{i_2}(Y_2),$$

где $\phi_{i_1}(Y_1) \phi_{i_2}(Y_2)$ — базисный элемент пространства, в котором мы ищем решение.

Каждая ячейка сетки размера $N_1/2 \times N_2/2$ (грубая сетка) содержит в себе четыре ячейки сетки размера $N_1 \times N_2$ (мелкая сетка). Пусть для любой точки на плоскости: (Y_1, Y_2) — ее координаты в локальной системе координат, связанной с j -й ячейкой грубой сетки, (y_1, y_2) — в локальной системе координат, связанной с одной из четырех ячеек мелкой сетки, содержащихся в j -й ячейке грубой сетки, (x_1, x_2) — в глобальной системе координат. Обозначим (X_{1j}, X_{2j}) — центр j -й ячейки грубой сетки, (x_{1j}, x_{2j}) — центр одной из четырех ячеек, содержащихся в j -й ячейке грубой сетки. Тогда из формул (2) следует

$$\begin{aligned} x_1 &= 2h_1 Y_1 + X_{1j}, & x_2 &= 2h_2 Y_2 + X_{2j}, \\ y_1 &= \frac{2h_1 Y_1 + X_{1j} - x_{1j}}{h_1}, & y_2 &= \frac{2h_2 Y_2 + X_{2j} - x_{2j}}{h_2}, \end{aligned}$$

Отсюда получили

$$Y_1(y_1) = 0.5y_1 + dy_1, \quad Y_2(y_2) = 0.5y_2 + dy_2,$$

где $dy_1 = \frac{x_{1j} - X_{1j}}{2h_1}$, $dy_2 = \frac{x_{2j} - X_{2j}}{2h_2}$.

Запишем решение в ячейке мелкой сетки в виде

$$\begin{aligned} v_{hj}(y_1, y_2) &= \sum_{i_1=0}^{K_1} \sum_{i_2=0}^{K_2} \tilde{c}_{i_1 i_2} \phi_{i_1}(y_1) \phi_{i_2}(y_2) \\ &= \sum_{i_1=0}^{K_1} \sum_{i_2=0}^{K_2} c_{i_1 i_2, j} \phi_{i_1}(0.5y_1 + dy_1) \phi_{i_2}(0.5y_2 + dy_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Базис из полиномов Чебышева. Найдем коэффициенты $\tilde{c}_{i_1 i_2}$ в случае, когда ϕ_{i_1} , ϕ_{i_2} — полиномы Чебышева степени i_1 и i_2 соответственно.

Для удобства введем матрицы $B_1 = (b_{i,l}^1)_{i=0, l=0}^{K_1, K_1}$ и $B_2 = (b_{i,l}^2)_{i=0, l=0}^{K_2, K_2}$ такие, что

$$\phi_{i_1}(ay_1 + b) = \sum_{l=0}^{i_1} b_{i,l}^1 \phi_l(y_1), \quad \phi_{i_2}(cy_2 + d) = \sum_{l=0}^{i_2} b_{i,l}^2 \phi_l(y_2), \quad (13)$$

где a, b, c, d — произвольные константы. Сконструируем матрицу B_1 (матрица B_2 получается аналогичным способом). Для $i_1 = 0$ и $i_1 = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \phi_0(ay_1 + b) &= 1 = \phi_0(y_1), \\ \phi_1(ay_1 + b) &= ay_1 + b = a\phi_1(y_1) + b\phi_0(y_1). \end{aligned}$$

Для $i_1 = 2$ —

$$\phi_2(ay_1 + b) = 2(ay_1 + b)^2 - 1 = a^2\phi_2(y_1) + 4ab\phi_1(y_1) + (2b^2 - 1 + a^2)\phi_0(y_1).$$

