

К РАСЧЕТУ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА,
ДРЕЙФУЮЩЕГО ПОПЕРЕК СИЛЬНОГО ОДНОРОДНОГО
МАГНИТНОГО ПОЛЯ

B. N. Данилов

(Москва)

В книге [1] и применительно к магнетрону в работах [2-4] методом усреднения, в первом [1,2] и во втором [3,4] приближениях по малому параметру $v \sim \eta E / \Omega^2 L$, рассчитывается дрейф электрона в заданных полях. Здесь и ниже $E, H \equiv (c/\eta) \Omega$ — напряженности, L — характерный размер неоднородности полей, η — отношение заряда к массе электрона ($\eta > 0$), c — скорость света. Попытка построить аналогичные приближения для дрейфующего пучка электронов с учетом поля пространственного заряда в рамках метода усреднения наталкивается на значительные математические трудности. В данной статье описывается попытка решить последнюю задачу для стационарного моноэнергетического пучка, дрейфующего под воздействием плоского электрического поля с потенциалом $\Phi(x, y)$ поперек сильного однородного магнитного $H_z \equiv H = \text{const}$. Решения строятся методом последовательных приближений по степеням параметра $\varepsilon = h/L$, где h — величина ларморовского радиуса электрона для узких пучков с шириной порядка $2h$.

§ 1. Однопоточный пучок. Пусть кривая $x = x_c(l)$, $y = y_c(l)$ — ось пучка — расположена вблизи центральной траектории плоского пучка. Система ортогональных координат s, l , в которой $l = \text{const}$, — суть прямые ортогональные оси $s = 0$, связана с пучком и определяется кривизной оси [5]

$$x = x_c + sy'_c, \quad y = y_c - sx'_c, \quad x'_c \equiv dx_c/dl \quad (1.1)$$

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 + gdl^2, \quad g \equiv (1 - ks)^2, \quad k \equiv y'_c x''_c - x'_c y''_c$$

1. 1°. В координатах s, l уравнения нерелятивистского моноэнергетического пучка с плотностью пространственного заряда $\rho(x, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_*^2 v_s^2 + \frac{1}{g} \Gamma_l^2 &= 2\eta\varphi, \quad \frac{\partial v_l}{\partial s} - \varepsilon_*^2 \frac{\partial v_s}{\partial l} = \Omega \sqrt{g} \\ \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{g} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \varepsilon_*^2 \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= 4\pi\rho \sqrt{g} \quad (1.2) \\ \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{g} \rho v_s + \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{\sqrt{g}} \rho v_l &= 0, \quad g \equiv (1 - \varepsilon_* ks)^2, \quad \Omega \equiv \frac{\eta}{c} H \end{aligned}$$

В уравнениях (1.2) расставлен малый параметр ε_* в тех местах, где $\varepsilon = h/L$ появляется в результате перехода к безразмерным величинам

$$\frac{v_s}{\varepsilon_* \Omega h}, \quad \frac{v_l}{\Omega h}, \quad U \equiv \frac{\eta\varphi}{\Omega^2 h^2}, \quad q \equiv \frac{s}{h}, \quad \lambda \equiv \frac{l}{L}, \quad n \equiv \frac{4\pi\rho}{\Omega^2} \rho, \quad \kappa \equiv kL \quad (1.3)$$

К уравнениям (1.2) следует добавить очевидное условие постоянства полного тока J_c свободного пучка

$$\int_{s_-}^{s_+} \rho v_l \frac{ds}{\sqrt{g}} = J_c \equiv \frac{\Omega^3 h^2}{4\pi\eta} i_c = \text{const} \quad (1.4)$$

1.2°. Решение системы (1.2) для узкого пучка $q \leq 1$ небольшой кривизны $\kappa \ll 1$ можно искать в виде рядов по степеням ε . После простых выкладок с точностью до ε^3 получается следующий результат в безразмерных величинах (1.3):

$$\begin{aligned} n &= 1 + 2\varepsilon\kappa(q + \gamma) + \varepsilon^2 [\kappa^2(5q^2 + 8\gamma q + 2\gamma^2) - 2q\gamma' + 2\gamma^2] \\ U &= (q + \gamma)^2 + \varepsilon\kappa(q^3 + 3\gamma q^2 + 2\gamma^2 q) + \varepsilon^2 (\frac{5}{4}\kappa^2 q^4 + 4\kappa^2 \gamma q^3 + 3\kappa^2 q^2 \gamma^2 - q^2(q + \gamma)\gamma' + q^2 \gamma'^2), \quad \gamma' \equiv d\gamma/d\lambda \\ i &\equiv \frac{4\pi\eta}{\Omega^2 h^2} J = \int_{q_-}^q n V_l \frac{dg}{g} = [\gamma q + \frac{1}{2}q^2 + \varepsilon\kappa(\frac{5}{6}q^2 + \frac{5}{2}\gamma q^2 + 2\gamma^2 q) + \varepsilon^2(\frac{13}{8}q^4 + \frac{17}{3}\gamma q^3 + 6\gamma^2 q^2 + 2\gamma^3 q) + \varepsilon^2(\gamma'^2 q^2 + 2\gamma'^2 \gamma q - \frac{5}{6}\gamma'^2 q^3 - \gamma\gamma'^2 q^2)]_{q_-}^{q_+} \quad (1.5) \\ V_s &\equiv \frac{v_s}{\varepsilon\Omega h} = -\frac{1}{gn} \frac{\partial i}{\partial \lambda} = -\gamma' q + \dots, \quad V_l \equiv \frac{v_l}{\Omega h} \end{aligned}$$

Здесь $\gamma(\lambda)$ — произвольная функция — связана с границами пучка условием (1.4). Если выбрать в качестве оси центральную траекторию $q_+ = -q_- = b$, то условие (1.4) ввиду (1.5) принимает вид

$$\gamma b + \varepsilon\kappa(\frac{5}{6}b^3 + 2\gamma^2 b) + \varepsilon^2\kappa^2(\frac{17}{3}\gamma b^3 + 2\gamma^3 b) + \varepsilon^2(2\gamma^2 \gamma b - \frac{5}{6}\gamma'^2 b^3) = \frac{1}{2}i_c = \text{const} \quad (1.6)$$

Результат (1.5) во многом пересекается с результатами [6] и, вообще говоря, мог бы быть получен методом разложения решения по степеням s , рассмотренным в [6]. Однако остальные результаты данной статьи требуют более общего подхода. Представляя внешнее гармоническое поле φ_\pm вблизи пучка в виде

$$\frac{\eta\varphi_\pm}{\Omega^2 h^2} = V_\pm(l) + qB_\pm(l) + \frac{\varepsilon}{2}\kappa q^2 B_\pm + \frac{\varepsilon^2}{6}(2\kappa^2 B_\pm - B_\pm'') q^3 - \frac{\varepsilon^2}{2}V_\pm q^2$$

нетрудно получить ввиду (1.5) при симметричном положении оси $q_+ = \pm b$ соотношения

$$2V_\pm \pm 2B_\pm b - (\gamma \pm b)^2 + \varepsilon\kappa(B_\pm b^2 + b^3 - 3\gamma b^2 + 2\gamma^2 b) + \varepsilon^2\kappa^2(\pm \frac{2}{3}B_\pm b^3 - \frac{5}{4}b^4 + 4\gamma b^3 - 3\gamma^2 b^2) - \varepsilon^2(V_\pm q^2 \pm \frac{1}{3}B_\pm'' b^3 + \gamma'^2 b^2 - \gamma'\gamma b^2 + \gamma'' b^3) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} B_\pm &= (\gamma \pm b) - \varepsilon\kappa(\pm B_\pm b - \frac{3}{2}b^2 \mp 3\gamma b - \gamma^2) - \varepsilon^2\kappa^2(B_\pm b^2 + \frac{5}{2}b^3 - 6\gamma b^2 + 3\gamma^2 b) + \varepsilon^2(\frac{1}{2}b^2 B_\pm'' \pm V_\pm b \pm \gamma'^2 b - \frac{3}{2}\gamma'' b^2 + \gamma'' \gamma b) \quad (1.8) \end{aligned}$$

которые приводят к выражению для поля φ_+ в случае обратной задачи, когда ось пучка задана. Если же, например, рассматривается пучок в узком канале с определенными потенциалами на стенках (прямая задача), то (1.7) приводят к дифференциальному уравнению первого порядка (в нулевом приближении) для оси.

