УДК 539.3

ОСРЕДНЕННЫЕ ПОВОРОТЫ ПРИ КОНЕЧНОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Исследованы осредненные повороты и другие механические величины при конечных плоских деформациях упругого материала с линейной зависимостью напряжений Коши от деформаций Альманси. Определен вид упругого потенциала. Задача в перемещениях сведена к краевой задаче для комплексных потенциалов, решение которой при заданных перемещениях на границе представлено через интегралы типа Коши. Результаты сравниваются с результатами, полученными по линейной теории.

1. В линейной теории упругости деформация и поворот элемента материала, определяемые как симметричная и антисимметричная части градиента перемещения, являются малыми величинами. В нелинейной теории упругости деформации и повороты конечны. В переменных актуального состояния первые из них характеризуются тензором Альманси, а вторые (согласно В. В. Новожилову) — осредненными по элементарному объему поворотами. Рассмотрим поведение осредненных поворотов и других механических величин при плоской деформации упругого тела в рамках нелинейной теории упругости.

Статическая деформация описывается уравнениями равновесия и неразрывности, законом Мурнагана, представлениями деформаций через перемещения и краевыми условиями

$$\begin{gathered}\operatorname{div} P + \rho \boldsymbol{f} = 0, \qquad \nu = \rho/\rho_0 = \sqrt{1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - 8\varepsilon_3},\\ \varepsilon_1 = \operatorname{tr}\varepsilon, \qquad 2\varepsilon_2 = (\operatorname{tr}\varepsilon)^2 - \operatorname{tr}\varepsilon^2, \quad \varepsilon_3 = \det\varepsilon, \\ P = \nu(G - 2\varepsilon)\cdot\frac{d\Phi}{d\varepsilon}, \quad 2\varepsilon = \nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla - (\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{u}\nabla), \quad \boldsymbol{u}\Big|_{\Sigma_u} = \boldsymbol{h}, \quad P\cdot\boldsymbol{n}\Big|_{\Sigma_p} = \boldsymbol{p}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n}$ — векторы перемещений, массовых сил, граничных перемещений, напряжений, внешней нормали; G, P, ε — симметричные тензоры: метрический, напряжений (Коши) и деформаций (Альманси); $\nabla\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\nabla$ — градиент и транспонированный градиент перемещений; ε_1, ε_2, ε_3, ρ_0, ρ, ν, Φ — базисные инварианты деформаций, исходная, актуальная и относительная плотности материала и упругий потенциал; Σ_u, Σ_p — части поверхности тела, на которых заданы перемещения и напряжения соответственно [1].

При плоском деформировании однородного изотропного тела реализуются условия $\varepsilon_3 = 0$, $\Phi = \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Закон Мурнагана с учетом выражений тензорных градиентов инвариантов деформации и тождества Гамильтона — Кели для деформаций [1]

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} = G, \quad \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon} = \varepsilon_1 G - \varepsilon, \quad \varepsilon^2 - \varepsilon_1\varepsilon + \varepsilon_2 G = 0$$

принимает форму квазилинейной зависимости напряжений от деформаций, которую можно записать в виде закона Гука с переменными коэффициентами упругости, выражаемыми через упругий потенциал:

$$P = \varepsilon_1\Lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2)G + 2M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon; \tag{2}$$

$$\varepsilon_1\Lambda = \nu\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1} + (\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\Big), \quad 2M = -\nu\Big(2\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\Big), \quad \nu = \sqrt{1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2}. \qquad (3)$$

Обращение формул (3) определяет градиенты потенциала

$$\nu^3\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1} = \varepsilon_1\Lambda + (2\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2)M = \nu^3\Phi_1, \quad \nu^3\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2} = -2(\varepsilon_1\Lambda + M) = \nu^3\Phi_2, \qquad (4)$$

а условие их совместности $\partial\Phi_1/\partial\varepsilon_2 = \partial\Phi_2/\partial\varepsilon_1$ накладывает ограничение на коэффициенты упругости:

$$2\,\frac{\partial(\varepsilon_1\Lambda + M)}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial(\varepsilon_1\Lambda + (2\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2)M)}{\partial\varepsilon_2} + 6M = 0. \qquad (5)$$

В свою очередь, по коэффициентам упругости, согласованным с условием (5), находятся градиенты потенциала (4), которые упругий потенциал определяют квадратурой [2]

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int\limits_0^{\varepsilon_1} \Phi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\,d\varepsilon_1 + \int\limits_0^{\varepsilon_2} \Phi_2(0, \varepsilon_2)\,d\varepsilon_2 + \mathrm{const}. \qquad (6)$$