Следовательно, матрица B_1 имеет вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & a & 0 & 0 & \dots \\ 2b^2 - 1 + a^2 & 4ab & a^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Пусть мы заполнили i -ю строку матрицы B_1 ($i \geq 2$), тогда, используя рекуррентное соотношение для полиномов Чебышева, имеем

$$\phi_{i+1}(ay_1 + b) = 2(ay_1 + b)\phi_i(ay_1 + b) - \phi_{i-1}(ay_1 + b).$$

Подставим в правую часть полученного соотношения выражения для ϕ_i и ϕ_{i-1} из (13) и, проведя преобразования, получим

$$\begin{aligned} \phi_{i+1}(ay_1 + b) &= a \sum_{l=2}^{i+1} b_{i,l-1}^1 \phi_l(y_1) + a \sum_{l=0}^{i-1} b_{i,l+1}^1 \phi_l(y_1) + 2ab_{i,0}^1 \phi_1(y_1) + 2b \sum_{l=0}^i b_{i,l}^1 \phi_l(y_1) - \\ &\quad \sum_{l=0}^{i-1} b_{i-1,l}^1 \phi_l(y_1). \end{aligned}$$

Сгруппировав слагаемые в полученном соотношении, для элементов $b_{i+1,l}^1$ матрицы B_1 получим рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
b_{i+1,0}^1 &= ab_{i,1}^1 + 2bb_{i,0}^1 - b_{i-1,0}^1, \\
b_{i+1,1}^1 &= ab_{i,2}^1 + 2ab_{i,0}^1 + 2bb_{i,1}^1 - b_{i-1,1}^1, \\
b_{i+1,l}^1 &= ab_{i,l-1}^1 + ab_{i,l+1}^1 + 2bb_{i,l}^1 - b_{i-1,l}^1, \quad l = \overline{2, i-1}, \\
b_{i+1,i}^1 &= ab_{i,i-1}^1 + 2bb_{i,i}^1, \\
b_{i+1,i+1}^1 &= ab_{i,i}^1.
\end{aligned}$$

Чтобы воспользоваться равенством (12) в представлении решения (4), формально заменим K_1 и K_2 на K . В формуле (13) положим $a = c = 0.5$, $b = dy_1$, $d = dy_2$ и сконструируем матрицы B_1 , B_2 по полученным формулам. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
v_{hj}(y_1, y_2) &= \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K c_{i_1 i_2, j} \phi_{i_1}(0.5y_1 + dx) \phi_{i_2}(0.5y_2 + dy) \\
&= \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K c_{i_1 i_2, j} \left(\sum_{k_1=0}^{i_1} b_{i_1, k_1}^1 \phi_{k_1}(y_1) \right) \left(\sum_{k_2=0}^{i_2} b_{i_2, k_2}^2 \phi_{k_2}(y_2) \right) \\
&= \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K \left[\sum_{k_1=i_1}^K \sum_{k_2=i_2}^K c_{k_1 k_2, j} b_{k_1, i_1}^1 b_{k_2, i_2}^2 \right] \phi_{i_1}(y_1) \phi_{i_2}(y_2).
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты $\tilde{c}_{i_1 i_2} = \sum_{k_1=i_1}^K \sum_{k_2=i_2}^K c_{k_1 k_2, j} b_{k_1, i_1}^1 b_{k_2, i_2}^2$.

Можно показать, что для осуществления операции продолжения необходимо порядка $O(N_{\text{cells}}(K+1)^4)$ арифметических операций, в то время как для выполнения одной итерации требуется порядка $O(N_{\text{cells}}(K+1)^6)$ арифметических операций.

Полученные формулы позволяют при осуществлении операции продолжения на многосеточном комплексе записать на мелкой сетке решение, полученное на грубой сетке, без потери достигнутой ее точности.

3. Результаты численных экспериментов

В численных экспериментах на сходимость приближенного решения на последовательности сеток при измельчении шагов сетки вдвое и увеличении степени полиномов рассматривалась задача (1). Для сравнения с результатами, полученными другими авторами, здесь рассматриваются решения задач в квадрате, т. е. $N_1 = N_2 = N$, $h_1 = h_2 = h$. В представленных ниже таблицах приведены значения абсолютной погрешности приближенного решения в бесконечной норме

$$\|E\|_{\infty} = \max_{j=1, N_{\text{cells}}} \left(\max_{m=1, Q_j} \left| u(x_{1m}, x_{2m}) - u_{hj}(x_{1m}, x_{2m}) \right| \right) \quad (14)$$

и в норме L_2

$$\|E\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{cells}}} \sum_{m=1}^{Q_j} (u(x_{1m}, x_{2m}) - u_{hj}(x_{1m}, x_{2m}))^2}, \quad (15)$$