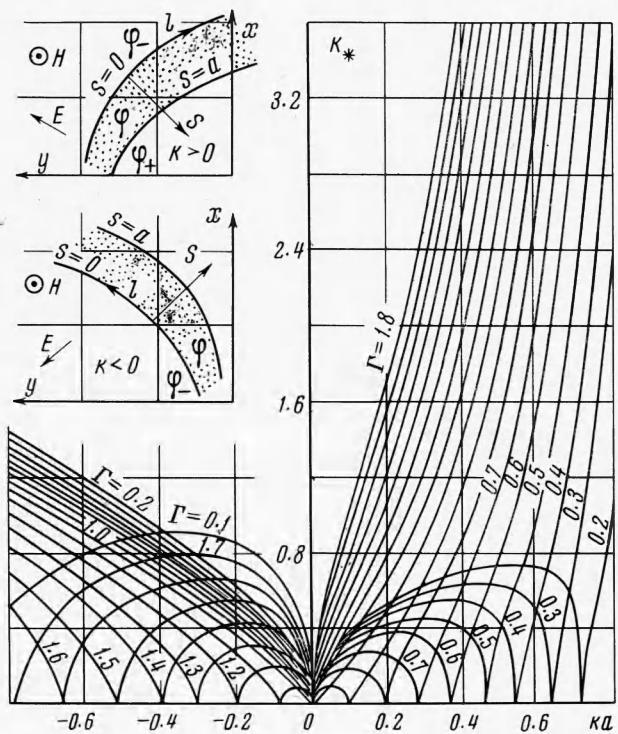
1.3°. Если отказаться от разложения метрической функции g по ε_* , то решение (1.2) можно искать в виде рядов по степеням ε_*^2 . С точностью до ε^4 из (1.2) следует:

$$\begin{aligned} 2\eta\varphi &= \varepsilon_*^2 v_{s0}^2 + \frac{1}{g}v_l^2, \quad v_l = \frac{\Omega}{2k}(\Gamma - g) + \varepsilon_*^2 \frac{\partial}{\partial q} \int_0^s v_{s0} ds \\ v_{s0} &= \frac{\Omega}{4k^2} \frac{\partial}{\partial l} \int_1^g \rho_0(\Gamma - g) \frac{dg}{g} \equiv \frac{1}{V_g \rho_0} \frac{\partial}{\partial l} J_0 \quad (1.9) \\ 4\pi\rho &= 4k^2 \frac{\partial}{\partial g} g \frac{\partial\Phi}{\partial g} + \frac{\varepsilon_*^2}{V_g} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{V_g} \frac{\partial\Phi_0}{\partial l} \right)_s, \quad g \equiv (1 - ks)^2 \end{aligned}$$

Здесь Γ — произвольная функция l , ось пучка для удобства взята на нижней границе $s_- = 0$ (см. схему на фиг. 1), производные по l берутся при фиксированном s , индекс нуль означает нулевое приближение по ε^2 ;

$$\begin{aligned} 2\eta\varphi_0 &= \frac{\Omega^2}{4k^2 g} (\Gamma - g)^2, \quad \eta \frac{\partial\Phi_0}{\partial g} = \frac{\Omega^2}{4k^2} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{g^2} \right) \\ \frac{8\pi\eta}{\Omega^2} \rho_0 &= 1 + \frac{\Gamma^2}{g^2}, \quad V_{l0} = \frac{\Omega}{2k}(\Gamma - g) \quad (1.10) \\ J_0 \frac{32\pi\eta k^2}{\Gamma\Omega^3} &= \frac{g}{\Gamma} + \frac{\Gamma^2}{2g^2} - \ln \frac{g}{\Gamma} - \frac{\Gamma}{g} - \frac{1}{\Gamma} - \frac{\Gamma^2}{2} + \ln \frac{1}{\Gamma} + \Gamma \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, выражения (1.10) совпадают с точным решением для цилиндрического одномерного (r) пучка, если положить $\Gamma = \text{const}$, $k = \text{const}$, $g = r^2$. Тем самым в старые формулы здесь вкладывается новое содержание: Γ , k могут быть произвольными функциями l и связа-



Фиг. 1

ны с током $J_c = \text{const}$ и шириной $s_+ = a(l)$ пучка условием, которое вытекает из (1.4), (1.10)

$$k_*^2 = \Gamma [-z + \frac{1}{2} z^2 + \ln z + \frac{1}{z} - \frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{2} \Gamma^2 - \ln \Gamma + \Gamma] \quad (1.11)$$

$$k_* \equiv k(32\pi\eta J_c)^{1/2} \Gamma^{-1/2} \Omega^{-3/2}, \quad z \equiv \Gamma (1 - ka)^{-2}$$

Внешнее поле φ_{\pm} вблизи пучка можно, используя уравнение Лапласа, представить с точностью до ε^2 в виде

$$\varphi_{\pm} = \psi_{\pm}(l) - B_{\pm}(l) \ln g \quad (1.12)$$

Условия непрерывности поля дают на нижней границе $s = 0$:

$$8\eta k^2 \psi_- = \Omega^2(\Gamma - 1)^2, \quad 8\eta k^2 B_- = \Omega^2(\Gamma^2 - 1) \quad (1.13)$$

Отсюда следует уравнение для нижней границы

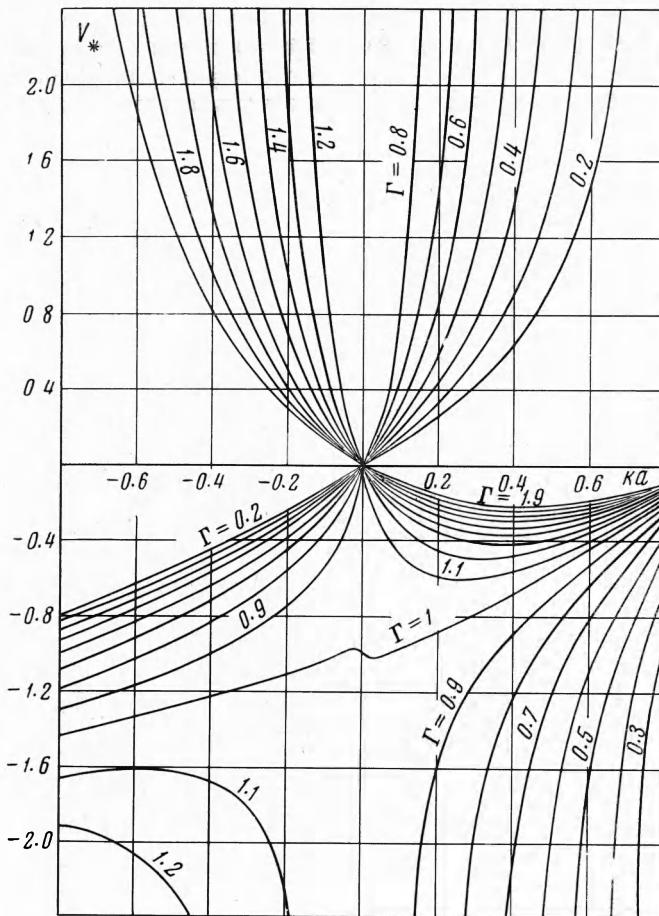
$$8\eta k^2 \varphi = \Omega^2 [(1 + 8\eta k \Omega^{-2} A)^{1/2} - 1] \quad (1.14)$$

являющееся фактически уравнением траектории электрона, где $\varphi = \psi_-$ — потенциал, $A \equiv k B_-$ — нормальная к траектории компонента напряженности поля. На верхней границе получается

$$B_* \equiv (8\eta k^2 / \Gamma \Omega^2)(B_+ - B_-) = z - \frac{1}{z} - \Gamma + \frac{1}{\Gamma} \quad (1.15)$$

$$V_* \equiv (8\eta k^2 / \Gamma \Omega^2)(\psi_+ - \psi_-) = z + \frac{1}{z} - \Gamma - \frac{1}{\Gamma} + (z - \frac{1}{z}) \ln \Gamma / z$$

На фиг. 1—3 представлены графики k_* , B_* , V_* в зависимости от ka .