При плоской деформации основной является плоская задача, для которой соотношения (1) в комплексных переменных актуального состояния $z = x + iy$, $\bar z = x - iy$ (x, y — декартовы координаты) при отсутствии массовых сил принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial P^{12}}{\partial \bar z} = 0, \quad \nu = \sqrt{1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon^{12}, \quad 4\varepsilon_2 = (\varepsilon^{12})^2 - \varepsilon^{11}\varepsilon^{22},\\ P^{11} = \bar P^{22} = 2M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon^{11}, \quad P^{12} = 2N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon^{12} \quad (N = \Lambda + M),\\ \varepsilon^{11} = \bar\varepsilon^{22} = 2\,\frac{\partial u}{\partial \bar z}\Big(1 - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\Big), \quad 1 - \varepsilon^{12} = \Big(1 - \frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big(1 - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\Big) + \frac{\partial u}{\partial \bar z}\,\frac{\partial \bar u}{\partial z},\\ u\big|_{L_u} = h(s), \qquad P^{12}\,\frac{dz}{ds} - P^{11}\,\frac{d\bar z}{ds}\Big|_{L_p} = 2ip(s),\end{gathered} \qquad (7)$$

где L_u, L_p — части контура L ($z = z(s)$, $\bar z = \bar z(s)$ — границы сечения D тела плоскостью деформирования), на которых заданы соответственно перемещения и напряжения; s — дуга контура; верхними числовыми индексами отмечены комплексные компоненты векторов и тензоров; последние связаны с декартовыми компонентами тех же величин (обозначенными нижними буквенными индексами) формулами преобразования компонент, которые для перемещений и напряжений имеют вид [3]

$$u^1 = u = u_x + iu_y, \qquad u^2 = \bar u = u_x - iu_y,$$

$$P^{11} = P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{xy}, \qquad P^{22} = P_{xx} - P_{yy} - 2iP_{xy}, \qquad P^{12} = P^{21} = P_{xx} + P_{yy}.$$

При задании на границе области только перемещений можно рассматривать задачу в перемещениях, которая следует из (7):

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big[2M\,\frac{\partial u}{\partial \bar z}\Big(1 - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial \bar z}\Big[N\Big(1 - \Big(1 - \frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big(1 - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\Big) - \frac{\partial u}{\partial \bar z}\,\frac{\partial \bar u}{\partial z}\Big)\Big] = 0, \quad u\big|_L = h(s). \qquad (8)$$

Найденные из (8) перемещения определяют плотность и напряжения:

$$\begin{gathered}u = u(z, \bar z), \qquad \nu = \Big(1 - \frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big(1 - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\Big) - \frac{\partial u}{\partial \bar z}\,\frac{\partial \bar u}{\partial z},\\ P^{11} = \bar P^{22} = 4M\,\frac{\partial u}{\partial \bar z}\Big(1 - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\Big), \quad P^{12} = 2N\Big[1 - \Big(1 - \frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big(1 - \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\Big) - \frac{\partial u}{\partial \bar z}\,\frac{\partial \bar u}{\partial z}\Big].\end{gathered} \qquad (9)$$

При конечных деформациях вращение элементарного объема, согласно В. В. Новожилову [4], можно описывать осредненными по этому объему поворотами $\Omega^{\alpha\beta}$, которые выражаются через линейные повороты $\omega^{\alpha\beta}$ и деформации $e^{\alpha\beta}$. В плоском случае линейные величины, их инварианты и представления через них осредненных поворотов имеют вид

$$\begin{gathered}
\omega^{11} = \bar{\omega}^{22} = 0, \quad \omega^{21} = \bar{\omega}^{12} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}, \quad \omega_1 = 0, \quad 4\omega_2 = \omega^{12}\omega^{21}, \\
e^{11} = \bar{e}^{22} = 2\,\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \quad e^{12} = e^{21} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}, \quad e_1 = e^{12}, \quad 4e_2 = e^{12}e^{21} - e^{11}e^{22}, \\
4(1 - e_1 + e_2) = (2 - e^{12})^2 - e^{11}e^{22} = 4\nu + \Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\Big)^2 - 4\,\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = 4\nu + (\omega^{21})^2, \\
\Omega^{11} = \bar{\Omega}^{22} = 0, \quad \Omega^{21} = \frac{\omega^{21}}{\sqrt{1 - e_1 + e_2}} = \frac{2\omega^{21}}{\sqrt{4\nu + (\omega^{21})^2}} \quad (\Omega^{21} = 2i\Omega_{xy}, \quad \omega^{21} = 2i\omega_{xy}).
\end{gathered} \tag{10}$$

2. Рассмотрим плоскую деформацию материалов, характеризуемых линейной зависимостью между тензорами Коши и Альманси. Из закона Мурнагана (2) и условия (5) следует, что коэффициенты упругости при этом должны быть постоянны и связаны условием

$$\Lambda = \text{const}, \qquad M = \text{const}, \qquad N = \Lambda + M = 0. \tag{11}$$

В этом случае закон (2) и потенциал (6) содержат только одну постоянную:

$$P = M(2\varepsilon - \varepsilon_1 G), \quad P^{11} = \bar{P}^{22} = 2M\varepsilon^{11}, \quad P^{12} = 0, \quad \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{M(1 - \varepsilon_1)}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2}} - M,$$

а уравнение (8) принимает вид

$$\Big(1 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\Big) 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\,4\,\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z\,\partial \bar{z}} = 0.$$