где Q_j — количество равномерно распределенных контрольных точек (x_{1m}, x_{2m}) , взятых в j -й ячейке для подсчета в них погрешности, u — точное решение задачи, u_{hj} — приближенное решение в j -й ячейке. В данной работе взято $Q_j = 100$ во всех вариантах метода

КНК, за исключением р-КНК_s, в котором $Q_j = 10000$. Порядок сходимости погрешности численного решения в случае h-КНК определяется следующим образом:

$$R = \log_2 \frac{E_p}{E_c}, \quad (16)$$

где E_c — значение погрешности ($\|E\|_\infty$ или $\|E\|_2$) на сетке размера $N \times N$, E_p — значение погрешности на сетке размера $N/2 \times N/2$. Обозначим через N_{iter} — количество итераций.

Во всех численных экспериментах в итерационном процессе на самой грубой сетке здесь в начальном приближении решения взяты $c_{i_1 i_2, j} = 0.4$. Во всех расчетах были взяты $k_c = 1$, $k_{m0} = 1$, $k_{m1} = 5h$, $k_b = 1.5$. Исключением являются значения множителей при применении р-КНК_s, а именно: $k_c = 1/(K(K-1))$, $k_b = 1$. Такое значение k_c позволило существенно понизить обусловленность СЛАУ. Значение ϵ варьировалось в пределах от $1e-9$ до $1e-14$. В среде Visual Studio на языке С был реализован соответствующий комплекс программ. Вычисления были проведены с двойной точностью (double precision).

Пример 1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{10x_1} + e^{10x_2} + e^{5x_1+5x_2}$, имеющим большие градиенты в $[0, 1] \times [0, 1]$. Из приведенной таблицы 1 видно, что порядок сходимости погрешности приближенного решения к точному здесь не хуже K -го при четных K и $(K-1)$ -го при нечетных. Отметим, что эти результаты полностью коррелируют с результатами [6], в которой в качестве базисных элементов были взяты мономы. При этом в коэффициент остаточного члена аппроксимации задачи с большими градиентами решения и искомой функции в краевом условии входят большие значения производных решения. В связи с этим обстоятельством не удается построить решение с точностью лучшей, чем $e-10$ в р-КНК_s и $e-9$ в hp-КНК, даже если продолжить измельчение сетки. В этом примере решение является достаточно гладким, поэтому применение р-КНК_s является более эффективным по сравнению с другими вариантами метода КНК, даже несмотря на то, что решение имеет весьма большие градиенты. Однако в случае других видов особенностей зачастую это не так.

Таблица 1. Результаты численных экспериментов (пример 1)

hp-КНК $N \times N$	$K = 4$		$K = 5$		$K = 6$		$K = 7$		р-КНК _s	
	$\ E\ _\infty$	R	K	$\ E\ _\infty$						
10×10	8.85 e+0	—	3.90 e−1	—	6.92 e−3	—	1.10 e−3	—	15	4.87 e−4
20×20	5.80 e−1	3.93	2.32 e−2	4.07	6.71 e−5	6.68	5.38 e−6	7.67	20	1.66 e−8
40×40	3.78 e−2	3.94	1.43 e−3	4.02	6.80 e−7	6.62	8.11 e−8	6.05	25	3.16 e−10
80×80	2.52 e−3	3.90	8.94 e−5	4.00	1.33 e−8	5.68	1.17 e−9	6.11	30	2.69 e−10

Замечание 2. Получение и доказательство каких-либо утверждений алгебраическими методами и методами функционального анализа для алгоритмов с применением переопределенных СЛАУ в настоящее время представляет собой весьма трудную задачу. Основным способом доказательства правильности полученных результатов по таким алгоритмам в этой работе является численный эксперимент.