Фиг. 2

По этим графикам, по нижней границе пучка, можно определить поле вблизи пучка и положение электродов $S_{\pm}(l)$ с потенциалами Ψ_{\pm} :

$$kS_{\pm} = 1 - \exp [(\psi_{\pm} - \Psi_{\pm})/2 B_{\pm}]$$

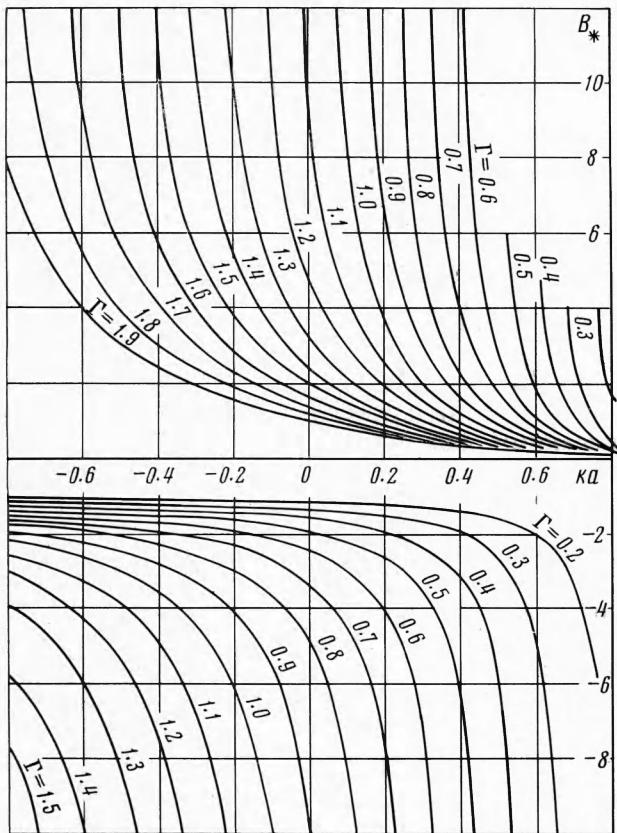
тем самым решается обратная задача для узкой полосы, содержащей узкий пучок.

1.4°. Обобщение (1.2) на релятивистский случай дает уравнения для однопоточного релятивистского пучка со скоростью $c(v/B)$:

$$B^2 = c^2 + \varepsilon_*^2 v_s^2 + \frac{v_l^2}{g}, \quad \frac{\partial}{\partial s} H = \frac{4\pi\eta}{c^2 \sqrt{g}} \rho v_l \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \sqrt{g} \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial l} \frac{\varepsilon_*^2}{\sqrt{g}} \frac{\partial B}{\partial l} = \frac{4\pi\eta}{c^2} \rho \sqrt{g} B, \quad B \equiv c + \frac{\eta}{c} \varphi \quad (1.17)$$

$$v_s = \frac{-1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial l} \int_{s_-}^s \rho v_l \frac{ds}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\eta}{c} H = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial v_l}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial l} \right) \quad (1.18)$$



Фиг. 3

С точностью до ε^2 эта система записывается в виде

$$\frac{4\pi\eta}{k^2c^2} \rho g = \frac{A''}{A} - 1 = \frac{B''}{B}, \quad \frac{B^2}{c^2} = 1 + A^2, \quad A \equiv \frac{v_l}{c \sqrt{g}}, \quad A' \equiv \frac{dA}{ds}, \quad \sigma^2 \equiv \ln g \quad (1.19)$$

Отсюда следует решение

$$4\pi\eta(kc)^{-2} \rho g = \beta^2 + 2A^2, \quad \gamma + \ln \sqrt{g} = 1/\beta F(\arctg A, \sqrt{\beta - 1/\beta}) \quad (1.20)$$

где F — эллиптический интеграл первого рода; $\gamma, \beta > 1$ — произвольные функции l , связанные с шириной пучка $2a$ ($s_{\pm} = \pm a$) и током J_c условием, вытекающим из (1.4), (1.16), (1.17)

$$\frac{4\pi\eta}{kc^3} J_c = \int_{A_+}^{A_-} (\beta^2 + 2A^2) \frac{A dA}{\sqrt{g} \sqrt{(\beta + A^2)(1 + A^2)}}, \quad A_{\pm} \equiv A|_{s=\pm a} \quad (1.21)$$

Интеграл (1.21) не выражается в элементарных функциях. Если разложить g в (1.20), (1.21) по степеням ε_* , то с той же точностью получается

$$A = \operatorname{sh} Q + \frac{1}{2}\varepsilon_*\mu ks^2 \operatorname{ch} Q, \quad B = c(\operatorname{ch} Q + \frac{1}{2}\varepsilon_*\mu ks^2 \operatorname{sh} Q)$$

$$\eta c^{-2} H = \mu [(1 + \varepsilon_* ks) \operatorname{ch} Q + \frac{1}{2}\varepsilon_*\mu ks^2 \operatorname{sh} Q] - \varepsilon_* k \operatorname{sh} Q$$

$$4\pi\eta c^{-2} \rho = \mu^2 (1 + 2\varepsilon_* ks)$$

$$2\pi\eta c^{-3} J_c = \operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} \mu a + \varepsilon_* k \{\mu a \operatorname{ch} \gamma \operatorname{ch} \mu a - [1 + \frac{1}{2}(\mu a)^2] \operatorname{sh} \mu a \operatorname{ch} \gamma\} Q \equiv \gamma + \mu s, \quad \mu \equiv k\beta$$

Магнитное поле H внутри пучка оказывается неоднородным. Вне пучка поле будет однородным $H_{\pm} = H$ ($s = \pm a$).

§ 2. Двухпоточный пучок. Воспользуемся следующим представлением двухзначного поля скорости $\mathbf{v}_{(1)}$, $\mathbf{v}_{(2)}$ и плотности $\rho_{(1)}$, $\rho_{(2)}$ пучка

$$\mathbf{v}_{(1)} = \Gamma + \nabla w, \quad \mathbf{v}_{(2)} \equiv \Gamma - \nabla w, \quad 2\rho_{(1)} \equiv \rho + \delta, \quad 2\rho_{(2)} \equiv \rho - \delta \quad (2.1)$$

В таком представлении электронно-гидродинамические уравнения для нерелятивистского стационарного моноэнергетического пучка с безвихревым полем обобщенного импульса имеют вид

$$\nabla w \Gamma = 0, \quad (\nabla w)^2 = 2\eta\Phi, \quad 2\eta\Phi \equiv 2\eta\varphi - \Gamma^2 \quad (2.2)$$

$$\nabla(\rho\Gamma) + \nabla(\delta\nabla w) = 0, \quad \nabla(\delta\Gamma) + \nabla(\rho\nabla w) = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla^2\varphi = 4\pi\rho; \quad \partial\Gamma_y/\partial x - \partial\Gamma_x/\partial y = \Omega, \quad \Omega \equiv \eta/c H \quad (2.4)$$

Складывая и вычитая уравнения (2.2) и (2.3), легко убедиться ввиду (2.1), что (2.2) эквивалентны интегралам энергии, а (2.3) уравнениям неразрывности, выписанным для первого $\mathbf{v}_{(1)}$, $\rho_{(1)}$ и второго $\mathbf{v}_{(2)}$, $\rho_{(2)}$ подпотоков, образующих рассматриваемый пучок. Можно выделить токи

$$\mathbf{J} = \rho\Gamma + \delta\nabla w, \quad \mathbf{J}_\pm = \pm^{1/2}(\delta\Gamma + \rho\nabla w)$$

где \mathbf{J} — плотность тока пучка, \mathbf{J}_\pm — плотность так называемого вращающегося тока. Из уравнений (2.2) видно, что скорость Δw (осцилляционная), по которой различаются подпотоки, ортогональна общей для подпотоков (сносовой) скорости Γ и исчезает ($\nabla w = 0$) на поверхностях $\Phi = 0$. Поверхность $\Phi = 0$ как граница двухскоростного движения является границей рассматриваемого пучка¹, и можно написать условия

$$(a) \quad w|_{\Phi=0} = \text{const}, \quad (b) \quad \mathbf{J}\nabla\Phi|_{\Phi=0} = 0 \quad (2.5)$$

где (a) эквивалентно $\nabla w = \Phi = 0$, (b) — утверждает, что ток пучка не пересекает границ пучка² при отсутствии источников на границах. Условия (2.5) необходимы для метода последовательных приближений.

2.1°. Пусть в координатах s , l , связанных с пучком, ось $s = 0$ расположена вблизи центра пучка, $s_+(l) > 0$, $s_-(l) < 0$ являются явным выражением искомых границ пучка $\Phi = 0$. В координатах s , l уравнения (2.2) — (2.4) ввиду (1.1) записываются так:

$$\frac{\partial w}{\partial s} \Gamma_s + \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial l} \Gamma_l = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{\epsilon_*^2}{g} \left(\frac{\partial w}{\partial l} \right)^2 = 2\eta\Phi \quad (2.6)$$

$$2\eta\Phi = 2\eta\varphi - \epsilon_*^2 \Gamma_s^2 - 1/g \Gamma_l^2, \quad \partial\Gamma_l/\partial s - \epsilon_*^2 \partial\Gamma_l/\partial l = \Omega \sqrt{g} \quad (2.7)$$

$$\sqrt{g} \left(\rho\Gamma_s + \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right) = - \frac{\partial}{\partial l} \int_{s_-}^s \left(\rho\Gamma_l + \epsilon_*^2 \delta \frac{\partial w}{\partial l} \right) \frac{ds}{\sqrt{g}} + \Sigma(l) \quad (2.8)$$

$$\sqrt{g} \left(\epsilon_*^2 \delta\Gamma_s + \rho \frac{\partial w}{\partial s} \right) = - \frac{\partial}{\partial l} \int_{s_-}^s \epsilon_*^2 \left(\delta\Gamma_l + \rho \frac{\partial w}{\partial l} \right) \frac{ds}{\sqrt{g}} + I(l) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \sqrt{g} \frac{d\varphi}{ds} + \epsilon_*^2 \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\varphi}{\partial l} = 4\pi\delta \sqrt{g} \quad (2.10)$$

$$g \equiv (1 - \epsilon_* ks)^2, \quad \Gamma_s \equiv \Gamma_x y_c' - \Gamma_y x_c', \quad \Gamma_l \equiv \sqrt{g} (\Gamma_x x_c' + \Gamma_y y_c')$$

¹ Возможен случай, когда в пучке образуются несколько поверхностей $\Phi = 0$. Для простоты здесь рассматривается случай одной волны $\Phi \geqslant 0$ в пределах пучка.

