

при этом разрывающее усилие на граничных контурах определяется выражениями

$$(43) \quad (P_{\mu\mu})_{\pm} = -\frac{c}{2} [g\eta_{\pm} + h - (g\eta_{\pm} + h)^{-1}] \frac{(1 - \operatorname{ch} 2\lambda_{\pm})(1 + \cos 2\mu)}{\operatorname{ch} 2\lambda_{\pm} - \cos 2\mu}.$$

Формулы (41), (42) дают решение задачи о равновесии эллиптического кольца под действием периодических контурных нагрузок. В частности, при $\lambda_{-} = 0$ внутренний контур становится отрезком оси абсцисс $-a \leq x \leq a$, а рассматриваемая задача — задачей о нагружении эллиптической области с прямолинейным разрезом. Краевые условия на разрезе упрощаются:

$$\lambda_{-} = 0, (p_{\lambda})_{-}^{\circ} = c[2g \cos \mu + h - (2g \cos \mu + h)^{-1}], (p_{\mu})_{-}^{\circ} = 0,$$

т. е. разрез нагружен только нормальной нагрузкой. Разрывающее усилие (43) на разрезе принимает значения

$$(44) \quad \begin{aligned} &\text{при } \mu \neq 0; \pi \quad \lambda_{-} = 0, (P_{\mu\mu})_{-}^{\circ} = 0, \\ &\text{при } \mu = 0 \quad \lambda_{-} = 0, (P_{\mu\mu})_{-}^{\circ} = c[h + 2g - (h + 2g)^{-1}], \\ &\text{при } \mu = \pi \quad \lambda_{-} = 0, (P_{\mu\mu})_{-}^{\circ} = c[h - 2g - (h - 2g)^{-1}], \end{aligned}$$

т. е. оно равно нулю на всем разрезе, кроме его концов, в концах же разреза (при $h \pm 2g \neq 0$) оно ограничено и различно. Легко видеть, что при $g = 0$ контурная нагрузка (42) симметрична (на разрезе — постоянна), соответственно равны и конечны разрывающие усилия (44) в концах разреза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толоконников Л. А. Плоская деформация несжимаемого материала // ДАН СССР.— 1958.— Т. 119, № 6.
2. Громов В. Г., Толоконников Л. А. К вычислению приближений в задаче о конечных плоских деформациях несжимаемого материала // Изв. АН СССР. ОТН.— 1963.— № 2.
3. Грин А. Е., Адкинс Дж. Е. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.— М.: Мир, 1965.
4. Черных К. Ф. Обобщенная плоская деформация в нелинейной теории упругости // Прикл. механика.— 1977.— Т. 13, № 1.
5. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды.— М.: Физматгиз, 1962.
6. Бондарь В. Д. Статическая задача нелинейной упругости при плоской деформации несжимаемого материала // Динамика сплошной среды/ИГ СО АН СССР.— 1983.— Вып. 61.
7. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными.— М.: Физматгиз, 1961.
8. Снеддон И. Н., Берри П. С. Классическая теория упругости.— М.: ГИФМЛ, 1961.

г. Новосибирск

Поступила 15/VI 1989 г.

УДК 535.417

С. Л. Золотухин, В. К. Косенюк

РАСШИФРОВКА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННО-ОПТИЧЕСКИХ КАРТИН МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При экспериментальном исследовании плоских задач механики деформируемого твердого тела методами муара [1—3] или голографической интерферометрии с использованием накладных интерферометров [4] получаемая информация представляется в виде картин интерференционно-оптических полос. Путем расшифровки этих экспериментальных картин определяются поля напряжений и деформаций в исследуемой области.

© 1990 Золотухин С. Л., Косенюк В. К.

Известны разнообразие подходы и соответствующие им алгоритмы решений рассматриваемой задачи [2, 5—9 и др.], основанные так или иначе на восстановлении в исследуемой области функций порядка полос $N(x, y)$, переходе от них к функциям плоскостных компонент перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ и нахождении их частных производных.