Присоединяя к нему комплексно-сопряженное равенство и используя представление оператора Лапласа в комплексных переменных $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = 4\partial_{z\bar{z}}$, получим однородную алгебраическую систему уравнений для величин Δu, $\Delta \bar{u}$

$$\Big(1 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\Big)\Delta u - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\,\Delta \bar{u} = 0, \qquad -\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\,\Delta u + \Big(1 - \frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Delta \bar{u} = 0.$$

Определитель системы равен относительной плотности (9) и, следовательно, должен быть отличен от нуля, поэтому система имеет только нулевое решение $\Delta u = 0$, $\Delta \bar{u} = 0$. Тем самым в данном случае задача (8) принимает вид задачи Дирихле для гармонического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}} = 0, \qquad u\big|_L = h(s). \tag{12}$$

Из (9)–(12) следуют представления рассматриваемых величин через два комплексных потенциала $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и краевая задача для потенциалов

$$\begin{gathered}
u(z, \bar{z}) = \varphi(z) - \bar{\psi}(\bar{z}), \qquad \nu(z, \bar{z}) = (1 - \varphi'(z))(1 - \bar{\varphi}'(\bar{z})) - \psi'(z)\bar{\psi}'(\bar{z}), \\
P^{11}(\bar{z}) = -4M\bar{\psi}'(\bar{z})(1 - \bar{\varphi}'(\bar{z})), \qquad P^{22}(z) = -4M\psi'(z)(1 - \varphi'(z)), \qquad P^{12} = 0, \\
\Omega^{11} = \bar{\Omega}^{22} = 0, \qquad \Omega^{21}(z, \bar{z}) = \frac{2(\varphi'(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z}))}{\sqrt{4\nu + (\varphi'(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z}))^2}};
\end{gathered} \tag{13}$$

$$\varphi(z) - \bar{\psi}(\bar{z}) = h(s). \tag{14}$$

При задании на границе только напряжений потенциалы определяются из второго краевого условия в (7):

$$\bar{\psi}(\bar{z}) - \int \bar{\psi}'(\bar{z})\bar{\varphi}'(\bar{z})\,d\bar{z}\big|_L = g(s), \quad g(s) = \frac{1}{2M}\Big(i\int\limits_0^s p(s)\,ds + C\Big), \quad C = \text{const}. \tag{15}$$

Таким образом, для рассматриваемых материалов представления через потенциалы линейны для перемещений и нелинейны для остальных величин. Соответственно краевая задача для потенциалов линейна в перемещениях и нелинейна в напряжениях.

3. Для сравнения полученных результатов с результатами, полученными по линейной теории, перейдем к потенциалам $\varphi_1 = 4M^2\varphi$, $\psi_1 = 2M\psi$. Тогда формулы (13)–(15) примут вид

$$2Mu = \frac{\varphi_1}{2M} - \bar{\psi}_1, \quad \nu = \Big(1 - \frac{\varphi_1'}{4M^2}\Big)\Big(1 - \frac{\bar{\varphi}_1'}{4M^2}\Big) - \frac{\psi_1'\bar{\psi}_1'}{4M^2}, \quad P^{11} = \bar{P}^{22} = -2\bar{\psi}_1'\Big(1 - \frac{\bar{\varphi}_1'}{4M^2}\Big),$$

$$P^{12} = 0, \qquad \Omega^{11} = \bar{\Omega}^{22} = 0, \qquad \Omega^{21} = \frac{2(\varphi_1' - \bar{\varphi}_1')}{\sqrt{64\nu M^4 - (\varphi_1' - \bar{\varphi}_1')^2}}, \tag{16}$$

$$\frac{\varphi_1}{2M} - \bar{\psi}_1\big|_{L_u} = 2Mh, \qquad \bar{\psi}_1 - \frac{1}{4M^2}\int \bar{\psi}_1'\bar{\varphi}_1'\,d\bar{z}\big|_{L_p} = i\int\limits_0^s p\,ds + C.$$

Пусть P_0, L_0 — характерные напряжение и размер, а $\sigma = P_0/M$ — безразмерный параметр. Представляя рассматриваемые величины через безразмерные величины (отмечаемые звездочкой)

$$P^{11} = P_0P_*^{11}, \quad P^{12} = P_0P_*^{12}, \quad p = P_0p_*, \quad M = P_0M_*, \quad u = L_0u_*,$$

$$z = L_0z_*, \quad s = L_0s_*, \quad h = L_0h_*, \quad \sigma = 1/M_*, \quad \varphi_1 = P_0^2L_0\varphi_{1*},$$

$$\psi_1 = P_0L_0\psi_{1*}, \quad C = P_0L_0C_*, \quad \nu = \nu_*, \quad \Omega^{21} = \Omega_*^{21},$$