² Последнее справедливо, вообще говоря, если $(\nabla\Phi)^2 \neq \Phi = 0$. В противоположном случае $(\nabla\Phi)^2 = \Phi = 0$, который возможен при полном пространственном заряде, возможно пересечение током границы $\Phi = 0$.

Здесь Γ_s, Γ_l — ковариантные компоненты вектора Γ в системе s, l . В уравнениях неразрывности произведено интегрирование по s , так что I, Σ — произвольные функции l . В (2.6) — (2.10) расставлен параметр ε_* в тех местах, где $\varepsilon \equiv h/L$ появляется в результате перехода к безразмерным величинам (1.3) и

$$V_s \equiv \frac{\Gamma_s}{\varepsilon \Omega h}, \quad V_l \equiv \frac{\Gamma_l}{\Omega h}, \quad \vartheta \equiv \frac{w}{\Omega h^2}, \quad u_s \equiv \frac{\partial w}{\partial s} \frac{1}{\Omega h}, \quad u_l \equiv \frac{\partial w}{\partial l} \frac{1}{\Omega h} \quad (2.11)$$

Условия (2.5) в системе s, l можно записать так:

$$\Phi(s = s_+) = 0, \quad \Phi(s = s_-) = 0, \quad w(s = s_-) = 0, \quad w(s = s_+) = 1/2\pi\Omega h^2 \quad (2.12)$$

$$\left[\left(\rho \Gamma_s + \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{g} \left(\rho \Gamma_l + \varepsilon_*^2 \delta \frac{\partial w}{\partial l} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial l} \right]_{s=s_\pm} = 0 \quad (2.13)$$

Из (2.13) ввиду (2.8) и тождества

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial l} + \frac{ds_\pm}{dl} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right]_{s=s_\pm} = 0 \quad (2.14)$$

вытекают условия, определяющие Σ и I :

$$\Sigma = 0, \quad \int_{s_-}^{s_+} \left(\rho \Gamma_l + \varepsilon_*^2 \delta \frac{\partial w}{\partial l} \right) \frac{ds}{V_g} = J_c \equiv \frac{\Omega^3 h^2}{4\pi g} i_c \quad (2.15)$$

где J_c — полный ток пучка.³

2.2°. С точностью до ε^2 можно переписать (2.6) — (2.10) и (2.12), (2.15) в безразмерных переменных (1.3), (2.11) так:

$$2U^2 = u_s^2 + (\gamma + q)^2 + \varepsilon \kappa (2\gamma^2 q + 3\gamma q^2 + q^3) \quad (2.16)$$

$$V_l = \gamma + q - 1/2 \varepsilon \kappa q^2, \quad V_s = -(\gamma + q) (v/u_s), \quad v \equiv dv/d\lambda \quad (2.17)$$

$$n(1 - \varepsilon \kappa q) = \frac{\alpha}{u_s}, \quad \alpha \equiv \frac{4\pi \eta I}{\Omega^3 h}, \quad \frac{\partial}{\partial q} (1 - \varepsilon \kappa q) \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\alpha}{u_s} \quad (2.18)$$

$$u_s|_{q=q_\pm} = 0, \quad \int_{q_-}^{q_+} u_s dq = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{q_-}^{q_+} \left[\gamma + q + \varepsilon \kappa \left(2\gamma q + \frac{3}{2} q^2 \right) \right] \frac{\alpha dq}{u_s} = i_c \quad (2.19)$$

Здесь $\gamma = \gamma(l)$, $\alpha = \alpha(l)$. Замена переменных

$$(q, \lambda) \rightarrow (\tau, \lambda), \quad (dq/d\tau)_\lambda = u_s, \quad \tau = q = 0 \quad (2.20)$$

приводит уравнения (2.16), (2.18) к одному

$$\begin{aligned} d^2q/d\tau^2 + q + \gamma + \varepsilon \kappa (\gamma^2 + 3\gamma q + 3/2 q^2) &= dU/dq \\ dU/dq &= \alpha \tau + \gamma + \varepsilon \kappa (\alpha \tau q + \gamma q + \xi(l) + \gamma^2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Решение (2.21) можно представить в виде

$$q = \alpha \tau + \beta s_\tau - \varepsilon \kappa z, \quad u_s = \alpha + \beta c_\tau - \varepsilon \kappa (dz/d\tau) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} z &\equiv -\xi(1 - c_\tau) + \alpha^2(c_\tau - 1 + 1/2 \tau^2) + 1/2 \alpha \beta \tau (s_\tau - \tau c_\tau) + 1/2 \beta^2(1 - c_\tau)^2 + \\ &+ 2\gamma \alpha (\tau - s_\tau) + \gamma \beta (s_\tau - \tau c_\tau), \quad \beta = \beta(l) \end{aligned}$$

Здесь и ниже используются обозначения

$$s_\tau \equiv \sin \tau, \quad c_\tau \equiv \cos \tau, \quad t_\tau \equiv \operatorname{tg} \tau, \quad s_\theta \equiv \sin \theta, \quad c_\theta \equiv \cos \theta$$

Если осевую линию выбрать «симметрично» по τ :

$$q(\tau = \pm \theta) = q_+, \quad \theta = \theta(l) \quad (-\theta < \tau < \theta) \quad (2.23)$$

то наложение условий (2.20) дает для $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \theta$ в нулевом приближении

$$\begin{aligned} q_{\pm}^0 &= \pm b_0, \quad \beta_0 c_0 = -\alpha_0, \quad b = \alpha_0 \theta + \beta_0 s_0 \\ \alpha_0^2 &= \frac{\pi}{4} \left[\theta \left(1 + \frac{1}{2c_0^2} \right) - \frac{3}{2} t_0 \right]^{-1}, \quad \gamma_0 = \frac{i_c}{2\alpha_0 \theta} \end{aligned} \quad (2.24)$$

в первом приближении

$$\alpha \equiv \alpha_0 + (1/2\varepsilon\kappa i_c) \alpha_1$$

$$\beta \equiv \beta_0 + (1/2\varepsilon\kappa i_c) \beta_1$$

$$\gamma \equiv \gamma_0 + \varepsilon\kappa\gamma_1$$

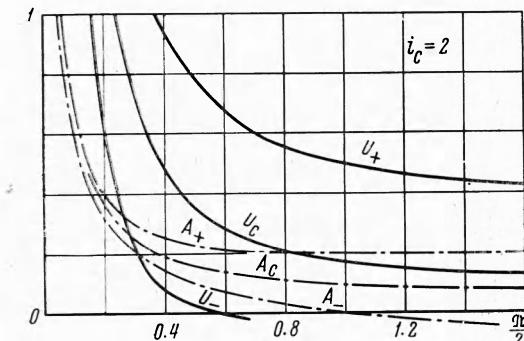
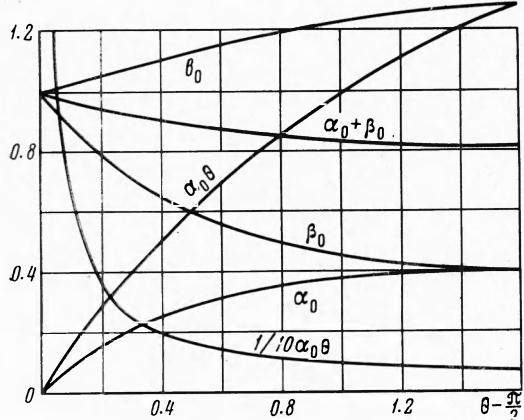
$$\begin{aligned} \beta_1 (2\theta c_0 + \theta/c_0 - 3s_0) &= \\ = (2/\theta) (-^{3/4}\theta + 3s_0 - 2\theta c_0 + & \\ + ^{3/4}t_0 - \theta^2 t_0 + ^{3/4}\theta t_0^2 - \theta/c_0) & \\ \alpha_1 = -\beta_1 c_0 + (1/\theta) \times & \\ \times [2(1 - c_0 - \theta t_0)] & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\gamma_1 &= -^{1/4} (i_c/\alpha_0)^2 \alpha_1 + v \\ v \equiv \alpha_0^2 [-\xi\alpha_0^{-2}(\theta - s_0) - & \\ - ^{1/3}\theta^3 - ^{5/2}\theta + s_0 + & \\ + ^{5/2}t_0 + ^{1/2}\theta^2 t_0 - t_0/c_0] & \\ \xi s_0 &= \alpha_0^2 (^{3/2}\theta - s_0 - ^{1/2}\theta^2 t_0 - \\ - ^{3/2}t_0 + t_0/c_0) \end{aligned} \quad (2.25)$$