Вычисление компонент деформаций путем операции дифференцирования восстанавливаемых функций определяет повышенную чувствительность указанных методов к различным неточностям и искажениям исходных данных, а также к выбору критерия приближения при их аппроксимации. Вместе с тем получаемой из эксперимента информации недостаточно для корректной аппроксимации искомым функциям, так как на границах области требуется знание не только порядка полос, но и значений их производных. Имеющиеся в настоящее время автоматизированные комплексы обработки интерференционно-оптических картин [9—12] осуществляют автоматизированный съем и численную фильтрацию исходной информации, что значительно снижает трудоемкость работ, однако при дальнейшей численной обработке используются алгоритмы, обладающие перечисленными выше недостатками.

В [13] отмечалась эффективность синтеза голографической интерферометрии и численных методов потенциала для исследования упругодеформируемого состояния трехмерных тел. При этом для установления напряженно-деформированного состояния внутри области достаточно информации, снимаемой с интерференционно-оптических картин по ее границам. К достоинствам можно также отнести эффект сглаживания, присущий интегральным методам: с удалением внутрь области неточности определения граничных условий сказываются значительно меньше, чем у границ.

В настоящей работе рассматривается возможность использования теоретических решений, полученных путем численной реализации метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), для расшифровки интерференционно-оптических картин при исследовании плоских упругопластических полей напряжений и деформаций.

1. Постановка задачи. Для нахождения плоскостных компонент перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ с использованием накладных интерферометров производится регистрация четырех интерферограмм [4]. Значения перемещений в этом случае могут быть найдены по формулам

$$(1.1) \quad v = K_v(N_1 - N_2)/2;$$

$$(1.2) \quad u = K_u(N_3 - N_4)/2.$$

Здесь N_1, N_2, N_3, N_4 — порядок интерференционных полос с соответствующих картин; K_v, K_u — некоторые коэффициенты, зависящие от используемого источника света и параметров, определяющих условия регистрации картин.

При исследовании методами муара получаемые картины полос отвечают картинам изолиний полей перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$, значения которых вычисляются по формулам

$$(1.3) \quad u = N_u K'_u;$$

$$(1.4) \quad v = N_v K'_v$$

(N_u, N_v — порядок полос с соответствующих муаровых картин, K'_u, K'_v — масштабные коэффициенты, зависящие от частоты раstra и условий съемки).

Расшифровка интерферограмм выполняется в следующем порядке. Исследуемая область ограничивается некоторым замкнутым гладким контуром. Для каждой экспериментальной картины находят точки пересечения интерференционных полос с данным контуром. Путем аппроксимации восстанавливаются функции порядка полос $N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi)$ или $N_u(\xi), N_v(\xi)$, затем по (1.1)—(1.4) определяются величины перемещений на границе области $u(\xi)$ и $v(\xi)$ (ξ — координата точки на контуре границы области Ω). Найденные перемещения используются в качестве граничных условий при решении плоской упругопластической задачи.

Следовательно, расшифровка интерферограмм сводится к численному решению плоской упругопластической задачи при заданных граничных условиях, полученных из эксперимента.

2. Численное решение плоской упругопластической задачи методом ГИУ. Решение строится в рамках теории малых упругопластических

деформаций в сочетании с методом упругих решений и с использованием критерия текучести Мизеса — Губера [14, 15]

$$(2.1) \quad \sigma_i = \sigma_T,$$

т. е. пластическая деформация возникает тогда, когда интенсивность напряжений σ_i достигает величины предела текучести материала при растяжении σ_T . Для плоского напряженного состояния

$$(2.2) \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2};$$

$$(2.3) \quad \varepsilon_i = (\sqrt{2}/3) \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 1,5\varepsilon_{12}^2}$$

(ε_i — интенсивность деформаций).

Метод упругих решений представляет собой метод последовательных приближений, при котором на каждом шаге решается обычная задача теории упругости. Известно, что основные уравнения теории пластичности можно записать в виде, аналогичном соответствующим уравнениям теории упругости, с учетом действия некоторых дополнительных объемных ψ_i и поверхностных T_i сил [14]. Эти силы прикладываются в зоне пластичности и определяются следующим образом: для точек внутри области

$$(2.4) \quad \psi_i = \partial \sigma_{ij}^0 / \partial x_j \quad (i, j = 1, 2);$$

для точек на границе области

$$(2.5) \quad T_i = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (i, j = 1, 2).$$

Здесь $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}$ — компоненты дополнительных напряжений, вычисляются как разность напряжений в упругопластической среде σ_{ij}^* и напряжений в аналогичной упругой области σ_{ij} ; n_j — направляющие косинусы внешней нормали к границе области.