преобразуем соотношения (16) к безразмерному виду

$$\begin{gathered} 2M_*u_* = \frac{\sigma}{2}\,\varphi_{1*} - \bar{\psi}_{1*}, \quad \nu_* = \Big(1 - \frac{\sigma^2}{4}\,\varphi_{1*}'\Big)\Big(1 - \frac{\sigma^2}{4}\,\bar{\varphi}_{1*}'\Big) - \frac{\sigma^2}{4}\,\psi_{1*}'\bar{\psi}_{1*}', \\ P_*^{11} = \bar{P}_*^{22} = -2\bar{\psi}_{1*}'\Big(1 - \frac{\sigma^2}{4}\,\bar{\varphi}_{1*}'\Big), \quad P_*^{12} = 0, \\ \Omega_*^{11} = \bar{\Omega}_*^{22} = 0, \qquad \Omega_*^{12} = \frac{2\sigma^2(\varphi_{1*}' - \bar{\varphi}_{1*}')}{\sqrt{64\nu_* + \sigma^4(\varphi_{1*}' - \bar{\varphi}_{1*}')^2}}, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\frac{\sigma}{2}\,\varphi_{1*} - \bar{\psi}_{1*}\Big|_{L_u} = 2M_*h_*, \qquad \bar{\psi}_{1*} - \frac{\sigma^2}{4}\int \bar{\psi}_{1*}'\bar{\varphi}_{1*}'\,d\bar{z}_*\Big|_{L_p} = i\int\limits_0^{s_*} p_*\,ds_* + C_*.$$

Полагая, что безразмерные величины в замкнутой области имеют конечные модули, а безразмерный параметр мал по сравнению с единицей, в (17) можем пренебречь малыми (содержащими параметр) членами. В результате (после возвращения к размерным величинам) получим формулы

$$2Mu = -\bar{\psi}_1, \quad P^{11} = \bar{P}^{22} = -2\bar{\psi}_1', \quad P^{12} = 0, \quad \Omega^{11} = \bar{\Omega}^{22} = 0, \quad \Omega^{21} = 0,$$

$$\nu = 1, \quad -\bar{\psi}_1\big|_{L_u} = 2Mh, \qquad \bar{\psi}_1\big|_{L_p} = i\int\limits_0^s p\,ds + C,$$

совпадающие с формулами линейной упругости [5, 6]

$$2\mu u = (3-4\nu)\varphi_1 - z\bar{\varphi}_1' - \bar{\psi}_1, \quad \mu\omega^{11} = \mu\bar{\omega}^{22} = 0, \quad \mu\omega^{21} = 2(1-\nu)(\varphi_1' - \bar{\varphi}_1'),$$

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -2(z\bar{\varphi}_1'' + \bar{\psi}_1'), \quad P^{12} = 2(\varphi_1' + \bar{\varphi}_1'), \quad \nu = 1 - \frac{1-2\nu}{\mu}(\varphi_1' + \bar{\varphi}_1'),$$

$$(3-4\nu)\varphi_1 - z\bar{\varphi}_1' - \bar{\psi}_1\big|_{L_u} = 2\mu h, \qquad \varphi_1 + z\bar{\varphi}_1' + \bar{\psi}_1\big|_{L_p} = i\int\limits_0^s p\,ds + C$$

(μ, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона), когда потенциал φ_1 равен нулю.

4. Пусть l — замкнутый контур, принадлежащий области $\bar{D}$, уравнения которого имеют вид $z = z(s)$, $\bar{z} = \bar{z}(s)$. Если в каждой точке контура задан вектор напряжений, то компоненты главного вектора и главного момента контурных сил F, M определяются формулами

$$F = F_x + iF_y = \oint p\,ds = \frac{1}{2i}\oint\Big(P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar{z}}{ds}\Big)ds,$$

$$M = \mathrm{Re}\Big\{-i\oint \bar{z}p\,ds\Big\} = \mathrm{Re}\Big\{-\frac{1}{2}\oint \bar{z}\Big(P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar{z}}{ds}\Big)\,ds\Big\}.$$

Использование представлений (13) позволяет записать их в форме

$$\bar{F} = 2Mi[\psi(z) - \chi(z)]_l, \quad M = -2M\mathrm{Re}\,[z(\psi(z) - \chi(z))]_l, \quad \chi = \int \psi'\varphi'\,dz, \tag{18}$$

где через $[A]_l$ обозначено приращение A при положительном обходе контура l.

Из формул (13) следует, что напряжения, повороты и плотность сохраняют свои значения при замене φ, ψ на потенциалы $\varphi+\alpha$, $\psi+\beta$ (α, $\beta = \mathrm{const}$). Этот произвол позволяет фиксировать значения потенциалов в одной из точек области. Если наряду с указанными величинами должны сохраняться и перемещения, постоянные должны быть связаны условием $\alpha - \bar{\beta} = 0$. В этом случае в некоторой точке можно фиксировать только один потенциал.

В бесконечной односвязной области D с границей L комплексные потенциалы многозначны. Пусть в D однозначно определены рассматриваемые величины. Тогда для любого замкнутого контура $l \in \bar{D}$, охватывающего L, в соответствии с (13) будем иметь

$$[\varphi - \bar{\psi}]_l = 0, \quad [(1-\varphi')(1-\bar{\varphi}') - \psi'\bar{\psi}'\,]_l = 0, \quad [\psi'(1-\varphi')]_l = 0, \quad \Big[\frac{\varphi' - \bar{\varphi}'}{\sqrt{4\nu + (\varphi' - \bar{\varphi}')^2}}\Big]_l = 0.$$