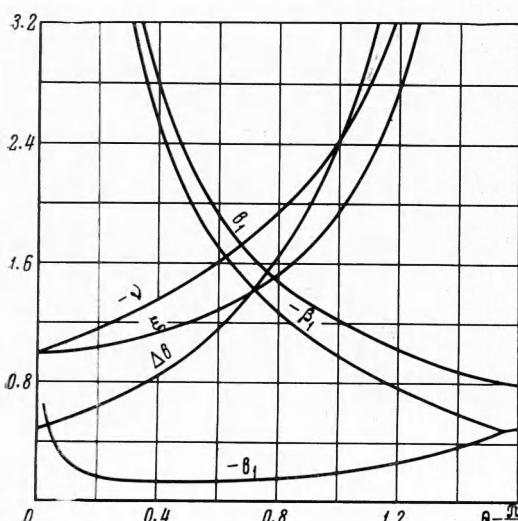
и для положения границ

$$\begin{aligned} q_+ &\equiv b_0 + \varepsilon\kappa(^{1/2}i_c b_1 + \Delta b) \\ -q_- &\equiv b_0 + \varepsilon\kappa(^{1/2}i_c b_1 - \Delta b) \\ b_1 &= \alpha_1 \theta + \beta_1 s_0 - \\ - (1/\theta) [2(\theta - s_0) - t_0 + \theta] & \\ \Delta b &= \alpha_0^2 [\xi\alpha_0^{-2} (1 - c_0) - \\ - \theta^2 + ^{1/2} + ^{1/2}\theta t_0 + 1/c_0 - & \\ - ^{1/2}c_0^{-2} - c_0] \end{aligned} \quad (2.26)$$

На фиг. 4 и 5 даны графики коэффициентов (2.24)—



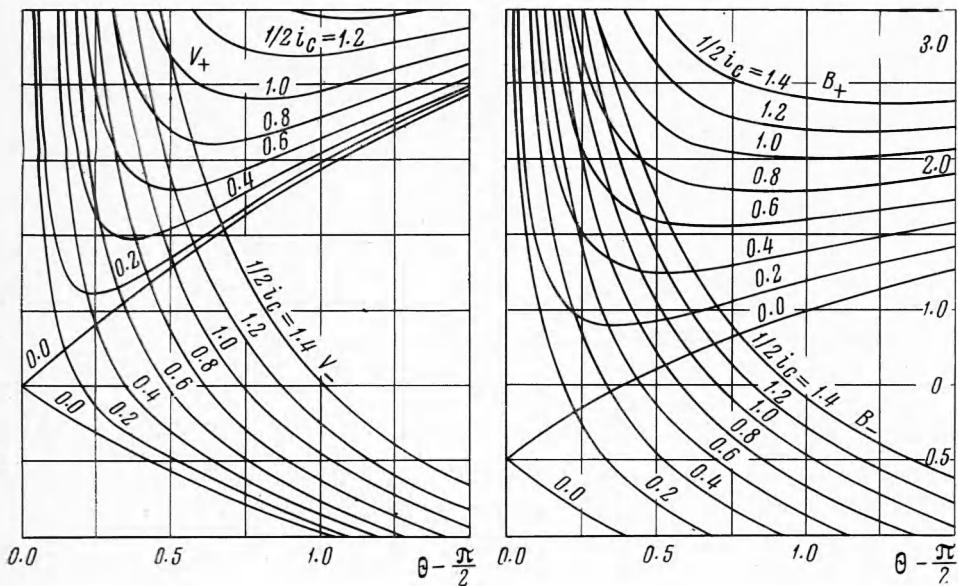
Фиг. 4



Фиг. 5

(2.26) в зависимости от параметра θ , который изменяется в области $1/2\pi \leq \theta \leq \pi$, так как по условию пучок описывается одной волной Φ .

Нетрудно видеть, что $2\theta/\Omega$ есть время осцилляции электрона между границами пучка, так что $\pi\Omega/\theta$ есть круговая частота осцилляции. Эта величина меняется от Ω (нулевой заряд) до $1/2\Omega$ (полный пространственный заряд). Под воздействием пространственного заряда изменяется энергия поперечного движения $(\alpha_0 + \beta_0)^2 \Omega^2 h^2$ и радиус орбиты элект-



Фиг. 6

рона $b_0 h$. Последняя величина меняется от h (нулевой заряд) до $(\pi/\sqrt{6})h \approx 1$ ($3h$ полный заряд). Плотность пространственного заряда изменяется обратно пропорционально напряженности поля на оси $A_c \sim \gamma_0$ и падает с ростом напряженности внешнего поля вблизи пучка. Появление особенностей у v , ξ , Δb в $\theta = \pi$ связано, вообще говоря, с неудачным выбором положения оси¹. Действительно, особенность в γ_1 , ξ вблизи $\theta = \pi$ в формулах для q , u_s и т. д. сглаживается множителями, с которыми γ_1 , ξ входят в эти формулы. Особенность Δb , как видно из (2.26), приводит к тому, что выбранная (симметрично по τ) ось при $\theta \rightarrow \pi$ быстро отклоняется от центра пучка. Тем самым ограничивается область применения формул (2.23) — (2.26). Выкладки для симметричного по s расположения оси $q_{\pm} = \pm b$ несложны, однако в результате получаются формулы значительно более громоздкие, чем (2.25), (2.26).

Сшивание внутреннего поля U с внешним $V_{\pm} + B_{\pm}q + \dots$ в нулевом приближении дает

$$B^0_{\pm} = \gamma_0 + \alpha_0 \theta, \quad 2V_{\pm} = \gamma_0^2 + b_0^2 \mp 2 \alpha_0 \theta b_0 \quad (2.27)$$

Эти зависимости представлены на фиг. 6 для различных значений тока пучка i_c . На фиг. 4 даны графики безразмерных потенциалов U и напряженности A внутреннего поля на границах пучка (+, —) и в центре (c) в нулевом приближении

$$U_{\pm} = (b_0 \pm \gamma_0)^2, \quad A_{\pm} = \gamma_0 \pm \alpha_0 \theta, \quad U_c = \gamma_0^2 + b_0^2, \quad A_c = \gamma_0 \quad (2.28)$$

¹ Особенность коэффициентов α_1 , β_1 в точке $\theta = 1/2\pi$ не существенна, так как в формулах α_1 , β_1 участвуют в виде суммы, которая сглаживает эту особенность.

2.3°. Второе приближение по ε будет зависеть уже от градиентов по продольной координате $l \equiv \lambda L$. В это приближение войдут такие члены как

$$\begin{aligned} V_s^0 &= -(q^0 + \gamma_0) u_l^0 / u_s^0, \quad u_l^0 = (\alpha_0 \alpha_0^* + \beta_0 \beta_0^*) \tau + \alpha_0 \beta_0 s_\tau + \beta_0 \alpha_0^* (2s_\tau - \tau c_\tau) \\ P &\equiv \int V_s^0 dq = -(\alpha_0 \alpha_0^* + \beta_0 \beta_0^*) [1/2 \gamma_0 \tau^2 + 1/3 \alpha_0 \tau^3 + \beta_0 (s_\tau - \tau c_\tau)] + \\ &+ (\alpha_0 \beta_0^* - \beta_0 \alpha_0^*) [\gamma_0 (1 - c_\tau) + \alpha_0 (1/2 \tau^2 + s_\tau - \tau c_\tau) + 1/2 \beta_0 (\tau - s_\tau c_\tau)] + \\ &+ \beta_0 \alpha_0^* [\gamma_0 (2 - 2c_\tau - \tau s_\tau) + \alpha_0 (3s_\tau - 3\tau c_\tau - \tau^2 s_\tau) - 1/2 \beta_0 (3/2 \tau - 3/2 s_\tau c_\tau - \tau s_\tau^2)] \\ \sigma_0 &\equiv \frac{4\pi\eta}{\Omega^2} \delta_0 = -V_s^0 \frac{\alpha_0}{(u_s^0)^2} - \frac{1}{u_s^0} \left(\frac{\partial i}{\partial \lambda} \right)_q, \quad \beta^* \equiv \frac{d\beta}{d\lambda} \end{aligned}$$