Для компонент напряжений в упругопластической среде имеем [15]

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^* &= 2G^* [\varepsilon_{11} + \mu^* \theta / (1 - \mu^*)], \\ \sigma_{22}^* &= 2G^* [\varepsilon_{22} + \mu^* \theta / (1 - \mu^*)], \quad \sigma_{12}^* = G^* \varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

где $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$; $G^* = \sigma_i / 3\varepsilon_i$ — переменный модуль сдвига; $\mu^* = (0,5 - 3\lambda G^*) / (1 + 3\lambda G^*)$; $\lambda = (1 - 2\mu) / E$; E , μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала упругой среды. Для решения задачи должна быть также известна функциональная зависимость σ_i от ε_i . Диаграмму деформирования материала $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ см. на рис. 1.

В качестве начального приближения дополнительные нагрузки принимаются равными нулю и решается плоская задача теории упругости. Определяются параметры напряженно-деформированного состояния σ_{ij} и ε_{ij} , а также σ_i и ε_i . Для зоны пластичности ($\sigma_i > \sigma_T$) по кривой деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ находятся значения σ_i^* , соответствующие ε_i . По формулам (2.6) вычисляются компоненты напряжений σ_{ij}^* , затем по (2.4), (2.5) — дополнительные объемные и поверхностные силы. Во втором приближении решается исходная краевая задача теории упругости с учетом действия дополнительных сил. После этого процесс вычислений повторяется снова. Он заканчивается, когда разница между результатами двух последовательных приближений будет достаточно малой или окажется в пределах допустимой точности. Выполненные расчеты показали быструю сходимость процесса — во многих случаях достаточно двух или трех итераций.

Таким образом, решение плоской упругопластической задачи приводится к решению некоторой последовательности линейно-упругих задач с учетом дополнительных объемных и поверхностных сил, приложенных в зоне пластичности.

Решение плоских линейно-упругих задач осуществляется путем численной реализации метода граничных интегральных уравнений в соответ-

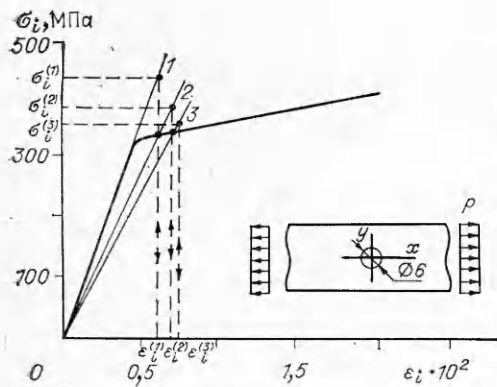


Рис. 1

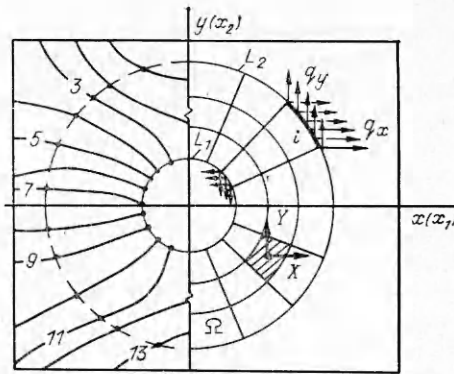


Рис. 2

ствии с подходом, предложенным в [16]. Заданная область Ω рассматривается как часть бесконечной плоскости с действующими по контурам ее границ неизвестными распределенными нагрузками q_x и q_y . Требуется найти такие значения q_x и q_y , при которых на контурах L_1 и L_2 будут выполнены заданные условия.

Граница области разбивается на n достаточно малых участков, в их пределах считается $q_x = \text{const}$ и $q_y = \text{const}$. Используя решение для сосредоточенной силы, действующей в плоскости, можно интегрированием по каждому участку и суммированием по контурам границ получить выражения напряжений и смещений в точках области, включая границу. Если внутри области действуют сосредоточенные силы, то в эти выражения добавляются необходимые слагаемые.