Отсюда с учетом свойств приращений функции $W(z, \bar{z})$ [7]

$$\frac{\partial}{\partial z}\,[W(z,\bar{z})]_l = \Big[\frac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial z}\Big]_l, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,[W(z,\bar{z})]_l = \Big[\frac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}\Big]_l$$

следует, что градиенты потенциалов должны быть однозначны: $[\varphi']_l = 0$, $[\psi']_l = 0$. Сами потенциалы представимы через однозначные функции φ^0, ψ^0, а их приращения связаны условием

$$[\varphi]_l = 2\pi i a, \quad [\psi]_l = 2\pi i b, \quad a + \bar{b} = 0, \quad \varphi(z) = a\,\ln\,z + \varphi^0(z), \quad \psi(z) = b\,\ln\,z + \psi^0(z). \tag{19}$$

Разложив φ^0, ψ^0 в ряды Лорана и вычислив величины (13), найдем, что для ограниченности напряжений, поворотов и плотности в бесконечной области потенциалы должны иметь вид

$$\varphi(z) = a\,\ln\,z + a_1 z + \varphi_0(z), \qquad \psi(z) = b\,\ln\,z + b_1 z + \psi_0(z),$$
$$\varphi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad \psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n}. \tag{20}$$

При задании на бесконечности величин P^{11}_∞, P^{12}_∞, ν_∞, Ω^{21}_∞ в соответствии с (13) и (20) получим соотношения

$$P^{11}_\infty = -4M\bar b_1(1-\bar a_1), \quad P^{12}_\infty = 0, \quad \nu_\infty = |1-a_1|^2 - |b_1|^2, \quad \Omega^{21}_\infty\sqrt{4\nu_\infty + (a_1-\bar a_1)^2} = 2(a_1-\bar a_1).$$

Полагая $a_1 = a_{1x} + ia_{1y}$, $b_1 = b_{1x} + ib_{1y}$ и используя связи комплексных и декартовых компонент напряжений и поворотов, для вторых коэффициентов в разложениях (20) установим уравнения

$$-P^\infty_{xx} = 2M(b_{1x}(1-a_{1x}) + b_{1y}a_{1y}), \qquad P^\infty_{xy} = 2M(-b_{1x}a_{1y} + b_{1y}(1-a_{1x})),$$
$$(\Omega^\infty_{xy})^2(\nu_\infty - a^2_{1y}) = a^2_{1y}, \qquad 4M^2|1-a_1|^4 - 4M^2\nu_\infty|1-a_1|^2 - |P^\infty_{xx} - iP^\infty_{xy}|^2 = 0, \tag{21}$$

определяющие их в виде

$$(1-a_{1x})^2 = \frac{\nu_\infty}{2}\,\frac{1-(\Omega^\infty_{xy})^2}{1+(\Omega^\infty_{xy})^2} + \frac{1}{2M}\sqrt{M^2\nu^2_\infty + (P^\infty_{xx})^2 + (P^\infty_{xy})^2}, \quad a^2_{1y} = \frac{\nu_\infty(\Omega^\infty_{xy})^2}{1+(\Omega^\infty_{xy})^2},$$
$$2Mb_{1x} = -\frac{(1-a_{1x})P^\infty_{xx} + a_{1y}P^\infty_{xy}}{(1-a_{1x})^2 + a^2_{1y}}, \qquad 2Mb_{1y} = \frac{(1-a_{1x})P^\infty_{xy} - a_{1y}P^\infty_{xx}}{(1-a_{1x})^2 + a^2_{1y}}.$$

Условия $P^{12}_\infty = 0$ и $(1-a_{1x})^2 \geqslant 0$ ограничивают значения задаваемых величин:

$$P^\infty_{xx} + P^\infty_{yy} = 0, \quad M\nu_\infty(1-(\Omega^\infty_{xy})^2) + (1+(\Omega^\infty_{xy})^2)\sqrt{M^2\nu^2_\infty + (P^\infty_{xx})^2 + (P^\infty_{xy})^2} \geqslant 0.$$

Вычисляя с учетом (20) главный вектор контурных сил (18) и используя (19), получим равенства

$$\bar F = 4\pi M(b_1 a - (1-a_1)b), \qquad a + \bar b = 0, \tag{22}$$

которые определяют коэффициенты a и b:

$$a = \frac{(1-a_1)F - \bar b_1\bar F}{4\pi M\nu_\infty}, \qquad b = \frac{b_1 F - (1-\bar a_1)\bar F}{4\pi M\nu_\infty}.$$

Таким образом, в разложениях потенциалов (20) первые пары коэффициентов определяются упругими свойствами материала, контурной и периферийной нагрузками и значениями плотности и поворота на периферии.