Пример 2. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона с тестовым решением $u(x_1, x_2) = \frac{1}{(1+25x_1^2)} \frac{1}{(1+25x_2^2)}$ в $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Это решение является произведением двух одномерных функций Рунге с особенностью в комплексной плоскости. С ростом порядка дифференцирования значения производных функции Рунге имеют факториальную скорость возрастания в окрестности нуля, что представляет существенную проблему

для полиномиальных аппроксимаций. По этой причине применение p -КНК_s не позволяет получить экспоненциальную сходимость (см. табл. 2). Однако декомпозиция области позволяет существенно повысить точность, если расчетную область разбить так, чтобы точка $(0, 0)$ оказалась на границе между ячейками (см. табл. 3), поскольку именно в этой точке наблюдаются наибольшие значения $u_{x_1x_1}$ и $u_{x_2x_2}$. Из результатов, приведенных в табл. 3, также видно, что в этом примере нельзя установить величину порядка сходимости погрешности численного решения в отличие от предыдущего примера. Судя по всему это связано с характером поведения решения. Кроме того, известно, что равномерное расположение узлов интерполирования в задаче интерполяции функции Рунге полиномами высоких степеней приводит к расходимости численного решения. Задачу Дирихле для уравнения Пуассона в этом случае также не удастся решить, если использовать равномерное расположение точек коллокации.

Таблица 2. Результаты численных экспериментов при применении p -КНК_s (пример 2)

K	$\ E\ _\infty$										
15	9.01 e-1	30	1.14 e-2	45	6.84 e-4	60	9.43 e-6	75	1.42 e-6	90	2.23 e-8
20	1.92 e-1	35	6.48 e-3	50	7.41 e-5	65	1.09 e-5	80	1.62 e-7	95	2.57 e-8
25	7.62 e-2	40	6.91 e-4	55	8.26 e-5	70	1.32 e-6	85	1.96 e-7	100	2.91 e-9

Таблица 3. Результаты численных экспериментов при применении hp -КНК (пример 2)

$N \times N$	$K = 5$			$K = 6$			$K = 7$		
	$\ E\ _\infty$	R	N_{iter}	$\ E\ _\infty$	R	N_{iter}	$\ E\ _\infty$	R	N_{iter}
2×2	1.12 e+1	—	39	1.50 e-1	—	11	3.77 e-2	—	31
4×4	1.30 e-1	3.10	41	3.95 e-2	1.92	41	1.59 e-2	1.24	21
8×8	5.11 e-2	1.34	51	8.11 e-4	5.60	61	7.47 e-4	4.41	41
16×16	5.89 e-3	3.11	28	9.14 e-5	3.14	91	3.49 e-5	4.41	25
32×32	2.57 e-4	4.51	40	6.98 e-7	7.03	135	1.77 e-8	10.94	111
$N \times N$	$K = 8$			$K = 9$			$K = 10$		
	$\ E\ _\infty$	R	N_{iter}	$\ E\ _\infty$	R	N_{iter}	$\ E\ _\infty$	R	N_{iter}
2×2	7.60 e-2	—	36	6.98 e-3	—	51	3.44 e-3	—	52
4×4	1.34 e-3	5.82	31	6.13 e-4	3.47	91	5.76 e-6	5.9	41
8×8	1.55 e-4	3.11	41	8.31 e-6	6.02	82	8.92 e-9	6.01	43
16×16	1.20 e-6	7.01	52	1.49 e-8	9.12	41	1.76 e-11	8.98	81
32×32	3.28 e-9	8.51	111	1.91 e-11	6.28	81	4.55 e-12	1.95	43

Из табл. 2 видно, что при нечетных K значение погрешности $\|E\|_\infty$ приблизительно совпадает (т. е. улучшения нет) с предыдущим значением $\|E\|_\infty$ для четного K при применении аппроксимирующих полиномов достаточно больших степеней ($K \geq 40$). По-видимому, это связано с тем фактом, что в случае использования аппроксимирующих полиномов четной степени K координаты одной из точек коллокации совпадают с координатами точки $(0, 0)$. Таким образом, запись уравнения коллокации (6) в этой точке влияет на точность решения задачи. Например, при $K = 44$ значения погрешности $\|E\|_\infty = 2.57e-4$, при $K = 46$ $\|E\|_\infty = 1.71e-4$.

Число обусловленности $\mu(A)$, которое вычислялось как отношение ее максимального сингулярного числа матрицы A к ее минимальному сингулярному числу, при применении диагонального предобуславливателя уменьшалось на один-два порядка. Следует отметить, что во всех расчетах в этой работе максимальное значение $\mu(A)$ было порядка $1e+3$, за исключением применения аппроксимирующих полиномов высоких степеней, которые по сути достаточно подробно рассматривались только в этом примере ($\mu(A) > 1e+4$ при $K \geq 80$).