Напряжения и смещения от действия в направлении оси x сосредоточенной силы P находятся как

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \left[-(3 + \mu) + 2(1 + \mu) \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right], \\ \sigma_y &= \frac{P}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \left[1 - \mu - 2(1 + \mu) \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{4\pi} \frac{xy}{x^2 + y^2} \left[1 - \mu + 2(1 + \mu) \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right], \\ u &= -\frac{P}{8\pi G} \left[\frac{3 - \mu}{2} \ln(x^2 + y^2) + (1 + \mu) \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right], \quad v = \frac{P}{8\pi G} (1 + \mu) \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

(G — модуль сдвига; x, y — координаты точки, где определяются искомые величины относительно места приложения силы; u, v — перемещения точки в направлении осей x и y).

Величины перемещений и напряжений от действия в пределах участка распределенных нагрузок q_x и q_y для точек области, расположенных вне этого участка, вычисляются по формулам (2.7) от действия сосредоточенной силы, являющейся равнодействующей этих нагрузок в пределах участка их приложения. Компоненты напряжений и перемещений для точки, принадлежащей участку приложения q_x и q_y , находятся от суммарного действия системы сосредоточенных сил, эквивалентно заменяющих равномерно распределенную нагрузку. При определении напряжений в этом случае к вычисленным значениям добавляются дополнительные слагаемые, учитывающие сингулярность, которые для распределенной нагрузки q_x имеют вид

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \pm (q_x/2) \cos \alpha [1 + (1 + \mu) \sin^2 \alpha], \\ \sigma_y &= \mp (q_x/2) \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \mu \cos^2 \alpha), \\ \tau_{xy} &= \pm (q_x/2) \sin \alpha (\sin^2 \alpha - \mu \cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

(α — угол, образованный нормалью к контуру границы в рассматриваемой точке и осью x).

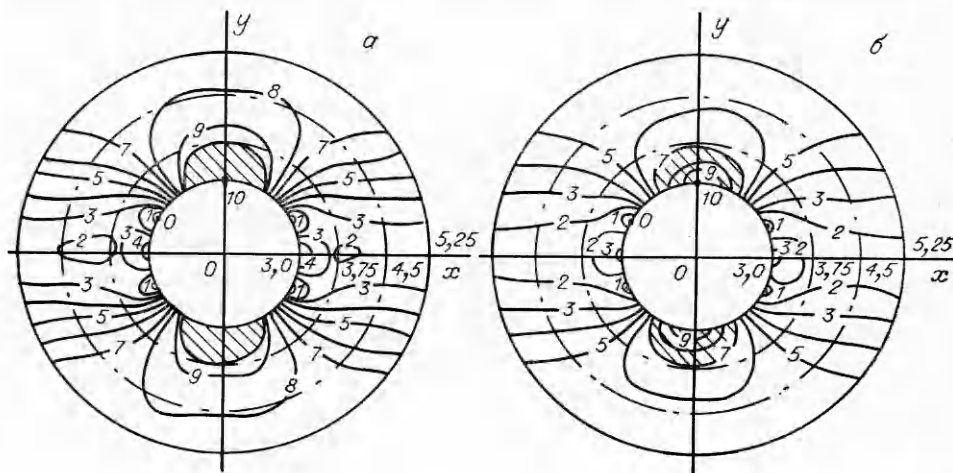
Для дискретизации дополнительных объемных сил исследуемая область Ω разбивается координатной сеткой на подобласти, или элементы. Производится проверка выполнения условия (2.1) для каждого элемента и локализуется зона пластических деформаций. В центре тяжести элемента, принадлежащего этой зоне, прикладываются сосредоточенные силы X и Y (рис. 2), эквивалентные действию дополнительных объемных сил. Значения X и Y можно найти непосредственно из условия равновесия этого элемента при действии на его границе дополнительных напряжений σ_{ij}^0 .

Выражения для перемещений, содержащие дополнительные объемные силы X и Y , а также неизвестные значения q_x и q_y , вводятся в граничные условия задачи, записанные для срединных точек участков контуров границы. Имеем систему $2n$ уравнений, линейных относительно q_x и q_y , из решения которой получаем величины компенсирующих нагрузок q_x и q_y , а затем — значения напряжений и перемещений на границе и внутри заданной области Ω .