Здесь, как и раньше, индексом нуль отмечается нулевое приближение. Если взять для простоты пучок без кривизны $k = 0$, то для второго приближения (2) получается

$$\partial^2 q / \partial \tau^2 + \gamma + q + \varepsilon^2 [(\partial P / \partial \lambda)_q + (\gamma_0 + q_0) V_s^0 + V_s^0 \partial V_s^0 / \partial q] = \partial U / \partial q$$

$$\partial U / \partial q = \alpha \tau + \gamma - \varepsilon^2 [\int n_2 dq + \int (\partial^2 U_0 / \partial \lambda^2) dq - \xi(l)]$$

$$n_2 V_s^0 = -V_s^0 \sigma_0 - \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{q_-}^{q_0} \left(\sigma_0 V_l^0 + \alpha_0 \frac{u_l^0}{u_s^0} \right) dq^0, \quad \frac{\partial q^0}{\partial \tau} = u_s^0$$

2.4°. Релятивистское обобщение (2.6) — (2.10) приводит только к изменению выражений для Φ и H , Ω :

$$2\eta\Phi \equiv B^2 - \varepsilon^2 \Gamma_s^2 - 1/g \Gamma_l^2 - c^2, \quad B \equiv c + (\eta/c)\varphi \quad (2.29)$$

$$dH/ds = (4\pi/c\sqrt{g}) [\rho \Gamma_l + \varepsilon_*^2 \delta (dw/dl)], \quad \Omega \equiv (\eta/c) H$$

при этом вместо (2.10) получается уравнение (1.17) для B . Остальные уравнения и условия имеют тот же вид. В нулевом приближении имеем

$$\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} = \frac{1}{\Gamma_l} \frac{\partial^2 \Gamma_l}{\partial s^2} = \frac{4\pi I}{c^3 u_s^0}, \quad u_s^0 = B^2 - \Gamma_l^2 - c^2 \quad (2.30)$$

Эта система исследовалась в [7]. Однако в [7] не были наложены условия (2.12), (2.15). В обозначениях [7] их можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lambda s_\pm &= \pm 2 [\Psi_3 (\Psi_3 - \Psi_1)^{-1/2} F(\varphi, n) - (\Psi_3 - \Psi_1)^{1/2} E(\varphi, n)]_{\varphi_m}^{1/2\pi} \\ &4 (\Psi_3 - \Psi_1)^{3/2} \left[\left(\frac{\Psi_3}{\Psi_3 - \Psi_1} \right)^2 F(\varphi, n) - \frac{2\Psi_3}{\Psi_3 - \Psi_1} E(\varphi, n) - \frac{n^2}{3} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} \times \right. \\ &\times \sin \varphi \cos \varphi + \frac{2}{3} \frac{2\Psi_3 - \Psi_2 + \Psi_1}{\Psi_3 - \Psi_1} E(\varphi, n) - \frac{\Psi_3 - \Psi_2}{3(\Psi_3 - \Psi_1)} F(\varphi, n) \left. \right]_{\varphi_m}^{1/2\pi} = \frac{\pi}{2c} \Omega_* h^2 \lambda_*, \\ \Omega_* &\equiv \frac{\eta}{c} H|_{s=s_-} = \text{const} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \sqrt{1 + \Psi^2} \operatorname{sh} V \frac{d\Psi}{\Delta} = \frac{4\pi\eta J_c}{c^3 \lambda_*}, \quad V \equiv \gamma + d_* \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \frac{\Psi d\Psi}{(1 + \Psi^2) \Delta} \\ \Psi_m &\equiv \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\Psi_2 + \Psi_1}{\Psi_2 - \Psi_1} \right)^{1/2}, \quad n^2 \equiv \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Psi_3 - \Psi_1}, \quad \lambda_*^2 \equiv \frac{8\pi\eta}{c^3} I \end{aligned}$$

Здесь F , E — эллиптические интегралы первого и второго рода; Ω_* , h , J_c — константы; λ_* , s_* , γ , d_* , c_* — функции l ; $\Psi_1 < \Psi_2 < \Psi_3$ — корни уравнения

$$\Psi^3 + \Psi - (1/s_*) \Psi^2 + c_* = 0, \quad \Psi_1 < 0, \quad \Delta \equiv \sqrt{(\Psi - \Psi_1)(\Psi_2 - \Psi)(\Psi_3 - \Psi)}$$

Решение представляется в виде $B = c \sqrt{1 + \Psi^2} \operatorname{ch} V$, $\Gamma_l = c \sqrt{1 + \Psi^2} \operatorname{sh} V$.

Как и раньше, данное нулевое приближение отличается от точного решения соответствующей одномерной задачи тем, что часть констант, входящих в последнее, интерпретируются как функции l , связанные выражениями, вытекающими из условий (2.12), (2.15).

§ 3. Пучок в заданном поле. Пусть пучок дрейфует в заданном поле с характерным размером неоднородности L , так что вблизи оси пучка поле представимо рядом по s .

3.1°. Для гармонического поля можно написать

$$\varphi = \psi + As + \frac{1}{2} \varepsilon_* k A s^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_*^2 (Qs^3 + \psi'' s^2), Q \equiv \frac{1}{3} (A'' - 2k^2 A) \quad (3.1)$$

где $\psi(l)$ — потенциал, $A(l)$ — нормальная составляющая напряженность поля на оси, $\psi' \equiv d\psi/dl$. Ограничивааясь точностью в ε^3 , нетрудно получить с учетом условия (2.12) следующее решение уравнений (2.6), (2.7) для симметричного положения оси $s_+ = \pm a$:

$$2\eta\Phi = u_0^2(1 + \varepsilon_* F_1 + \varepsilon_*^2 F_2), u_s = u_0[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_* F + \frac{1}{2} \varepsilon_*^2 (F_2 - \frac{1}{4} F_1)] \quad (3.2)$$

$$u_s \equiv \partial w/\partial s, u_l \equiv \partial w/\partial l, u_0 \equiv \Omega \sqrt{a^2 - s^2}, \Omega^2 F_1 \equiv k(s\Omega^2 + 3\Gamma\Omega - \eta A)$$

$$\Omega^2 F_2 \equiv \eta(Qs + \psi'') + \frac{5}{4} k^2 \Omega^2(a^2 + s^2) + 4k^2 s \Gamma \Omega + 3k^2 \Gamma^2 \quad (3.2)$$

$$2\eta\psi = \Gamma^2 + \Omega^2 a^2 + \varepsilon_*^2 k a^2 (3\Gamma\Omega - \eta A) + \varepsilon_*^2 [\eta\psi'' a^2 + \frac{5}{4} k^2 a^4 + 3(k a \Gamma)^2]$$

$$2\eta A = \Omega\Gamma + \varepsilon_* k (\Omega^2 a^2 + 2\Gamma^2) + \varepsilon_*^2 (\eta Q a^2 + 4k^2 a^2 \Omega\Gamma) \quad (3.3)$$

$$a^2 \{\Omega^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_* k (3\Gamma\Omega - \eta A) + \frac{1}{2} \varepsilon_*^2 [\eta\psi'' + \frac{3}{2} (ka\Omega)^2 + 3k^2 \Gamma^2 - \frac{1}{4} k^2 (3\Gamma\Omega - \eta A)^2]\} = h^2 \Omega^2 \quad (3.4)$$

Соотношения (3.3), (3.4) можно представить в виде

$$a_0 = h, \quad \Gamma_0 \Omega = \eta A_0, \quad 2\eta\psi_0 = (\eta/\Omega)^2 A_0^2 + \Omega^2 h^2 \quad (3.5)$$

$$a_1 = -\frac{1}{2} k_0 h, \quad \eta\psi_1 = (\Gamma_0/\Omega) (\eta A_1 - k_0 \Gamma_0^2) \quad (3.6)$$

$$2\Gamma_1 \Omega = 2\eta A_1 - k_0 (h^2 \Omega^2 + \Gamma_0^2)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} h (k_0 \eta A_1 + k_1 \Gamma_0 \Omega + \frac{1}{2} \eta\psi_0'' - \frac{5}{4} k_0^2 \Gamma_0^2) \Omega^{-2} \quad (3.7)$$

$$2\Gamma_2 \Omega = 2\eta A_2 - 4\eta A_1 k_0 (\Gamma_0/\Omega) - k_1 (h^2 \Omega^2 + \Gamma_0^2) + 4k_0^2 \Gamma_0^2 / \Omega - h^2 \eta Q_0 - k_0^2 h^2 \Gamma_0 \Omega, \dots$$

$$a \equiv a_0 + \varepsilon_* a_1 + \varepsilon_*^2 a_2, \Gamma \equiv \Gamma_0 + \varepsilon_* \Gamma_1 + \varepsilon_*^2 \Gamma_2, \dots$$

Видно, что полуширина пучка (радиус орбиты электрона) изменяется в первом приближении пропорционально кривизне оси и напряженности¹. Ось же должна быть найдена из уравнения $\psi(A, k) = \varphi$, так что A_1, A_2, k_1, k_2 есть поправки к k_0, A_0 .