Интересно отметить, что максимальная разница между коэффициентами приближенного решения после первой итерации и коэффициентами начального приближения в (11) равнялась приблизительно значению погрешности $\|E\|_\infty$, полученной на предыдущей сетке. Это обстоятельство является следствием эффективного применения операции продолжения. Кроме того, значение N_{iter} зачастую оканчивается на единицу. Это объясняется тем, что после определенного количества итераций делается очередная поправка приближенного решения по Крылову. В проведенных здесь расчетах поправка по Крылову выполнялась через каждые 10 итераций. При этом практически всегда после одной следующей итерации процесс (11) уточнения решения заканчивался.

Пример 3. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона с $f(x_1, x_2) = 1$, $g(x_1, x_2)|_{\delta\Omega} = 0$ в $[0, 1] \times [0, 1]$. Из-за наличия локальных особенностей в краевом условии в точках излома границы возникает особенность в решении задачи: вторые производные терпят разрыв [9]. Точное решение этой задачи можно выписать в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда

$$u(x_1, x_2) = \frac{-16}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2i-1)\pi x_1) \sin((2j-1)\pi x_2)}{(2i-1)(2j-1)((2i-1)^2 + (2j-1)^2)}. \quad (17)$$

Для оценки погрешности приближенного решения в качестве точного решения взят начальный отрезок ряда (17) так, чтобы соответствующий остаток ряда по модулю гарантированно не превосходил 10^{-10} .

Известно, что решение эллиптических уравнений в каждой точке области зависит от всех значений в условиях на границе области. Поэтому отсутствие гладкости в нескольких точках в условиях на границе области сказывается на характере поведения решения задачи во всей области. Из табл. 4 видно, что наличие локальной особенности в решении задачи понизило порядок сходимости приближенного решения во всей области по отношению к случаю, когда решение является достаточно гладким. По этой же причине применение hr-КНК является более предпочтительным по сравнению с p-КНК_s (см. табл. 5). Из расчетов было установлено, что максимум погрешности $\|E\|_\infty$ достигается в угловых точках квадратной области. Порядок сходимости погрешности численного решения во всех случаях в бесконечной норме равен двум. Аналогичная картина наблюдается при применении разностных схем высокого порядка аппроксимации. В [9] при использовании схем второго, шестого и десятого порядков аппроксимации разностное решение сходилось со вторым порядком в равномерной норме. При этом при применении схемы десятого порядка аппроксимации была достигнута точность $\|E\|_\infty = 4.34e-8$ ($\|E\|_2 = 2.71e-9$) на сетке размера 40×40 . Однако построение программной реализации схем высокого порядка аппроксимации является весьма сложной задачей, справиться с которой помогает системы компьютерной алгебры Mathematica [9]. Вычислительная программа, реализующая предложенные здесь варианты метода КНК, относительно проста и способна автоматически учитывать любую степень аппроксимирующего полинома без каких-либо дополнительных средств.

Установлено, что значения погрешности и порядка сходимости существенно зависят от вида рассматриваемой погрешности и/или рассматриваемой подобласти, взятой в $[0, 1] \times [0, 1]$. В рассмотренных случаях в табл. 5 видно, что порядок сходимости не ниже трех.

Таблица 4. Результаты численных экспериментов при применении h-КНК (пример 3)

$N \times N$	$K = 6$		$K = 8$		$K = 10$	
	$\ E\ _\infty$	R	$\ E\ _\infty$	R	$\ E\ _\infty$	R
10×10	1.38 e-5	—	7.77 e-6	—	3.52 e-6	—
20×20	3.66 e-6	1.91	1.92 e-6	2.01	7.94 e-7	2.14
40×40	9.15 e-7	2.00	4.75 e-7	2.01	1.98 e-7	2.00
$N \times N$	$K = 12$		$K = 14$		$K = 16$	
	$\ E\ _\infty$	R	$\ E\ _\infty$	R	$\ E\ _\infty$	R
10×10	1.76 e-6	—	8.68 e-7	—	6.72 e-7	—
20×20	4.27 e-7	2.04	2.48 e-7	1.80	1.64 e-7	2.03
40×40	1.06 e-7	2.01	6.20 e-8	2.00	4.28 e-8	1.93