3. Пример. Рассматривалась задача определения полей напряжений и деформаций в одноосно растягиваемой пластинке с центральным круговым отверстием радиусом $R = 3$ мм. Материал пластинки — сплав Д16Т с параметрами $E = 6 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0,31$. Геометрические размеры образца: ширина 40,2 мм, толщина 1,06 мм. Диаграмма деформирования материала приведена на рис. 1. Пределу текучести отвечают значения $\sigma_T = 310$ МПа, $\varepsilon_T = 0,005$.

Исходной информацией для численного расчета служили приведенные в [4] картины интерференционно-оптических полос, полученные с использованием накладных интерферометров. Нагружение образца осуществлялось поэтапно. Этапы соответствовали величине внешней нагрузки $p = 2,8; 5,6; 7,8$ и $9,74$ кН, при этом нормальные напряжения в сечениях без концентратора были равны 65,7; 131,4; 184,0 и 228,6 МПа. Регистрация голограмм проводилась методом двух экспозиций — в начале и конце каждого этапа. Границами исследуемой в форме кольца области являлись контур отверстия L_1 и соосная отверстию окружность радиусом $2R$ — контур L_2 (см. рис. 2). Аппроксимация функций порядка полос по границам области выполнялась согласно [8], и для каждого этапа нагружения по формулам (1.1), (1.2) находились приращения перемещений. Полные значения перемещений вычислялись путем суммирования этих приращений на всех предшествующих этапах нагружения.

Дискретизация области и ее границ осуществлялась с использованием координатной сетки, образованной семейством концентрических окружностей и радиальных лучей, проведенных с равным угловым шагом.



Р и с. 3

Таблица 1

Этап нагружения	Нагрузка, МПа	Деформации															
		$\epsilon_r \cdot 10^{-4}$				$\epsilon_\theta \cdot 10^{-4}$				$\gamma_{r\theta} \cdot 10^{-4}$				$\epsilon_i \cdot 10^{-4}$			
		R/R ₀															
		1,0	1,25	1,5	1,75	1,0	1,25	1,5	1,75	1,0	1,25	1,5	1,75	1,0	1,25	1,5	1,75
1	65,7	-9,8 (-11,0)	-3,6 (-3,3)	-2,0 (-1,5)	-1,38 (-1,2)	30,8 (33,3)	21,2 (20,5)	17,6 (15,6)	15,6 (13,5)	0,02 (0)	0,5 (0)	0,5 (0)	0,58 (0)	27,3 (29,5)	18,5 (17,6)	15,3 (13,5)	13,6 (11,8)
2	131,4	-19,2	-7,2	-4,2	-3,1	60,1	41,3	34,4	30,4	0,02	0,6	0,6	0,6	54,2	36,1	29,9	26,5
3	184,0	-26,5	-12,2	-10,1	-8,7	78,5	53,4	47,1	41,9	0,4	0,6	0,6	0,6	70,4	46,7	41,1	36,6
4	228,6	-32,3	-10,6	-14,0	-15,8	100,0	62,0	60,2	57,4	-1,1	1,6	1,7	2,6	88,5	54,0	52,7	50,4

Таблица 2

Этап нагружения	Нагрузка, МПа	Напряжения, МПа											
		σ_r				σ_θ				σ_i			
		R/R ₀											
		1,0	1,25	1,5	1,75	1,0	1,25	1,5	1,75	1,0	1,25	1,5	1,75
1	65,7	2,3 (-0,5)	22,5 (22,9)	25,5 (24,5)	25,3 (21,8)	184,1 (198,3)	133,8 (128,0)	113,4 (100,5)	101,5 (87,5)	183,0 (198,3)	124,2 (118,2)	103,1 (90,7)	91,5 (79,0)
2	131,4	2,5	42,6	47,7	46,4	336,6	260,0	220,3	196,6	315,0	242,1	200,9	178,2
3	184,0	15,3	36,3	36,2	34,4	345,1	329,8	292,1	260,9	337,7	313,3	275,8	245,5
4	228,6	31,3	66,2	42,3	24,3	376,1	347,6	335,8	324,4	361,5	319,7	316,9	313,1

На основе изложенного выше алгоритма на языке ПЛ-1 для ЕС ЭВМ разработана программа определения полей перемещений (u, v), напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$), деформаций ($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ и $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$), а также интенсивностей напряжений (σ_i) и деформаций (ϵ_i). Результаты расчета выдаются в форме таблиц значений и схем изолиний соответствующих параметров с указанием зон пластических деформаций.