Последние определяются положением оси $y(x)$ в нулевом приближении

$$2\eta\varphi = (\eta/\Omega)^2 A^2 + \Omega^2 h^2, \quad A \equiv [\varphi_x dy/dx - \varphi_y] [1 + (dy/dx)^2]^{-1/2} \quad (3.8)$$

Если к потенциальному φ в уравнении для траектории электрона (1.14) добавить константу $\Omega^2 h^2$ и разложить правую часть по степеням, $\varepsilon_* \sim k$, то получится уравнение

$$2\eta\varphi = \Omega^2 h^2 + (\eta/\Omega)^2 A^2 (1 - 2\varepsilon_* k \eta \Omega^{-2} A + \dots), \quad \varphi_x \equiv d\varphi/dx \quad (3.9)$$

которое совпадает в первом приближении с уравнением для оси пучка, вытекающим из (3.5), (3.6). Поэтому с точностью до ε^2 ось пучка совпадает с подходящим образом выпущенной траекторией электрона.

¹ А именно орбита расширяется, когда центробежная сила и электрическое поле действуют на электрон в одном направлении и суживаются в противоположном случае.

Для скорости Γ_l и плотности из (2.7)–(2.9) следует:

$$\begin{aligned} \Gamma_l &= \Omega s + \gamma - \frac{1}{2} \varepsilon_* \Omega k s^2, \quad \Gamma_s \sim \varepsilon_* \\ \delta &= I'/\Omega, \quad (1 - \varepsilon_* k s) \rho u_s = I + \frac{1}{2} \varepsilon_*^2 I'' (a^2 - s^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Условие (2.15) ввиду (3.2), (3.10) дает

$$\pi I \left\{ \Gamma \Omega^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_* k (\Omega^3 a^2 - 3\Gamma^2 \Omega + \eta A \Gamma) - \varepsilon_*^2 \Gamma^{3/4} (ka\Omega)^2 + \frac{1}{2} \eta \psi'' + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} a^2 (Q/A) \Omega^2 \right\} + \frac{1}{4} \varepsilon_*^2 \pi I'' a^2 \Gamma = J_c \Omega^3$$

Отсюда и из (3.5) — (3.7), (3.10) следует с точностью до ε_*^2 :

$$\rho = J_c \Omega \frac{1 + \varepsilon_* k (\frac{1}{2} a^2 + \frac{\eta}{4} \Omega^{-2})}{\pi \eta A \sqrt{a^2 - s^2}}, \quad \int_{-a}^a \rho ds = \frac{\Omega J_c}{\eta A} (1 + \varepsilon_* k \eta A \Omega^{-2}) \quad (3.11)$$

Видно, что к основному дрейфу со скоростью $(\eta/\Omega)A$ добавляется дрейф под действием центробежной силы со скоростью $\sim k(\eta A)^2 \Omega^{-3}$. Полученные распределения скорости и плотности зависят от параметра η , который может меняться в конечном диапазоне в зависимости от геометрии эмиттера, так что полный пучок имеет многозначное поле скорости и представляется в виде совокупности рассмотренных выше двухпоточных пучков. Последние удобно называть трубками тока. Трубка тока занята набором траекторий в интервале dh . Этот набор, вообще говоря, не полностью замыкает объем трубки. Поэтому плотность ρ можно интерпретировать как плотность заряда, размазанного с истинных траекторий по возможным соседним в трубке до сплошного распределения.

3.2°. Нетрудно показать, что в нулевом приближении согласно (3.8) ось колеблется как квазициклоида между двумя дискриминантными кривыми

$$2\eta\varphi = \Omega^2 h^2, \quad 2\eta\varphi = \Omega^2 h^2 + (\eta/\Omega)^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2), \quad \varphi_x = \partial\varphi / \partial x \quad (3.12)$$

Эти кривые, ограничивая, вообще говоря, весьма узкую полоску [4], пересекаются и испытывают ветвление в особой точке поля $\varphi_x = \varphi_y = 0$. Поэтому в этой же точке испытывает ветвление и ось пучка, т. е. в особых точках $\varphi_x = \varphi_y = 0$ происходит ветвление трубок тока. Более того, как нетрудно видеть из (1.8), уравнение оси плотного пучка в нулевом приближении совпадает по форме с (3.8). Поэтому в особой точке $\varphi_x = \varphi_y = 0$ возможно расщепление плотного пучка.

3.3°. Для поля небольшой напряженности

$$\varphi = \psi(l) + \varepsilon_* s A(l) + \varepsilon_*^2 s^2 B(l) + \varepsilon_*^2 c(l) s^3 + \dots \quad (3.13)$$

аналогичные предыдущему пункту выкладки дают

$$\begin{aligned} \Gamma_l &= \Omega s + \varepsilon_* (\Gamma - \frac{1}{2} \Omega k s^2) + \varepsilon_*^2 R, \quad R \equiv -\frac{1}{24} \Omega k'' (a^2 - s^2)^2 \\ u_s &= u_0 [1 + \frac{1}{2} \varepsilon_* k s + \frac{1}{2} \varepsilon_*^2 (F_2 - \frac{1}{4} k^2 s^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_*^3 s (F_3 - \frac{1}{2} k F_2 + \frac{1}{8} k^3 s^3)] \\ F_2 \Omega^2 &\equiv -2\eta B + \frac{5}{2} k^2 \Omega^2 (a^2 + s^2) + 3k \Gamma \Omega, \quad u_0 \equiv \Omega \sqrt{a^2 - s^2} \\ F_3 \Omega^2 &\equiv -2\eta c + \frac{3}{2} k^2 \Omega^2 (a^2 + s^2) + 4k^2 \Gamma \Omega - 2R \Omega (a^2 - s^2)^{-1} \\ u_l &= -\frac{1}{2} \varepsilon_* u_0 \{ \frac{1}{3} k' (a^2 - s^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_* [2\eta B \Omega^{-2} - \frac{5}{2} k k' a^2 - (\frac{3}{2} \Omega) (k\Gamma)'] s + \\ &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_* k k' s (a^2 - 2s^2) \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_s &= \frac{1}{2} \varepsilon_* \{ \frac{1}{3} k' (a^2 - s^2) [\Omega s + \varepsilon_* (\Gamma + 2k \Omega s^2) + \frac{1}{4} \varepsilon_* k k' \Omega s^2 (a^2 - 2s^2)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_* \Omega s^2 [2\eta B \Omega^{-2} - \frac{5}{2} k k' a^2 - (\frac{3}{2} \Omega) (k\Gamma)'] \} \end{aligned}$$

Для параметров трубы тока a , Γ , ψ получается

$$a \equiv a_0 + \varepsilon_*^2 a_2, \quad \Gamma \equiv \Gamma_0 + \varepsilon^2 \Gamma_2, \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon^2 \psi_2 \quad (3.15)$$

$$a_0 = h, \quad \Gamma_0 \Omega = \eta A_0 - \frac{1}{2} k_0 \Omega^2 h^2, \quad 2\eta\psi_0 = \Omega^2 h^2 \quad (3.16)$$