Таблица 5. Результаты численных экспериментов при применении p-КНК_s и h-КНК при $K = 16$ (пример 3)

p-КНК _s		h-КНК, $K = 16$						
$[0, 1] \times [0, 1]$		$N \times N$	$[0, 1] \times [0, 1]$		$(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \leq 0.3^2$			
K	$\ E\ _\infty$		$\ E\ _2$	R	$\ E\ _\infty$	R	$\ E\ _2$	R
15	1.78 e-5	5×5	1.78 e-7	—	6.97 e-9	—	2.70 e-9	—
20	1.04 e-5	10×10	2.16 e-8	3.04	3.48 e-10	4.34	1.29 e-10	4.41
25	2.84 e-6	20×20	2.48 e-9	3.12	2.67 e-11	3.70	8.71 e-12	3.32
30	2.91 e-6	40×40	3.12 e-10	2.99	2.51 e-12	3.41	1.04 e-12	3.06

Пример 4. Рассмотрим еще один пример задачи Дирихле для уравнения Пуассона с тестовым решением $u(x_1, x_2) = 1 + 12R(x_1, x_2) - 10R(x_1, x_2)^2 + \frac{1}{2} \sin(\phi(R(x_1, x_2)))$ в $[0, 1] \times [0, 1]$, где $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\phi(R) = 20\pi R^3$. Из рисунка 1 видно, что это решение имеет осциллирующий характер с различными частотами. Для достижения приемлемой точности необходимо использовать сетку с достаточно мелким шагом из-за наличия высокочастотных колебаний в решении (см. табл. 6). В связи с этим применение p-КНК_s здесь также не эффективно. Чтобы достичь значение погрешности $\|E\|_\infty$ порядка $e-1$ необходимо применение полиномов семидесятой степени. Повышение степени аппроксимирующего полинома и использование мелкой сетки позволяет уточнить решение задачи. Например, $\|E\|_\infty = 2.79e-3$ ($\|E\|_2 = 4.93e-6$) при $K = 6$ на сетке 160×160 .

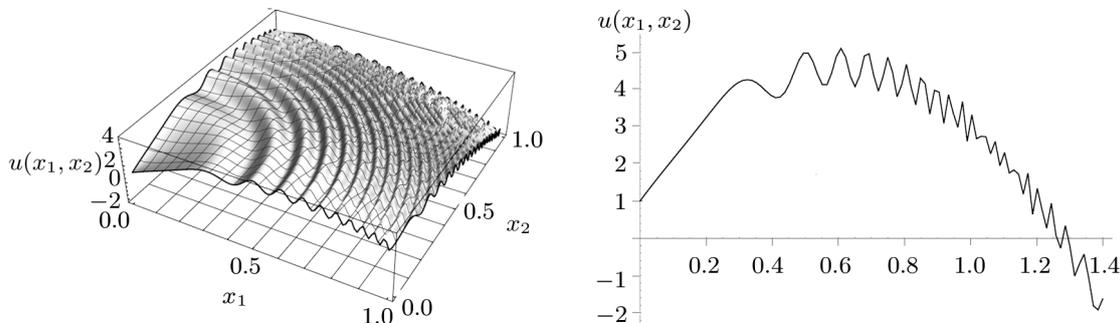
**Рис. 1.** Точное решение в примере 4 (слева) и его профиль при $x_1 = x_2$ (справа). На горизонтальной оси отложено расстояние от начала координат (аналогично на рис. 2)

Таблица 6. Результаты численных экспериментов при применении h-КНК при $K = 4$ (пример 4)

$N \times N$	$\ E\ _\infty$	R	$\ E\ _2$	R
10×10	5.08 e+1	—	6.83 e+0	—
20×20	6.16 e+0	3.04	4.49 e−1	3.93
40×40	1.55 e+0	1.99	6.10 e−2	2.87
80×80	1.51 e−1	3.36	3.80 e−3	4.00
160×160	1.71 e−2	3.14	2.11 e−4	4.17
320×320	8.55 e−3	1.00	1.34 e−5	3.96

Эта задача также была решена в [10] с использованием миметических дискретных методов высокого порядка. Авторы отмечают, что в этом случае целесообразнее использовать адаптивные методы, указывая на то, что наибольшая погрешность решения имеет место в подобласти, где решение осциллирует с большей частотой. Они приводят график погрешности ($\|E\|_\infty$ порядка $1e-1$) на сетке 120×120 , который подтверждает их утверждение. Более подробные результаты в [10] не приводятся.