Перемещение (13), отвечающее потенциалам (20):

$$u = a_1 z - \bar b_1\bar z - \bar b\,\ln(z\bar z) + \sum_{n=0}^{\infty}(a_{-n}z^{-n} - \bar b_{-n}\bar z^{-n}),$$

при принятых условиях неограниченно возрастает на бесконечности. Для его ограниченности надо дополнительно принять $a = -\bar b = 0$, $a_1 = b_1 = 0$, что в силу (21) и (22) ограничивает величины на контуре и периферии:

$$F_x = F_y = 0, \quad P^\infty_{xx} = P^\infty_{xy} = 0, \quad \Omega^\infty_{xy} = 0, \quad \nu_\infty = 1.$$

При ограниченности в бесконечной области всех механических величин потенциалы (20) становятся однозначными функциями:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \qquad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n}.$$

Если в этой области потенциалы имеют вид (20), то можно рассматривать краевую задачу для однозначных потенциалов φ_0, ψ_0, которая следует из (14):

$$\varphi_0(z) - \bar{\psi}_0(\bar{z})\big|_L = h_0(s), \quad h_0(s) = h(s) + \bar{b}_1 \bar{z}(s) - a_1 z(s) + \bar{b} \ln |z(s)|^2, \quad z \in L. \tag{23}$$

Задача (14) аналогична (23), поэтому далее рассматривается первая из них.

5. Отобразим конформно односвязную (конечную или бесконечную) область D на внутренность K единичного круга с окружностью γ:

$$z = w(\zeta), \qquad w'(\zeta) \neq 0, \qquad \zeta = r \exp{(i\theta)} \in K.$$

Тогда комплексные потенциалы принимают вид

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta), \quad \varphi'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{w'(\zeta)}, \qquad \psi(z) = \psi(\zeta), \quad \psi'(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{w'(\zeta)},$$

механические величины (13) представляются в виде

$$\begin{gathered} u = \varphi(\zeta) - \bar{\psi}(\bar{\zeta}), \quad \Omega^{11} = \bar{\Omega}^{22} = 0, \quad \Omega^{21} = \frac{2(\varphi'(\zeta)\bar{w}'(\bar{\zeta}) - \bar{\varphi}'(\bar{\zeta})w'(\zeta))}{\sqrt{4\nu|w'(\zeta)|^4 + (\varphi'(\zeta)\bar{w}'(\bar{\zeta}) - \bar{\varphi}'(\bar{\zeta})w'(\zeta))^2}}, \\ P^{11} = \bar{P}^{22} = -4M\, \frac{\bar{\psi}'(\bar{\zeta})(\bar{w}'(\bar{\zeta}) - \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}))}{(\bar{w}'(\bar{\zeta}))^2}, \quad P^{12} = 0, \quad \nu = \frac{|w'(\zeta) - \varphi'(\zeta)|^2 - |\psi'(\zeta)|^2}{|w'(\zeta)|^2}, \end{gathered} \tag{24}$$

а условие (14) становится краевым условием для потенциалов в единичном круге:

$$\varphi(\tau) - \bar{\psi}(\bar{\tau}) = h(\tau), \qquad \tau = \exp{(i\theta)} \in \gamma. \tag{25}$$

Пусть функция, выражающая перемещение на границе, принадлежит классу гельдеровых функций и один из потенциалов в центре круга равен нулю:

$$h(\tau) \in H, \qquad \tau \in \gamma, \qquad \psi(0) = 0. \tag{26}$$

Умножая (25) на $1/(2\pi i(\tau - \zeta))$, интегрируя вдоль окружности и учитывая известные свойства интегралов [6]

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} = \varphi(\zeta), \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\bar{\psi}(\bar{\tau})\, d\tau}{\tau - \zeta} = \bar{\psi}(0) = 0 \quad (\zeta \in K),$$

для первого потенциала получим

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{h(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} \qquad (\zeta \in K). \tag{27}$$

Из условия (25) после перехода к сопряженным величинам для второго потенциала следует выражение

$$\psi(\zeta) = \bar{\varphi}(0) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\bar{h}(\bar{\tau})\, d\tau}{\tau - \zeta} \qquad (\zeta \in K).$$

Определяя постоянную $\bar{\varphi}(0)$ из условия $\psi(0) = 0$, получим второй потенциал в виде

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \bar{h}(\bar{\tau}) \, \frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\bar{h}(\bar{\tau}) \, d\tau}{\tau - \zeta}. \tag{28}$$

Формулы (27) и (28) дают решение задачи (25). Действительно, в силу (26) при стремлении ζ из круга к некоторой граничной точке $\tau_0 = \exp(i\theta_0)$ потенциалы принимают определенные предельные значения, которые согласно формулам Сохоцкого — Племеля [6] соответственно равны

$$\varphi_+(\tau_0) \equiv \varphi(\tau_0) = \frac{h(\tau_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{h(\tau) \, d\tau}{\tau - \tau_0} = \frac{h(\tau_0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{h(\theta) \, d\theta}{1 - \exp(i(\theta_0 - \theta))},$$

$$\psi_+(\tau_0) \equiv \psi(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \bar{h}(\bar{\tau}) \, \frac{d\tau}{\tau} - \frac{\bar{h}(\bar{\tau}_0)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\bar{h}(\bar{\tau}) \, d\tau}{\tau - \tau_0} = -\frac{\bar{h}(\bar{\tau}_0)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\bar{h}(\theta) \, d\theta}{\exp(i(\theta - \theta_0)) - 1}.$$

Отсюда следует, что разность $\varphi(\tau_0) - \bar{\psi}(\bar{\tau}_0)$ равна $h(\tau_0)$. Это означает, что потенциалы удовлетворяют краевому условию (25).