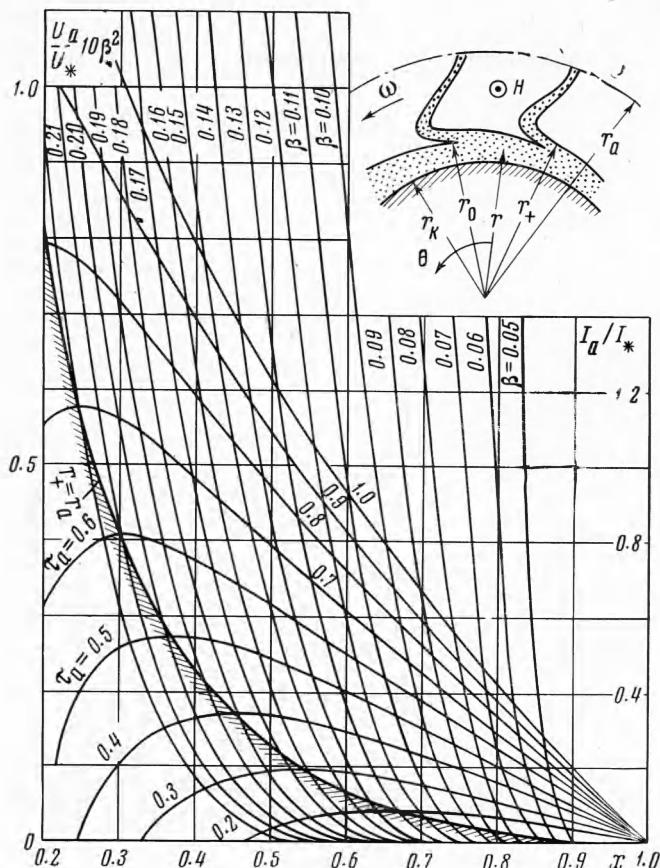
$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4} \eta h \Omega^{-2} (2B_0 - 3k_0 A_0), \quad 2\eta\psi_2 = (\eta A_0/\Omega)^2 + \frac{1}{2} \eta h^2 (k_0 A_0 - 2B_0) \\ 2\Omega\Gamma_2 &= 2\eta A_2 - k_0 \Omega^2 h^2 + 2\eta c_0 h^2 - 2k_0 (\eta A_0/\Omega)^2 - \frac{1}{2} k_0 \eta h^2 (k_0 A_0 + 2B_0) \end{aligned}$$

Пусть для определенности поле φ — гармоническое. Тогда

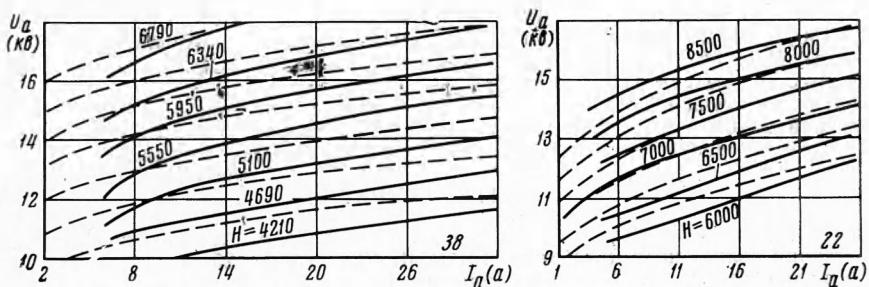
$$2B = kA - \psi'', \quad 6c = 2k^2 A - 2k\psi'' - k'\psi' - A'' \quad (3.17)$$

Из (2.8), (2.9), (3.14) и условия (2.15) получается для плотности

$$\begin{aligned} I &= \frac{J_c \Omega^2}{\pi \eta A_0} (1 + \varepsilon_*^2 f), \quad f = -\frac{A_2}{A_0} + 2k_0 \frac{\eta A_0}{\Omega^2} + \frac{h^2}{3} \left(k_0^2 + \frac{A_0''}{A_0} \right) \\ \rho &= \frac{J_c \Omega}{(1 - \varepsilon_* k s) \pi \eta A_0} \left\{ \frac{1 + \varepsilon_*^2 f}{\sqrt{a^2 - s^2}} + \left[\left(\frac{A_0'}{A_0} \right)^2 - \frac{A_0''}{2A_0} \right] \sqrt{a^2 - s^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$



Фиг. 7



Фиг. 8

Если считать φ полем бегущей волны в равномерно движущейся с волной системе отсчета, то (3.14) — (3.18) применимы к задаче, решенной в [3] методом усреднения. Здесь из (3.16), (3.17) следует результат, например для положения оси, совпадающий во втором приближении с линией центров орбит, полученной в [3]

$$2\eta\varphi = \varepsilon_*^2 (\eta/\Omega)^2 (\nabla\varphi)^2 + \Omega^2 h^2$$

Аналогичные выкладки для пучка в равномерно вращающейся с волной системе отсчета приводят для положения оси к формуле (23) работы [4].

Приложение. Если принять, как это делается обычно [3,4], что в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ вместе с вращающейся волной основной гармоники поля генерирующего магнетрона, задачу расчета электронного процесса в магнетроне можно поставить как стационарную, то описанным методом можно рассчитать электронные «спицы» магнетрона, которые, как общепризнано, представляют собой относительно узкие пучки, дрейфующие в вращающейся системе от катода (k) к аноду (a) (см. схему на фиг. 7).

Была проведена следующая предварительная оценка вольтамперной характеристики магнетрона в режиме полного ограничения тока пространственным зарядом, в которой использовались только соображения о ветвлении плотного пучка, изложенные в п. 3.2.

Так как высокочастотное поле E быстро убывает от анода к катоду [2-4], то поле в прикатодной области во «втулке», пренебрегая возмущением от спиц, заряд которых быстро убывает от катода $\sim 1/E$, можно грубо представить, как поле одномерного (r) цилиндрического однопоточного пучка (втулка). Плотность этого пучка ρ , поле пространственного заряда φ и азимутальная скорость электрона v_θ во вращающейся системе отсчета имеют вид

$$\rho = \frac{\Omega^2}{8\pi\eta} \left(1 + \frac{r_k^{-2}}{r^4} \right), \quad 2\eta\varphi = \frac{1}{r^2} v_\theta - \Omega^2 r_k^2, \quad \Omega \equiv \frac{\eta}{c} H$$

$$v_\theta = \frac{1}{2} \Omega \kappa (r^2 - r_k^2), \quad \beta \equiv \omega/\Omega, \quad \kappa \equiv 1 - 2\beta$$

Особая точка электрического поля находится, очевидно, вблизи линии $r = r_0$

$$(\partial\varphi/\partial r)_{r=r_0} = 0, \quad r_0 = r_k \kappa^{-1/2} \quad (\text{П.1})$$

На этой линии от прикатодного пучка отвечается спица с током $2I_a/N$:

$$\frac{I_a}{I_*} \approx \frac{h_*}{I_*} \int_{r_0}^{r_+} \rho \frac{v_\theta}{r} dr = \frac{1}{40\beta^3} \left\{ \kappa \left(\frac{1}{x} - x - \frac{1}{\kappa} + \ln \frac{\kappa}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{\kappa^2}{2} \right) \right\}$$

$$x \equiv \left(\frac{r_k}{r_+} \right)^2, \quad I_* \equiv \frac{10N h_* \omega^3 r_k^3}{16\pi\eta} \quad (\text{П.2})$$

Здесь $N/2$ — число спиц, I_a — анодный ток, h_* — высота рабочей части катода. Известное соотношение [8], связывающее верхнюю эффективную границу прикатодного пучка r_+ с постоянной разностью потенциалов между анодом и катодом U_a :

$$10\beta^2 \frac{U_a}{U_*} = \frac{1-x}{4x} [1-x+(1+x)(2\tau_a+\ln x)], \quad \tau_a \equiv \lg \frac{r_a}{r_k}, \quad U_* = \frac{5\Omega^2 r_k^2}{\eta} \quad (\text{П.3})$$

в совокупности с (П. 2) дает искомую характеристику I_a (U_a). Эти зависимости представлены графиками на фиг. 7. По (П. 2, П. 3) были рассчитаны вольт-амперные характеристики десяти типов магнетронов, описанных в [8]. Сравнение с экспериментальными характеристиками [8] показало соответствие в пределах $20 \div 5\%$. Для четырех типов (4, 50, 3, 31, 22 — x и 38 — резонаторные) отклонения по напряжению оказались в пределах $10 \div 5\%$. На фиг. 8 сплошными линиями даны экспериментальные, а пунктирными — вычисленные характеристики.

Пользуюсь случаем поблагодарить А. Н. Иевлеву за помощь в вычислительной и графической работе, В. Я. Кислова за обсуждение результатов, Л. А. Вайнштейна за предложение задачи, рассмотренной в п. 3, и критические замечания.

Поступила 22 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Борголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИФМЛ, 1958, гл. 5, §25.
2. Капица П. Л. Электроника больших мощностей. Изд-во АН СССР, 1962.
3. Нечаев В. Е. Приближенный анализ процессов в многорезонаторном магнетроне. Изв. вузов, Радиофизика, 1962, т. 5, № 3.
4. Нечаев В. Е. К анализу процессов в многорезонаторном магнетроне. Изв. вузов, Радиофизика, 1964, т. 7, № 1.
5. Грибнер Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
6. Сиротов В. А. О решении уравнений регулярного пучка при произвольной эмиссии на криволинейной поверхности. ПМТФ, 1966, № 3.
7. Данилов В. Н. К теории релятивистского магнетрона. Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, № 12.
8. Магнетроны сантиметрового диапазона. Пер. с англ. под ред. С. А. Зусмановского, «Советское радио», 1951.