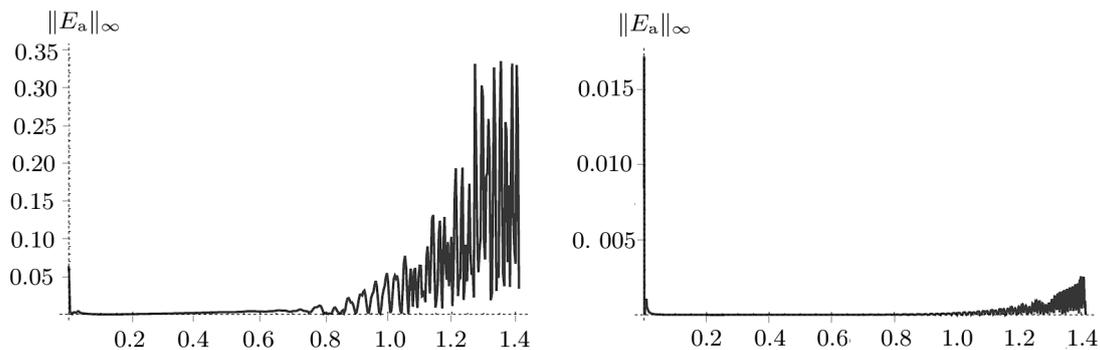


Рис. 2. Профиль погрешности $\|E\|_\infty$ приближенного решения при $x_1 = x_2$, полученной на сетках 40×40 (слева) и 160×160 (справа). Для наглядности пунктирными линиями изображены соответствующие оси

Проанализируем характер поведения погрешности $\|E\|_\infty$ на последовательности сеток в методе КНК. Обратим сначала внимание на то, что производные решения в точке $(0, 0)$ обращаются в бесконечность, т. е. $(0, 0)$ является точкой разрыва типа полюс. На грубых сетках наибольшее значение погрешности действительно сконцентрировано в подобласти, где решение сильно осциллирует. Таким образом, приближенное решение на грубых сетках хуже приближает осциллирующее решение, чем особенность в $(0, 0)$ (см. рис. 2, слева). Например, наибольшее значение погрешности $\|E\|_\infty = 1.55 e+0$ достигается в точке с координатами $(1, 0.875)$ на сетке 40×40 . Затем в процессе измельчения шагов сетки при некотором размере ее ячеек значение погрешности в этой подобласти и в $(0, 0)$ приблизительно одинаковы. Наконец, на достаточно подробной сетке наибольшее значение погрешности достигается уже в $(0, 0)$ ($\|E\|_\infty = 1.71 e-2$ на сетке 160×160 , см. рис. 2, справа), что и следовало ожидать. Замечание авторов в [10] относительно целесообразности применения адаптивных методов вполне справедливо. Наряду с этим также необходимо учесть особенность в нуле, например, модифицировать базис полиномиального пространства, добавив в него элементы вида R^n ($n = 1, 3, 9, \dots$) для учета более точной аппроксимации производных от R и $\sin(20\pi R^3)$, поскольку $\sin(20\pi R^3) = 20\pi R^3 - \frac{4000\pi^3 R^9}{3} + O(R^{11})$ (отрезок ряда Тейлора в точке $R = 0$). Такое исследование

выходит за рамки настоящей работы. С другой стороны, как это видно из табл. 6, удается построить приближенное решение с относительно хорошей точностью.

4. Заключение

Предложены и реализованы новые h -, p - и hp -КНК решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с различными особенностями. Метод верифицирован на решении четырех тестовых задач. Показано преимущество новых вариантов по сравнению с p -КНК_s, что подтверждает общее положение о применимости спектральных методов в случаях, когда решение не является достаточно гладким и/или имеет другую особенность определенного вида.

Благодарности. Автор считает своим долгом выразить благодарность Л.С. Брындину и В.П. Шапееву за интерес, проявленный к работе, и ее полезное обсуждение.