6. Пусть неограниченная пластина имеет в актуальном состоянии эллиптическое отверстие с полуосями a, b $(a > b)$. Рассмотрим ее деформирование при заданном смещении границы отверстия и отсутствии смещения на бесконечности. Примем, что декартовы оси совпадают с осями эллипса. Конформное отображение внешности эллипса D на внутренность единичного круга K (при соответствии точек $z = \infty$, $\zeta = 0$) дается функцией [6]

$$z = w(\zeta) = n\Big(m\zeta + \frac{1}{\zeta}\Big), \quad n = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b}, \quad \zeta = r \exp(i\theta) \in K. \tag{29}$$

Параметр $0 \leqslant m < 1$ характеризует форму эллипса, а $0 < n < \infty$ — его размеры (при $m = 1$, когда эллипс вырождается в разрез, конформность отображения нарушается, так как $w'(\pm 1) = 0$). Отсюда следуют формулы

$$x = n\Big(mr + \frac{1}{r}\Big)\cos\theta, \qquad y = n\Big(mr - \frac{1}{r}\Big)\sin\theta,$$

определяющие эллиптические координаты r, θ в плоскости круга, в которых уравнения граничного эллипса L имеют вид

$$x_L = n(m+1)\cos\theta, \qquad y_L = n(m-1)\sin\theta. \tag{30}$$

Пусть перемещения на границе зависят от размеров и формы отверстия и положительного параметра α:

$$\begin{gathered} h_x = n(m\cos\theta + \alpha\sin\theta), \quad h_y = n(m\sin\theta + \alpha\cos\theta), \quad r = 1 \\ (h = h_x + ih_y = n(m\tau - \bar{i}\alpha\bar{\tau}), \quad \tau = \exp(i\theta) \in \gamma). \end{gathered} \tag{31}$$

В данном случае $h(\tau) \in H$, поэтому интегралы (27), (28) определяют комплексные потенциалы в виде

$$\varphi(z) = nm\zeta, \qquad \psi(\zeta) = in\alpha\zeta.$$

Для этих потенциалов и отображения (29) из (24) получим

$$u = n(m\zeta + i\alpha\bar{\zeta}), \qquad \Omega^{11} = \bar{\Omega}^{22} = 0,$$

$$\Omega^{21} = \frac{-2m(\zeta^2 - \bar{\zeta}^2)}{\sqrt{4(1-\alpha^2\zeta^2\bar{\zeta}^2)(m\zeta^2-1)(m\bar{\zeta}^2-1) + m^2(\zeta^2-\bar{\zeta}^2)^2}}, \tag{32}$$

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -\frac{4i\alpha M\bar{\zeta}^2}{(m\bar{\zeta}^2-1)^2}, \quad P^{12} = 0, \quad \nu = \frac{1-\alpha^2\zeta^2\bar{\zeta}^2}{(m\zeta^2-1)(m\bar{\zeta}^2-1)}.$$

В силу (30), (31) координаты x_0, y_0 точек контура L_0 отверстия в исходном состоянии пластины определяются формулами

$$x_0 = x_L - h_x = n(\cos\theta - \alpha\sin\theta), \quad y_0 = y_L - h_y = -n(\sin\theta + \alpha\cos\theta).$$

Исключение параметра θ дает явное уравнение контура $x_0^2 + y_0^2 = R_0^2$, $R_0 = n\sqrt{1+\alpha^2}$, т. е. до деформации пластины отверстие было круговым.

Плотность и компоненты перемещения, напряжения и осредненного поворота в пластине в эллиптических координатах r,θ, определяемые через величины (32) и отображение (29) выражениями [7]

$$\nu(\zeta,\bar{\zeta}) = \nu(r,\theta), \qquad u_r + iu_\theta = \frac{\bar{\zeta}\bar{w}'(\bar{\zeta})}{|\zeta|\,|w'(\zeta)|}\,u,$$

$$P_{rr} - P_{\theta\theta} + 2iP_{r\theta} = \frac{\bar{\zeta}\bar{w}'(\bar{\zeta})}{\zeta w'(\zeta)}\,P^{11}, \qquad P_{rr} + P_{\theta\theta} = P^{12},$$

$$\Omega_{rr} - \Omega_{\theta\theta} + i(\Omega_{r\theta} + \Omega_{\theta r}) = \frac{\bar{\zeta}\bar{w}'(\bar{\zeta})}{\zeta w'(\zeta)}\,\Omega^{11}, \quad \Omega_{rr} + \Omega_{\theta\theta} + i(\Omega_{r\theta} - \Omega_{\theta r}) = \Omega^{21},$$