На рис. 3 даны схемы изолиний полей σ_i (а) и ϵ_i (б), полученные для третьего этапа нагружения. Функции σ_i и ϵ_i в пределах рассматриваемой области определяются линиями одинаковых уровней, номера которых изменяются от 0 до 10. Изменение номера на единицу отвечает приращению функций $\Delta\sigma_i = 33,6$ МПа, $\Delta\epsilon_i = 0,7 \cdot 10^{-3}$. Максимальное значение — линия 10 ($\max \sigma_i = 338,7$ МПа, $\max \epsilon_i = 7,05 \cdot 10^{-3}$), минимальное — линия 0 ($\min \sigma_i = 3,01$ МПа, $\min \epsilon_i = 0,5 \cdot 10^{-4}$). Заштрихованная область — зона пластической работы материала. Дискретизация каждой границы в данном случае осуществлялась 36 граничными элементами, а исследуемая область разбивалась на 216 внутренних элементов. При решении в качестве граничных условий для внутреннего контура принималось отсутствие внешних нагрузок.

В табл. 1, 2 представлены значения напряжений и деформаций в сечении $x = 0$ для четырех этапов нагружения. Для первого этапа приведены также соответствующие значения параметров из известного решения задачи Кирша для бесконечной упругой области с круговым отверстием. Для данного случая получено хорошее качественное совпадение изолиний полей напряжений и деформаций и соответствие значений исследуемых параметров с точностью, достаточной для инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюрелли А., Парке В. Анализ деформаций с использованием муара. — М.: Мир, 1974.
2. Шнейдерович Р. М., Левин О. А. Измерение полей пластических деформаций методом муара. — М.: Машиностроение, 1972.
3. Жилкин В. А., Попов А. М. Голографический муаровый метод // Завод. лаб. — 1979. — № 11.
4. Герасимов С. И., Жилкин В. А. Исследование плоских упругопластических задач методом голографической интерферометрии // ПМТФ. — 1988. — № 2.
5. Полухин П. И., Воронцов В. К., Кудрин А. Б., Чиченев Н. А. Деформации и напряжения при обработке металлов давлением. — М.: Металлургия, 1974.
6. Левин О. А., Мильков В. Г., Милькова Н. И. Расчетно-экспериментальное исследование полей деформаций при повышенных температурах // Машиноведение. — 1977. — № 2.
7. Жилкин В. А. Способ аппроксимации функций порядка интерференционных полос в оптических методах // Завод. лаб. — 1982. — № 10.
8. Жилкин В. А., Косенко В. К., Шевцов Р. Г. Использование кольцевой статически неопределимой балки для аппроксимации функции порядков в оптических методах // Изв. вузов. Строительство и архитектура. — 1985. — № 6.
9. Поля деформаций при малоцикловом нагружении / Под ред. С. В. Серенсена. — М.: Наука, 1979.
10. Гужов В. И., Дружинин А. И., Козачок А. Г., Логинов А. В. Измерительно-вычислительная система для исследования напряженно-деформированного состояния объектов // Автометрия. — 1982. — № 4.
11. Марченко Н. А., Пергамент А. Х. Обработка интерферограмм на ЭВМ. — М., 1982. — (Препр./Ин-т прикл. мат. АН СССР; № 42).
12. Герасимов С. И., Гужов В. И., Жилкин В. А., Козачок А. Г. Автоматизация обработки интерференционных картин при исследовании полей деформаций // Завод. лаб. — 1985. — № 4.
13. Верюжский Ю. В., Бесков А. Н. Исследование сложных трехмерных конструкций методами потенциала и голографии // Тр. ин-тов инж. ж.-д. трансп. (МИИТ). — 1980. — № 669.
14. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // ПММ. — 1951. — Т. 5, № 6.
15. Ильюшин А. А. Основы теории пластичности. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
16. Александров А. Я. Решения основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений // ДАН СССР. — 1973. — Т. 208, № 2.

г. Новосибирск

Поступила 11/XI 1988 г.,
в окончательном варианте — 23/I 1989 г.