Литература

1. **Беляев В.А., Шапеев В.П.** Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом коллокации и наименьших квадратов в области с дискретно заданной границей // Вычислит. технологии. — 2018. — Т. 23, № 3. — С. 15–30.
2. **Ворожцов Е.В., Шапеев В.П.** О комбинировании способов ускорения сходимости итерационных процессов при численном решении уравнений Навье–Стокса // Выч. мет. и программирование. — 2017. — Т. 18, № 1. — С. 80–102.
3. **Федоренко Р.П.** О скорости сходимости одного итерационного процесса // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1964. — Т. 4, № 3. — С. 559–564.
4. **Babuška I., Guo B.Q.** The h , p and h - p version of the finite element method; basis theory and applications // Advan. Engineer. Software. — 1992. — Vol. 15, № 3–4. — P. 159–174.
5. **Исаев В.И., Шапеев В.П., Еремин С.А.** Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса // Вычислит. технологии. — 2007. — Т. 12, № 3. — С. 53–70.
6. **Исаев В.И., Шапеев В.П., Идимешев С.В.** Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона // Вычислит. технологии. — 2011. — Т. 16, № 13. — С. 85–93.
7. **Слепцов А.Г., Шокин Ю.И.** Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1997. — Т. 37, № 2. — С. 572–586.
8. **Saad Y.** Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. — Manchester Univ. Press, 1992.
9. **Шапеев В.П., Шапеев А.В.** Решение эллиптических задач с особенностями по схемам высокого порядка аппроксимации // Вычислит. технологии. — 2006. — Т. 11. Часть 2. Специальный выпуск. — С. 84–91.
10. **Abouali M., Castillo J.E.** Solving Poisson equation with Robin boundary condition on a curvilinear mesh using high order mimetic discretization methods // Math. Comput. Simulat. — 2017. — Vol. 139. — P. 23–36.

*Поступила в редакцию 29 июля 2019 г.
После исправления 22 января 2020 г.
Принята к печати 16 апреля 2020 г.*

Литература в транслитерации

1. **Belyaev V.A., Shapeev V.P.** Reshenie zadachi Dirihle dlya uravneniya Puassona metodom kollokatsii i naimen'shikh kvadratov v oblasti s diskretno zadannoi granitsej // Vychislit. tekhnologii. — 2018. — T. 23, № 3. — S. 15–30.
2. **Vorozhtsov E.V., Shapeev V.P.** O kombinirovanii sposobov uskoreniya skhodimosti iteratsionnykh protsessov pri chislennom reshenii uravnenii Nav'e–Stoksa // Vych. met. i programmirovaniye. — 2017. — T. 18, № 1. — S. 80–102.
3. **Fedorenko R.P.** O skorosti skhodimosti odnogo iteratsionnogo protsessa // Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1964. — T. 4, № 3. — S. 559–564.
4. **Babuška I., Guo B.Q.** The h, p and h-p version of the finite element method; basis theory and applications // Advan. Engineer. Software. — 1992. — Vol. 15, № 3–4. — P. 159–174.
5. **Isaev V.I., Shapeev V.P., Eremin S.A.** Issledovanie svoystv metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov resheniya kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona i uravnenii Nav'e–Stoksa // Vychislit. tekhnologii. — 2007. — T. 12, № 3. — S. 53–70.
6. **Isaev V.I., Shapeev V.P., Idimeshev S.V.** Varianty metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov povyshennoi tochnosti dlya chislennogo resheniya uravneniya Puassona // Vychislit. tekhnologii. — 2011. — T. 16, № 13. — S. 85–93.
7. **Sleptsov A.G., Shokin Yu.I.** Adaptivnyi proektsionno-setochnyi metod dlya ellipticheskikh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1997. — T. 37, № 2. — S. 572–586.
8. **Saad Y.** Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. — Manchester Univ. Press, 1992.
9. **Shapeev V.P., Shapeev A.V.** Reshenie ellipticheskikh zadach s osobennostyami po skhemam vysokogo poryadka approximatсии // Vychislit. tekhnologii. — 2006. — T. 11. Chast' 2. Spetsial'nyi vypusk. — S. 84–91.
10. **Abouali M., Castillo J.E.** Solving Poisson equation with Robin boundary condition on a curvilinear mesh using high order mimetic discretization methods // Math. Comput. Simulat. — 2017. — Vol. 139. — P. 23–36.