имеют значения

$$\begin{gathered}
u_r = mnr\,\frac{mr^2 + \alpha r^2\sin 2\theta - \cos 2\theta}{\sqrt{1+m^2r^4-2mr^2\cos 2\theta}}, \qquad u_\theta = -nr\,\frac{\alpha - \alpha mr^2\cos 2\theta + m\sin 2\theta}{\sqrt{1+m^2r^4-2mr^2\cos 2\theta}}, \\
\nu = \frac{1-\alpha^2r^4}{1+m^2r^4-2mr^2\cos 2\theta}, \quad P_{rr} = P_{\theta\theta} = 0, \quad P_{r\theta} = -\frac{2\alpha Mr^2}{1+m^2r^4-2mr^2\cos 2\theta}, \\
\Omega_{rr} = \Omega_{\theta\theta} = 0, \qquad \Omega_{r\theta} = -\frac{mr^2\sin 2\theta}{\sqrt{a\cos^2 2\theta + 2b\cos 2\theta + c}}, \\
a = m^2r^4, \quad b = -mr^2(1-\alpha^2r^4), \qquad c = 1 - \alpha^2r^4(1+m^2r^4).
\end{gathered} \tag{33}$$

В силу условия

$$1 + m^2r^4 - 2mr^2\cos 2\theta \geqslant (1-mr^2)^2 > 0 \tag{34}$$

перемещения вещественны. В поле напряжений на площадках, ортогональных координатным линиям, действуют только сдвиговые усилия. Согласно (33) при удалении на бесконечность ($r = 0$) перемещения, напряжения и повороты неограниченно убывают, а относительная плотность стремится к единице:

$$u_r^\infty = u_\theta^\infty = 0, \quad P_{rr}^\infty = P_{\theta\theta}^\infty = P_{r\theta}^\infty = 0, \quad \Omega_{rr}^\infty = \Omega_{\theta\theta}^\infty = \Omega_{r\theta}^\infty = 0, \quad \nu^\infty = 1.$$

При приближении к граничному эллипсу $L(r = 1)$ они принимают значения

$$u_r^L = mn\,\frac{m + \alpha\sin 2\theta - \cos 2\theta}{\sqrt{1+m^2-2m\cos 2\theta}}, \quad u_\theta^L = -n\,\frac{\alpha(1-m\cos 2\theta) + m\sin 2\theta}{\sqrt{1+m^2-2m\cos 2\theta}},$$

$$\nu^L = \frac{1-\alpha^2}{1+m^2-2m\cos 2\theta}, \quad P_{rr}^L = P_{\theta\theta}^L = 0, \quad P_{r\theta}^L = -\frac{2\alpha M}{1+m^2-2m\cos 2\theta},$$

$$\Omega^L_{rr} = \Omega^L_{\theta\theta} = 0, \quad \Omega^L_{r\theta} = -\frac{m\sin 2\theta}{\sqrt{1-\alpha^2(1+m^2)-2m(1-\alpha^2)\cos 2\theta + m^2\cos^2 2\theta}}.$$

Граничные перемещения имеют нормальные и тангенциальные составляющие $u_n = -u^L_r$, $u_t = -u^L_\theta$. Экстремумы модуля этого перемещения, достигаемые в точках эллипса, лежащих на биссектрисах координатных углов, имеют значения

$$\left|u^L\right|_{\max} = n(m+\alpha) \quad \text{при} \quad 2\theta = \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}, \qquad \left|u^L\right|_{\min} = n|m-\alpha| \quad \text{при} \quad 2\theta = \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}.$$

Экстремальные значения граничных относительной плотности и напряжений реализуются в точках, принадлежащих осям симметрии эллипса, и соответственно равны

$$\nu^L_{\max} = \frac{1-\alpha^2}{(1-m)^2}, \quad P^L_{r\theta\,\min} = -\frac{2\alpha M}{(1-m)^2} \quad \text{при} \quad 2\theta = 0; 2\pi,$$

$$\nu^L_{\min} = \frac{1-\alpha^2}{(1+m)^2}, \quad P^L_{r\theta\,\max} = -\frac{2\alpha M}{(1+m)^2} \quad \text{при} \quad 2\theta = \pi; 3\pi.$$

Граничные осредненные повороты в четных и нечетных четвертях эллипса имеют противоположные направления, а их экстремумы достигаются между точками на осях симметрии:

$$\Omega^L_{r\theta\,\min} = -\frac{m}{\sqrt{1-m^2-\alpha^2}} \quad \text{при} \quad 2\theta = \arccos m; 2\pi + \arccos m,$$

$$\Omega^L_{r\theta\,\max} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2-\alpha^2}} \quad \text{при} \quad 2\theta = 2\pi - \arccos m; 4\pi - \arccos m.$$

Условия положительности плотности и вещественности поворота в пластине (33) с учетом соотношения (34) и выражения

$$a\cos^2 2\theta + 2b\cos 2\theta + c = (mr^2\cos 2\theta + \alpha^2 r^4 - 1)^2 + \alpha^2 r^4(1 - m^2 r^4 - \alpha^2 r^4) \quad (0 < r \leqslant 1)$$

ограничивают значения параметра α и перемещений на границе (31)

$$\alpha^2 < 1, \qquad \alpha^2 < 1 - m^2.$$

Оба неравенства удовлетворяются, если удовлетворяется второе из них. Таким образом, осредненный поворот в большей мере ограничивает перемещения на границе, чем относительная плотность.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
2. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
3. **Green A. E., Zerna W.** Theoretical elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1968.
4. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
5. **Колосов Г. В.** Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ, 1935.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. **Снеддон И. Н., Берри Д. С.** Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию 28/VI 1999 г.